

# BAB I

## DASAR SISTEM OPTIMASI

---

---

### 1.1 Pendahuluan

Teknik optimasi merupakan suatu cara yang dilakukan untuk memberikan hasil terbaik yang diinginkan. Teknik optimasi ini banyak memberikan manfaat dalam mengambil keputusan dan dapat diterapkan dalam berbagai bidang ilmu baik ilmu teknik, ekonomi, kepolisian, politik, social dan lain sebagainya. Bentuk contoh penerapan ini diantaranya adalah dalam ilmu disain konstruksi sipil atau mesin, pemeliharaan jaringan, system kendali dan pengoperasian mesin listrik, penyaluran daya listrik dan lain sebagainya yang membutuhkan pengambilan keputusan yang tepat agar diperoleh pengeluaran biaya minimum dengan pemanfaatan yang paling maksimal (optimal). Dilain pihak bisa juga untuk mendapatkan keuntungan maksimal dengan biaya dan kerja atau pembuatan alat yang semurah dan se-efisien mungkin (optimal).

Banyak cara yang dapat dilakukan dalam menyelesaikan masalah untuk memberikan hasil terbaik. Cara untuk memberikan hasil terbaik ini disebut Sistem optimasi atau Teknik optimasi. System optimasi ini umumnya mengacu kepada teknik program matematika yang biasanya membahas atau mengacu kepada jalannya program penelusuran/penelitian (*research programming*) tentang masalah yang sedang dihadapi. Teknik ini diharapkan dapat memberikan solusi yang terbaik dari hasil keputusan yang telah diambil dari permasalahan yang sedang dihadapi tersebut.

**Teknik Optimasi** digunakan untuk memberikan hasil terbaik dari hal yang terburuk atau hal yang terbaik, tergantung masalah yang dihadapi. **Hasil Optimasi** mungkin Hasil tertinggi (misalnya keuntungan) atau Hasil Terendah (misalnya kerugian). **Optimasi Memerlukan** strategi yang bagus dalam mengambil keputusan agar diperoleh hasil yang optimum.

### 1.2 Pengambilan Keputusan dalam Sistem Optimasi

Inti dalam pengambilan keputusan mempunyai dasar antara lain:

1. Berarti **memilih alternatif**, yang jelas harus alternatif yang terbaik (*the best alternative*).
2. Terletak dalam **perumusan berbagai alternatif** tindakan sesuai dengan yang sedang dalam perhatian dan dalam pemilihan alternatif yang tepat, setelah suatu evaluasi/penilaian mengenai efektifitasnya dalam mencapai tujuan yang dikehendaki dalam mengambil keputusan.

Pola dasar pengambilan keputusan dalam sistem optimasi merupakan pengelompokan dalam konteks berpikir yang mencakup sebagai berikut.

1. Penilaian situasi (*Situational Approach*): untuk menghadapi pertanyaan “apa yang terjadi?”
2. Analisis persoalan (*Problem Analysis*): dari pola pikir sebab-akibat
3. Analisis keputusan (*Decision Analysis*): didasarkan pada pola berpikir mengambil pilihan
4. Analisis persoalan potensial (*Potential Problem Analysis*): didasarkan pada perhatian kita mengenai peristiwa masa depan, mengenai peristiwa yang mungkin terjadi dan yang dapat terjadi

Lingkungan situasi dalam mengambil keputusan dapat dipengaruhi oleh beberapa faktor, antara lain:

1. Lingkungan eksternal:
  - sosial
  - budaya
  - ekonomi
  - politik
  - alam
  - pembatasan-pembatasan (suatu negara berupa quota)
2. Lingkungan internal;
  - mutu barang rendah
  - kurangnya promosi
  - pelayanan konsumen tdk memuaskan
  - sales/agen tdk bergairah

Beberapa teknik yang biasa digunakan dalam mengambil keputusan dalam sistem optimasi diperlihatkan pada tabel 1.1

