BAB III
LINEAR PROGRAMING DAN PEMECAHAN DENGAN GRAFIK

3.1 Persoalan Linear Programing

Beberapa contoh persoalan linear programing yang berhubungan dengan masalah optimasi dapat saja terjadi seperti contoh-contoh berikut ini.

Untuk keperluan pembangunan, pemerintah memerlukan barang-barang modal yang harus diimpor dengan menggunakan devisa. Devisa diperoleh melalui ekspor, khususnya barang-barang pertanian. Agar diperoleh jumlah devisa yang maksimum, di dalamnya perlu menentukan produksi barang-barang ekspor tersebut. Pemerintah menghadapi beberapa pembatasan misalnya tersedianya tanah yang cocok untuk menanam sejenis tanaman ekspor tertentu, tersedianya bibit, tersedianya pupuk, tersedianya air, tersedianya tenaga kerja, besarnya permintaan barang ekspor tersebut, dan sebagainya.

Pemilik perusahaan yang mempunyai beberapa jenis bahan mentah ingin menentukan besarnya produksi dari beberapa jenis barang agar supaya diperoleh suatu hasil penjualan yang maksimum. Di dalam memproduksi barang-barang tersebut pemilik perusahaan dihadapkan kepada tersedianya bahan mentah yang terbatas, waktu penggunaan mesin yang terbatas, ruang gudang untuk menyimpan barang yang terbatas serta pembatasan-pembatasan lainnya.

Direktur pemasaran suatu perusahaan akan mengangkut suatu jenis barang tertentu (minyak, bahan isolasi kabel listrik, tembaga untuk pembuatan kawat listrik, pupuk, semen, beras, telur, dan lain sebagainya) dari beberapa tempat asal (pabrik, pusat produksi) kebeberapa tempat tujuan (pasar,tempat proyek, dan lain sebagainya). Didalam mengangkut barang tersebut harus diatur sedemikian rupa sehingga jumlah biaya transportasi minimum dengan memperhatikan bahwa suplai barang tersebut dari setiap tempat asal terbatas, sedangkan permintaan barang dari setiap tempat tujuan harus memenuhi sejumlah tertentu.

Tiga contoh persoalan tersebut diatas yaitu memperoleh jumlah devisa yang maksimum, jumlah hasil penjualan yang maksimum dan jumlah biaya pengangkutan yang minimum dengan memperhatikan batasan-batasan yang ada disebut persoalan optimasi (optimation problems).

Pada dasarnya persoalan optimasi adalah suatu persoalan untuk membuat nilai suatu fungsi beberapa variabel menjadi maksimum atau minimum dengan memperhatikan pembatasab-pembatasan yang ada. Biasanya pembatasan-pembatasan tersebut meliputi tenagakerja (men), uang (money) material yang merupakan input serta waktu dan ruang.

Persoalan programming, pada dasarnya berkenaan dengan penentuan alokasi yang optimal dari padasumber-sumber yang langka (limited resources) untuk memenuhi suatu tujuan (objektive). Misalnya bagaimana mengkombinasikan beberapa sumber yang serba terbatas seperti tenaga kerja, material, mesin, tanah, pupuk, air sehingga diperoleh output yang maksimum.

Persoalan Linear Programing (L.P) ialah suatu persoalan untuk menentukan besarnya masing-masing nilai variabel sedemikian rupa sehingga (s.r.s) nilai fungsi tujuan atau objektife (objektife fungtion) yang linear menjadi optimum (maksimum atau minimum) dengan memperhatikan pembatasan-pembatasan yang ada yitu pembatasan mengenai inputnya, Pembatasan-pembatasan ini pun harus dinyatakan dalam pertidak samaan yang linear (linear inequalities). Untuk mudahnya perhatikan contoh berikut :

Contoh 3.1

Pemilik perusahaan mempunyai dua macam bahan mentah, Katakan bahan mentah I (misalnya PVC untuk kabel listrik) dan II (tembaga untuk kawat listrik) yang masing-masing tersedia sebesar 60 da 48 satuan (kg, m, l, ton, dan lain sebagainya). Dari dua bahan mentah tersebut akan diproduksi 2 macam barang yaitu barang A (kabel NYY) dan barang B (kabel NYM). Baik barang A maupun barang B memerlukan bahan mentah I dan II sebagai inputnya. Perincian bahan mentah adalah sbb:

1 Satuan barang A memerlukan 4 satuan bahan I dan 2 satuan bahan II. 1 satuan barang B memerlukan 3 satuan bahan I dan 5 satuan bahan II. Apabila barang A dan B dijual, satu satuan barang A laku 8 ribu sedangkan Blaku 6 ribu. Berapa besarnya produksi barang A dan B agar seluruh hasil penjualan maksimum dengan memperhatikan

pembatasan bahwa penggunaan bahan I dan II tidak boleh melebihi 60 satuan dan 48 satuan (semua barang laku dijual).

Penyelesaian :

Misalnya banyak nya barang A dan B masing-masing x_1 dan x_2. Maka:

Tabel 3.1 Kasus maksimumkan keuntungan penjualan dengan barang terbatas

Bahan mentah (untuk produksi)	**Jenis produksi (bahan produksi)**		**Banyaknya bahan yang tersedia**
	A (X_1)	**B (X_2)**	
I (PVC)	4 X_1	3 X_2	60
II (tembaga)	2 X_1	5 X_2	48
	8000	6000	Hasil penjualan perbarang (laku)

Dari tabel 3.1 diperoleh persamaan dari x_1 dan x_2 sebagai berikut.

$$\text{s.r.s} : Z = 8000\,x_1 + 6000\,x_2 = \text{maksimum} \qquad (3.1)$$

$$\text{d.p} : 4x_1 + 3x_2 \leq 60 \qquad (3.2)$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 48$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

Keterangan :

$z = f(x_1,x_2) = 8000x_1 + 6000x_2$ = fungsi tujuan (objektife) yang linear.

s.r.s = sedemikian rupa sehingga

d.p = dengan pembatasan (konstren)

1 satuan barang A, laku Rp 8 ribu ⟶ x_1 satuan laku $8000x_1$

1 satuan barang B, laku Rp 6 ribu ⟶ x_2 satuan laku $6000x_2$

Jumlah penerimaan hasil penjualan = $z = 8000x_1 + 6000x_2$, harus maksimum.

1 satuan A memerlukan 4 satuan bahan I ⟶ x_1 satuan = $4x_1$

1 satuan B memerlukan 3 satuan bahan I ⟶ x_2 satuan = $3x_2$

Jumlah bahan mentah I yang diperlukan = $4x_1 + 3x_2$ (hanya tersedia sebanyak 60 satuan).

1 satuan A memerlukan 4 satuan bahan II ⟶ x_1 satuan = $2x_1$

1 satuan B memerlukan 5 satuan bahan II $\longrightarrow$ x_2 satuan = $5x_2$

Jumlah bahan mentah II yang diperlukan = $2x_1 + 5x_2$ (hanya tersedia sebanyak 48 satuan).

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, artinya x_1 dan x_2 tidak boleh mengambil nilai negatif, paling kecil 0. Syarat ini disebut "non negativity constraint" juga merupakan pembatasan (limitation) yang harus diperhatikan didalam pemecahan Linear Programing apabila memenuhi hal-hal berikut :

1. Tujuan (objektife) yang akan dicapai harus dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi linear. Fungsi ini disebut fungsi tujuan (objective function).
2. Harus ada alternative pemecahan. Pemecahan yang membuat nilai fungsi tujuan optimum (laba yang maksimum, biaya yang minimum, dan sebagainya) yang harus dipilih.
3. Sumber-sumber tersedia dalam jumlah yang terbatas (bahan mentah yang terbatas, modal terbatas, ruangan untuk penyimpanan barang yang terbatas, dan lain sebagainya). Pembatasan-pembatasan harus dinyatakan didalam pertidak samaan yang linear (linear inequality).

Pada dasarnya secara umum persoalan L.P dapat dirumuskan sebagai berikut :

Cari : $x_1, x_2, \ldots, xj, \ldots, xn$

s.r.s $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + cjxj + \ldots + cnxn$ = optimum.(maksimum atau minimum).

d.p. = $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n <=> h_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n <=> h_2$

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n <=> h_i$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n <=> h_m$

$xj \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Keterangan :

Ada n macam barang yang akan diproduksi masing-masing sebesar $x_1, x_2, \ldots, xj, \ldots, xn$.

Xj = banyaknya produksi barang yang ke j, $j = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Cj = harga persatuan barang ke j , disebut "price".

Ada m macam bahan mentah, masing-masing tersedia $h_1, h_2, h_3, \ldots, h_i, .. h_m$.

h_i = banyaknya bahan mentah ke i, i = 1, 2, … , m.

a_{ij} = banyaknya bahan mentah ke i yang dipergunakan untuk memproduksi 1 satuan barang ke j. x_j unit memerlukan aijxj unit bahan mentah i.