Tabel 1.1. Beberapa teknik pengambilan keputusan

Situasi keputusan	Pemecahan	Teknik
<b>Ada kepastian (<i>Certainty</i>):</b> Jika semua informasi yg diperlukan untuk membuat keputusan diketahui secara sempurna & tdk berubah	Deterministik	- Linear Programming - Model Transportasi - Model Penugasan - Model Inventori - Model Antrian - Model “ <i>network</i> ”
<b>Ada risiko (<i>Risk</i>) :</b> Jika informasi sempurna tidak tersedia, tetapi seluruh peristiwa yg akan terjadi beserta probabilitasnya diketahui	Probabilistik	- Model keputusan probabilistik - Model Inventori probabilistik - Model Antrian probabilistik
<b>Tidak ada kepastian (<i>Uncertainty</i>):</b> Jika seluruh informasi yg mungkin terjadi diketahui, tetapi tanpa mengetahui probabilitasnya masing-masing	Tidak diketahui	Analisis keputusan dlm keadaan ketidakpastian
<b>Ada konflik (<i>Conflict</i>):</b> Jika kepentingan dua/lebih pengambil keputusan berada dlm pertarungan aktif diantara kedua belah pihak	Tergantung tindakan lawan	Teori permainan ( <i>game theory</i> )

Tujuan analisis keputusan (*Decision Analysis*) yang dilakukan adalah: untuk mengidentifikasi apa yang harus dikerjakan, mengembangkan kriteria khusus untuk mencapai tujuan, mengevaluasi alternatif yang tersedia yang berhubungan dengan kriteria dan mengidentifikasi risiko yang melekat pada keputusan tersebut.

Untuk melaksanakan pengambilan keputusan dalam suasana risk (dengan probabilitas) maka dapat dilakukan dengan tahapan-tahapan sebagai berikut..

1. Diawali dengan mengidentifikasi bermacam-macam tindakan yang tersedia dan layak
2. Peristiwa-peristiwa yang mungkin dan probabilitas terjadinya harus dapat diduga
3. Pay off untuk suatu tindakan dan peristiwa tertentu ditentukan

Dalam melakukan pengambilan keputusan dalam ketidakpastian (*uncertainty*) menunjukkan suasana keputusan dimana probabilitas hasil-hasil potensial tidak diketahui (tak diperkirakan). Dalam suasana ketidakpastian, pengambil keputusan sadar akan hasil-hasil alternatif dalam bermacam-macam peristiwa, namun pengambil keputusan tidak dapat menetapkan probabilitas peristiwa.

Dalam melakukan pengambilan keputusan dalam suasana konflik (*game theory*), maka adalah memusatkan analisis keputusan dalam suasana konflik tersebut dimana pengambil keputusan menghadapi berbagai peristiwa yang aktif untuk bersaing dengan pengambil keputusan lainnya, yang rasional, tanggap dan bertujuan memenangkan persaingan/kompetisi.

Jika dilakukan analisis Markov dalam mengambil keputusan, maka sebenarnya analisis ini tidak memberikan keputusan rekomendasi, tetapi memberikan informasi probabilitas situasi keputusan yang dapat membantu pengambil keputusan untuk membuat keputusannya. Dengan kata lain bahwa analisis Markov bukan merupakan teknik optimasi, tetapi merupakan teknik deskriptif yang menghasilkan informasi probabilitas. Analisa Markov ini mempunyai asumsi-asumsi sebagai berikut.

1. Probabilitas baris berjumlah sama dengan 0
2. Probabilitas berlaku bagi setiap siapa saja dalam system
3. Probabilitas konstan sepanjang waktu
4. Merupakan kejadian-kejadian yang berdiri sendiri (independen)

Teknik dalam penyelesaian sistem optimasi secara garis besar dapat dibagi dalam 3 yaitu:

1. Teknik pemrograman matematika
2. Teknik proses Stokastik
3. Metode Statistik

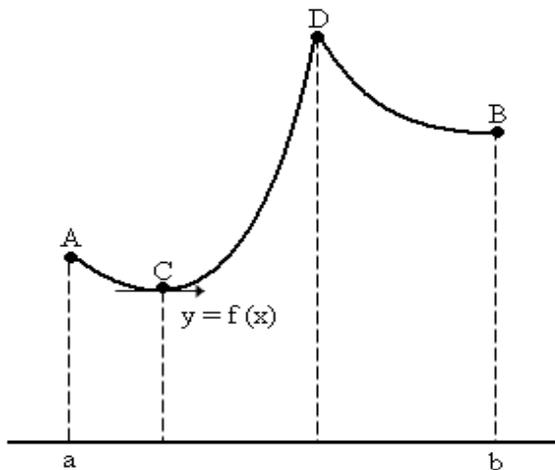
Penyelesaian suatu permasalahan optimasi akan lebih mudah bila masalah ini dirubah dalam bentuk persamaan matematika dan kemudian diselesaikan dengan menggunakan teknik pemrograman matematika.

### 1.3 Bentuk Fungsi Non Linear dalam Sistem Optimasi

Suatu fungsi akan mempunyai daerah definisi (domain) dari bawaan fungsinya, atau dari batasan masalah yang dimodelkan. Dalam pembicaraan ekstrem, daerah definisi ini disebut daerah fisibel.

Theorema 1 : Bila fungsi ( $f$ ) kontinu dalam selang tertutup ( $S$ ) maka ( $f$ ) tentu mempunyai maksimum dan minimum dalam  $S$ .

Dalam selang tertutup  $S$  ada tiga jenis ekstrem ( $f$ ) yang mungkin terjadi, ialah (lihat gambar.1 dengan  $S = [a,b]$ ) :



1. Ekstrem kritis (stasioner di C)
2. Ekstrem batas yang terjadi pada batas selang (di A dan B)
3. Ekstrem di titik dengan  $f(x)$  diskontinu (di D)

Gambar 1.1 Fungsi satu peubah  $f(x)$

Untuk seterusnya ekstrem yang ketiga tidak dibicarakan. Untuk jenis ke-1, bila  $x = x_0$  , di penuhi  $f'(x_0) = 0$ , maka bila :

$f''(x_0) > 0$  maka  $f(x)$  mencapai minimum di  $x = x_0$

$f''(x_0) < 0$  maka  $f(x)$  mencapai maksimum di  $x = x_0$

$f''(x_0) = 0$  maka  $f(x)$  belum menentu di  $x = x_0$

Dalam terapan penyelidikan maksimum atau minimumnya, ekstrem tidak selalu diperlukan karena sudah jelas dari masalah nyatanya, sehingga yang diperlukan hanyalah mencari  $x_0$  yang memenuhi syarat perlu  $f'(x_0) = 0$ .

Dibedakan adanya ekstrem lokal (*relatif*) bila hanya berlaku untuk suatu sekitaran  $x_0$ , dengan ekstrem global (*absolut*) yang berlaku untuk seluruh daerah fisibel. Dalam gambar 1, C adalah titik minimum lokal dan global sedangkan B adalah minimum lokal.

Theorema 2 : Fungsi  $f(x)$  yang terdiferensial dalam daerah fisibel  $S$  akan memenuhi ;

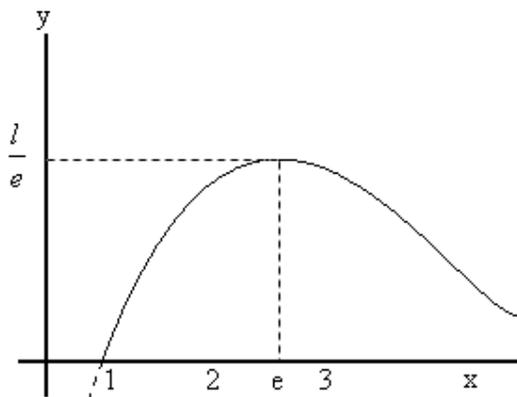
1. mungkin tidak mempunyai ekstrem.

2. mungkin mempunyai ekstrem kritis.
3. mungkin mempunyai ekstrem batas di titik batas yang termasuk dalam S.

Penyelesaian ekstrem ini tidak selalu mudah ditemukan, sebab mencari titik kritis berarti mencari akar persamaan  $f'(x) = 0$ . Bila untung, dapat ditemukan jawaban analisisnya yang tepat, bila tidak, terpaksa ditempuh metode penghampiran secara numeris.

**Contoh 1.1 :**

Dalam suatu laba produksi, laba ( $y$ ) merupakan fungsi besar produksi ( $x$ ) dengan



Gambar 1.2 Fungsi produksi

rumus yang mendekati  $y = \frac{\ln x}{x}$ . Berapa

besar produksi supaya laba maksimum?

**Jawaban contoh 1.1 :**

Dari  $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$  dan  $y'' = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$

diperoleh satu-satunya titik kritis ialah di  $x = e$  dan ini memberi maksimum kepada  $y$ , karena pada  $x = e$ ,  $y'' < 0$ . Titik

maksimumnya adalah  $\left( e, \frac{1}{e} \right)$ .