Interprestasi mengenai a_{ij}, c_j dan h_i sangat tergantung kepada interpretasi daripada x_j

Persoalan Linear Programing dapat terjadi di kalangan pemerintahan, perusahaan, militer dsb. Suatu keputusan adalah suatu pemilihan terhadap alternative-alternatif. Linear Programing membantu pembuat keputusan (decision maker) untuk memilih suatu alternative yang paling baik.

3.2 Penyelesaian Persoalan Linear Programing

Contoh kriteria penyelesaian persoalan linerar programming ini akan dijelaskan lebih lanjut sebagai berikut.

Salah satu interpretasi yang dapat diberikan kepada persoalan Linear Programing yaitu adalah persoalan **maksimisasi keuntungan di dalam batasan**. Ini berarti bahwa fungsi tujuan itu adalah fungsi keuntungan (profit fungtion) yang secara umum dapat dituliskan sebagai :

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots\ldots + c_j x_j + \ldots\ldots + c_n x_m$$

Dimana xj, j = 1,2,…., n. menunjukan banyaknya barang yang dihasilkan. Disini kita memisalkan, bahwa perusahaan yang bersangkutan mempunyai n^2 aktifitas, yaitu menghasilkan m macam barang. Interpretasi yang dapat diberikan kepada cj, j = 1, 2, …. , n ialah sebagai keuntungan yang diperoleh dari penghasilan satu barang ke j atau keuntungan yang diperoleh jika tingkat aktifitas ke j = 1 satuan. Disini sellau dianggap bahwa setiap tambahan satu dari setiap aktifitas menghasilkan keuntungan (atau tambahan keuntungan) yang sama. Di dalam hal persoalan ini dianggap sebagai persoalan maksimasi penerimaan maka interpretasi yang diberikan kepada cj itu adalah harga penjualan satu satuan output ke j, j = 1, 2, ...,n

Untuk mempermudah pemberian interpretasi kepada pertidaksamaan itu, marilah kita tuliskan lagi susunan batasan itu selengkapnya, yaitu :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots.. + a_{1j}x_j + \ldots\ldots.. + a_{1n}x_n \leq h_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots.. + a_{2j}x_j + \ldots\ldots.. + a_{2n}x_n \leq h_2$$

$$a_{i1}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots.. + a_{ij}x_j + \ldots\ldots.. + a_{in}x_n \leq h_i$$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{mj}x_j + \ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n \leq h_m$

Oleh karena x_1, x_2, ……, x_n telah menunjukan output yang dihasilkan maka interpretasi yang dapat diberikan kepada aij tidak boleh sembarangan lagi. Salah satu interpretasi yang mungkin diberikan pada aij ialah adalah banyaknya input ke i yang diperlukan untuk menghasilkan satu-satuan barang ke j Jadi ini berarti bahwa hi adalah banyaknya input ke i yang tersedia. Batasan diatas dapatlah diartikan sebagai abates input yang tersedia bagi perusahaan itu. Sudahlah jelas bahwa jika input ke i yang tersedia hanya sebanyak h_1 saja, maka pemakaian input itu tidak boleh melebihi hi. Pemakaian input ke i untuk menghasilkan x1 satuan barang pertama adalah ai1x1, pemakaian input ke i untuk menghasilkan sebanyak x_2 satuan barang ke 2 adalah $a_{12}x_2$, ….., dan pemakaian input ke i untuk menghasilkan output ke n adalah sebanyak ainxn. Pemakaian input ke-i untuk seluruh aktifitas adalah sama dengan :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots. + a_{ij}x_j + \ldots. + a_{in}x_n.$$

Jadi batasan input ke-i yaitu batasan bahwa perusahaan itu tidak dapat memakai input ke-i lebih dari jumlah yang tersedia, yaitu h_i, dapat dituliskan sebagai berikut:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots. + a_{ij}x_j + \ldots. + a_{in}x_n \leq h_i$$

Yang berlaku untuk i = 2,…., m. Dengan demikian arti dari persoalan diatas , yaitu bahwa yang menjadi persoalan ialah maksimasi keuntungan dalam input.