Untuk fungsi dari  $n$  perubah,  $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  berlaku theorema yang sama seperti yang telah di bahas.

**Theorema 3 :** Bila fungsi  $f$  kontinu dalam daerah fisibelnya ( $S$ ) yang terbatas dan memuat semua titik batasnya (tertutup), maka pasti terdapat maksimum dan minimum dalam  $S$ .

**Theorema 4 :** Bila semua derivatif parsial  $f$  ada dalam  $S$ , maka ekstremnya mungkin :

1. tidak ada.
2. terjadi di titik kritis di mana  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \forall i$ .
3. terjadi di titik batas  $S$  yang menjadi anggota  $S$ .

Untuk fungsi dengan dua perubah  $z = f(x, y)$ , syarat perlu dan cukupnya seperti berikut :

$$1. \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (\text{syarat kritis}) \quad (1.1)$$

$$2. H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} > 0 \quad (1.2)$$

yang mana: H = disebut batasan matriks Hessian (Burder Hessian).

Bila (1.1) dan (1.2) dipenuhi, akan terjadi ekstrem, maka :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0, \text{ ekstremnya minimum.} \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0, \text{ ekstremnya maksimum.} \quad (1.4)$$

Untuk titik yang memenuhi (1.1) tetapi,

$H < 0$ , titik kritis bukan titik ekstrem.

$H = 0$ , belum ada ketentuan.

### **Contoh 1.2 :**

Suatu kotak tertutup berbentuk balok dibuat dari bahan tertentu dan harus dapat diisi dengan volume tertentu sebesar V. Ditanyakan bagaimana ukuran kotak yang paling menghemat bahan. Disini dianggap bahwa tebal bahan diabaikan, sehingga meminimumkan bahan berarti meminimumkan luas kotak.

### **Jawaban contoh 1.2 :**

Misalkan p = panjang ; l = lebar ; t = tinggi, sehingga sasaran yang diminimalkan adalah :Luas  $L = 2(pl + pt + lt)$  dengan kendala berbentuk  $plt \geq V$ . Tetapi bila  $plt = V$  secara teknis dapat dilaksanakan, maka  $plt > V$  jelas tidak akan dipilih orang karena kalah hemat dengan  $plt = V$ , sehingga kendala berubah menjadi  $plt = V$ .

Misalnya ' t ' dieliminasi dengan substitusi  $t = \frac{V}{pl}$  ke dalam fungsi sasaran, sehingga

soal menjadi mencari p, l yang meminimalkan

$$L = 2 \left( pl + \frac{V}{l} + \frac{V}{p} \right)$$

Kendala yang ada adalah kendala tak negatif  $p \geq 0$  ;  $l \geq 0$ . Dengan mengujikan syarat perlu dan cukup, maka diperoleh  $p$  dan  $l$  penyebab  $L$  minimum sebesar  $p = l = \sqrt[3]{V}$  , sehingga

$t = \sqrt[3]{V}$  . Jadi kesimpulannya agar bahan kotak sehemat mungkin, kotak harus berbentuk kubus dengan rusuk  $\sqrt[3]{V}$  .

Dalam menyelesaikan masalah optimisasi, maka bentuk umum penyelesaian sistem optimasi ini dapat dibedakan sebagai berikut :

1. Tanpa kendala : menentukan nilai optimal (ekstrem)  $z = f(x_j)$  ;  
 $j = 1,2,3,\dots,n$ .
2. Dengan kendala :
  - a. berbentuk persamaan, menentukan ekstrem:  $z = f(x_j)$  ,  $j = 1,2,3,\dots,n$ .
  - b. berbentuk pertidaksamaan, menentukan ekstrem :  $z = f(x_j)$  ,  $j = 1,2,3,\dots,n$ .

**catatan :**

untuk (a) dengan syarat  $g_i x_j = 0$   $i = 1,2,3,\dots,m$ .

untuk (b) dengan syarat  $g_i x_j \leq 0$   $i = 1,2,3,\dots,m$ .

Fungsi  $z = f(x, y)$  yang dioptimalkan disebut fungsi sasaran. Nilai  $(x_j)$  yang memenuhi semua kendala disebut penyelesaian fisibel (PF), sedangkan penyelesaian fisibel yang mengoptimalkan fungsi sasaran **disebut penyelesaian optimal (PO)**. Dengan adanya berbagai macam bentuk fungsi  $f$  maupun  $g_i$  timbulah tipe-tipe optimisasi yang berbeda-beda dengan algoritma yang berbeda pula. Macam-macam bentuk fungsi itu dijabarkan sebagai berikut di bawah ini.

**a) Fungsi tanpa kendala**

**Sistem optimasi tanpa kendala** mempunyai bentuk umum  $f(x)$ , yang mana  $f(x)$  adalah fungsi skalar yang didefinisikan pada ruang vektor  $\underline{x} \in R^n$  . Penyelesaian dari persoalan diatas dapat dicari dengan cara menggunakan Batasan Determinan Hessian (Burder Hessian) dengan hasil::

**$H > 0$  (Minimum)**

**$H = 0$  (Tidak ada)**

**$H < 0$  (Maksimum)**

**Artinya adalah:** bila  $H(x^*)$  adalah positif definitif maka  $x^*$  yang memenuhi syarat  $\nabla f(x^*) = 0$  adalah di titik minimum, dan bila  $H(x^*)$  adalah negatif definitif, maka titik ini adalah maksimum

Bentuk umum fungsi tanpa kendala ini biasanya adalah:

$$\pi = f(Q_1, Q_2) \quad (1.5)$$

Dari fungsi ini didapat :

- Variabel  $Q_1$  dan  $Q_2$  independen (tidak saling tergantung)
- Besaran  $Q_1$  dan  $Q_2$  tidak ada pembatas
- Titik optimum fungsi adalah titik "Optimum Bebas" dengan  $\pi =$  nilai suatu fungsi

Titik optimum bebasnya akan dicapai diwaktu turunan pertama  $\pi' = 0$  untuk setiap variabel  $Q_1$  dan  $Q_2$

### **Contoh 1.3**

Suatu fungsi non linier .  $\pi = 12Q_1 + 18Q_2 - 2Q_1^2 - Q_1 \cdot Q_2 - 2Q_2^2$

Berapa nilai  $Q_1$  dan  $Q_2$  agar fungsi ini optimum ?

### **Jawaban contoh 1.3**

Turunan pertama dari fungsi = 0,

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 0 \rightarrow 12 - 4Q_1 - Q_2 = 0.$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = 0 \rightarrow 18 - Q_1 - 4Q_2 = 0.$$

Dari kedua turunan di atas, maka diperoleh hasil  $Q_1 = 2$  dan  $Q_2 = 4$ .

### **b) Fungsi berkendala**

Fungsi berkendala ini mempunyai bentuk umum :

Min atau Mak  $f(x)$ , dengan syarat (st):

$h_i(x) = 0$ ;  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  (kendala)

[st : subject to ( dengan syarat )  $\rightarrow$  kendala]

**Contoh 1.4**

$$\begin{aligned} \text{Min } & 3x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 - 6x_1 - 8x_2 + 6 \\ \text{s.t } & x_1 + x_2 = 1 \end{aligned}$$

**Contoh 1.5**

Untuk memaksimum produksi (Isoquant sebagai Fungsi Tujuan) :

$$\bar{Q} = f(X_1, X_2)$$

Menghadapi kendala terbatasnya biaya (Iso-cost sebagai persamaan pembatas):

$$\bar{P}_{X_1}.X_1 + \bar{P}_{X_2}.X_2 = \bar{M}$$

Dengan adanya kendala-kendala tersebut, maka:

- (1). Variabel bebas ( $X_1$  dan  $X_2$ ) saling tergantung, bila  $X_1$  naik, maka  $X_2$  turun dan sebaliknya;
- (2) Titik optimum fungsi disebut “Titik Optimum Terkendala”

#### 1.4 Cara Menentukan Nilai Optimum dari Fungsi Berkendala

Ada beberapa cara dalam menentukan nilai optimum dari sistem optimasi ini di antaranya adalah:

- (1). Metode Substitusi/ Eliminasi;
- (2). Metode Diferensial Total;
- (3). Metode Pengali Lagrange.

Untuk lebih memperjelas penggunaan ketiga cara di atas sebaiknya dibuatkan contoh soal yang diselesaikan oleh ketiga persamaan di atas.

##### **Contoh 1.6**

Suatu fungsi utilitas / fungsi tujuan mempunyai persamaan

$$U = Q1.Q2 + 2Q1 \quad (1.6)$$

dengan fungsi kendala:

$$4Q1 + 2Q2 = 60 \quad (1.7)$$

Tentukanlah nilai U, Q1, dan Q2 yang optimum dari persamaan tersebut dengan menggunakan cara:

- (a). Metode Substitusi/ Eliminasi
- (b). Metode Diferensial Total
- (c). Metode Pengali Lagrange
- (d). Tentukan apakah nilainya maksimum atau minimum.

##### **Jawaban contoh 1.6**

###### **a) Metode Substitusi**

dari persamaan (1.7) akan diperoleh:

$$2Q2 = -4Q1 + 60$$

$$Q2 = -2Q1 + 30 \quad (1.8)$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (1.8) ke persamaan (1.6), sehingga diperoleh:

$$U = Q1 (-2Q1 + 30) + 2Q1$$

$$U = -2Q1^2 + 30Q1 + 2Q1$$

$$U = -2Q1^2 + 32 Q1 \quad (1.9)$$

Kemudian, jadikan turunan pertama dari 'U' pada pers (1.9) = 0

$$dU/dQ1 = -4Q1 + 32 = 0$$

$$-4Q_1 + 32 = 0$$

$$Q_1 = 8$$

Selanjutnya, masukan nilai  $Q_1$  ke persamaan (1.7) sehingga diperoleh:

$$Q_2 = -2Q_1 + 30$$

$$Q_2 = 14.$$

Kemudian masukan nilai  $Q_1$  dan  $Q_2$  ini ke persamaan fungsi tujuan sehingga diperoleh hasil:

$$\begin{aligned} U &= Q_1 \cdot Q_2 + 2Q_1 \\ &= (8 \times 14) + (2 \times 8) \end{aligned}$$

$$U = 128$$

### b) Metode Diferensial Total

Kondisi optimum dicapai pada saat:

$$MU_1/PQ_1 = MU_2/PQ_2 \quad (1.10)$$

Dengan:

$$U = Q_1 \cdot Q_2 + 2Q_1 \text{ (dari pers. 1.6)}$$

Maka dari contoh soal di atas diperoleh hasil:

$$MU_1 = dU/dQ_1 = f_1 = Q_2 + 2$$

$$MU_2 = dU/dQ_2 = f_2 = Q_1$$

Dengan persamaan kendala :  $4Q_1 + 2Q_2 = 60$  (dari pers 1.7), maka diperoleh:

$PQ_1 = 4$  dan  $PQ_2 = 2$ , dengan:

\*  $PQ_1$  = harga  $Q_1$  pada persamaan kendala

\*  $PQ_2$  = harga  $Q_2$  pada persamaan kendala

Dengan menggunakan variabel di atas dan mengacu ke persamaan (1.10), maka diperoleh hasil:

$$(Q_2 + 2)/4 = (Q_1)/2$$

$$2Q_2 + 4 = 4Q_1$$

$$Q_1 = \frac{1}{2} Q_2 + 1 \quad (1.11)$$

Kemudian substitusikan persamaan (1.11) ke persamaan (1.7), maka diperoleh hasil

$$4(\frac{1}{2} Q_2 + 1) + 2Q_2 = 60$$

$$4Q_2 = 56$$

$$Q_2 = 14$$

Substitusikan Q2 ini ke persamaan (1.11), maka diperoleh:

$$Q1 = \frac{1}{2} (14) + 1$$

$$\mathbf{Q1 = 8}$$

Selanjutnya akan diperoleh hasil fungsi tujuan (dari persamaan 1.6):

$$\begin{aligned} U &= Q1.Q2 + 2Q1 \\ &= (8 \times 14) + (2 \times 8) \end{aligned}$$

$$\mathbf{U = 128}$$

**c) Metode Pengali Lagrange**

Dari persamaan kendala:  $4Q_1 + 2Q_2 = 60$  (dari pers 1.7) dengan fungsi tujuan:

$$U = Q_1 \cdot Q_2 + 2Q_1 \text{ (dari pers. 1.6)}$$

Maka fungsi lagrange menjadi:

$$U = Q_1 \cdot Q_2 + 2Q_1 + \lambda (60 - 4Q_1 - 2Q_2)$$

$$U = Q_1 \cdot Q_2 + 2Q_1 + 60\lambda - 4Q_1 \cdot \lambda - 2Q_2 \cdot \lambda$$

Bila turunan pertama fungsi = 0, maka:

$$dU/dQ_1 = f_1 = Q_2 + 2 - 4\lambda = 0 \tag{1.12}$$

$$dU/dQ_2 = f_2 = Q_1 - 2\lambda = 0 \tag{1.13}$$

$$dU/d\lambda = f_\lambda = 60 - 4Q_1 - 2Q_2 = 0 \tag{1.14}$$

Substitusikan persamaan (1.12) ke persamaan (1.13) :

$$dU/dQ_1 = Q_2 + 2 - 4\lambda = 0 \dots\dots(\text{kali 1})$$

$$dU/dQ_2 = Q_1 - 2\lambda = 0 \dots\dots(\text{kali 2})$$

Jadi :

$$Q_2 + 2 - 4\lambda = 0 \tag{1.15}$$

$$2Q_1 - 4\lambda = 0 \tag{1.16}$$

Jadi dari hasil pers (1.16) ke pers (1.15) diperoleh:

$$Q_2 + 2 - 2Q_1 = 0$$

$$Q_2 = 2Q_1 - 2 \tag{1.17}$$

Kemudian substitusikan persamaan (1.17) ke persamaan (1.14):

$$dU/d\lambda = 60 - 4Q_1 - 2Q_2 = 0 \dots \text{(dari pers 1.14)}$$

Jadi:

$$60 - 4Q_1 - 2(2Q_1 - 2) = 0$$

$$60 - 8Q_1 + 4 = 0$$

$$\mathbf{Q_1 = 8}$$

Selanjutnya masukan nilai Q1 ke persamaan (1.14)

$$60 - 4(8) - 2Q_2 = 0$$

$$28 - 2Q_2 = 0$$

$$\mathbf{Q_2 = 14}$$

Selanjutnya:

$$U = Q_1 \cdot Q_2 + 2Q_1$$

$$= (8 \times 14) + (2 \times 8) = \mathbf{128}$$

**(d) Menentukan nilai optimum fungsi**

Cara menentukan nilai fungsi optimum dapat digunakan Batasan Determinan Hessian (Burder Hessian) dengan uraian seperti berikut.

$$H = \begin{bmatrix} 0 & g1 & g2 \\ g1 & f11 & f12 \\ g2 & f21 & f22 \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

dengan ketentuan:

apabila:  $H > 0$  (nilai optimum = Maksimum)

$H = 0$  (Tidak ada)

$H < 0$  (nilai optimum = Minimum)

Bila dilihat dari persoalan sebelumnya dengan persamaan kendala  $4Q1 + 2Q2 = 60$  (dari pers 1.7) dan fungsi tujuan  $U = Q1.Q2 + 2Q1$  (dari pers. 1.6), maka fungsi lagrange menjadi:

$$U = Q1.Q2 + 2Q1 + \lambda (60 - 4Q1 - 2Q2)$$

$$U = Q1.Q2 + 2Q1 + 60\lambda - 4Q1.\lambda - 2Q2.\lambda$$

Bila turunan pertama fungsi = 0, maka:

$$dU/dQ1 = f1 = Q2 + 2 - 4\lambda = 0 \text{ (dari persamaan (1.12))}$$

$$dU/dQ2 = f2 = Q1 - 2\lambda = 0 \text{ (dari persamaan (1.13))}$$

$$dU/d\lambda = f\lambda = 60 - 4Q1 - 2Q2 = 0 \text{ (dari persamaan (1.14))}$$

Selanjutnya diperoleh turunan kedua (Turunan dari f1 dan f2) sebagai berikut.

$$df1/dQ1 = f11 = 0 \quad (1.19)$$

$$df1/dQ2 = f12 = 1 \quad (1.20)$$

$$df2/dQ1 = f21 = 1 \quad (1.21)$$

$$df2/dQ2 = f22 = 0 \quad (1.22)$$

Kemudian:  $PQ1 = g1 = 4$  dan  $PQ2 = g2 = 2$ . Dengan memasukan data-data ini ke matrik Hessian, maka diperoleh hasil:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ dan besarnya determinan dari nilai matrik ini adalah:}$$

$$H = 0.0.0 + 4.1.2 + 2.4.1 - (2.0.2) - (1.1.0) - (0.4.4) = 16$$

Dari hasil ini diperoleh bahwa  $H = 16 > 0$ , berarti nilai fungsi adalah **Optimum Maksimum**