Interpretasi kedua yang dapat diberikan kepada persoalan diatas ini ialah persoalan maksimasi penerimaan (revenue) ini dalam batasan. Ini berarti bahwa fungsi tujuan z dapat dianggap sebagai fungsi revenue yang hendak dimaksimumkan itu. Memakai interpretasi seperti ini, x_j, j = 1, 2, …., n, masih tetap menunjukan aktifitas berupa banyaknya barang yang dihasilkan atau dijual. Jika c_j menunjukan harga penjualan barang ke j, maka $c_j x_j$ adalah revenue yang diperoleh dari penjualan barang ke j (sebanyak x_i satuan) dan $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots + c_1x_1 + \ldots\ldots. + c_nx_n$ adalah jumlah seluruh revenue (total revenue). Inilah revenue yang hendak dimaksimumkan itu. Dengan memakai interpretasi yang kedua ini, kita tidaklah perlu merubah interpretasi yang diberikan kepada batasan-batasan diatas. Jadi walaupun fungsi tujuan telah diubah menjadi fungsi revenue, ketidak samaan-ketidaksamaan masih tetap dapat ditafsirkan sebagai batasan input.

Di dalam kedua macam tafsiran diatas ini, kita telah memisahkan bahwa suatu perusahaan menghasilkan atau memperdagangkan n macam barang. Untuk meghasilkan

atau memperdagangkan barang-barang tersebut barang-barang tersebut perusahaan tersebut memakai m macam input, yang masing-masing berjumlah terbatas. Jadi kedua persoalan itu adalah mencari nilai=nilai x (tingkat-tingkat aktifitas) yang mana arus diambil untuk memaksiimumkan keuntungan atau penerimaan itu.

Contoh 3.2

Misalnya suatu perusahaan merencanakan akan memasang advertensi (iklan) didalam majalah, televisi dan radio. Yang menjadi tujuan dari perusahaan itu ialah bagaimana memilih beberapa diantara ketiga cara beradvertensi itu, jika memang harus dipilih dan sampai dimana tingkatnya sehingga biaya minimum yang mencapai 30 juta langganan (pembeli) potensial yang dari barang yang diadvertensikan, diantara terdapat sebanyak 25 juta orang mempunyai pendapatan $ 5000 setahun sedikit-dikitnya. Biaya memuat advertensi di dalam sebuah majalah adalah $ 28.000, dalam acara televisi $ 400.000, didalam acara radio $ 20.000,- Pembaca yang dicapai oleh amjalah adalah sebanyak 1 juta orang setiap terbit, penonton televisi adalah sebanyak 9 juta orang, sedangkan pendengar radio adalah 0.8 juta orang. Diantara 1 juta pembaca majalah tadi terdapat 0,6 juta orang dengan pendapatan melebihi $ 5.000 se tahun. Diantara pendengar radio sebanyak 0,8 juta itu terdapat 0,7 juta dengan pendapatan lebih dari $ 5.000 per tahun.

Marilah kita rumuskan persoalan diatas di dalam bentuk persoalan Linear Programing, yaitu :

Cari : x_1 , x_2 , x_3

S,r,s : $z = 28\, x_1 + 400\, x_2 + 20\, x_3 = \text{minimum}$ (3.3)

d.p : $x_1 + 9\, x_2 + 0{,}8\, x_3 \geq 30$ (3.4)

$0{,}6\, x_1 + 2\, x_2 + 0{,}7\, x_3 \geq 25$

$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

Dimana $\mathbf{x_1}$ menunjukan banyaknya majalah dimana adventersi itu dimuat, $\mathbf{x_2}$ adalah banyaknya siaran pada televisi dan $\mathbf{x_3}$ banyaknya stasiun radio dimana advertensi itu disarkan. Soal Linear Programing ini telah dirumuskan dengan memakai satuan jutaan bagi pendengar dan biaya dinyatakan dalam ribuan dolar.

Contoh 3.3

Marilah kita misalkan, bahwa seorang dewasa membutuhkan zat-zat makanan, setiap harinya sebagai berikut.

Tabel 3.2 Kebutuhan zat makanan

Zat makanan (persamaan)	Kebutuhan minimum
1. Protein (I)	70 gram
2. Kalori (II)	3000 cal
3. Calcium (zat kapur) (III)	800 mg
4. Besi (IV)	12 mg

Marilah kita misalkan bahwa bagi seorang tersedia lima macam bahan makan dengan harga-harga dan banyak zat-zat yang dikandungnya seperti yang ditunjukan oleh daftar berikut :

Tabel 3.3 Komposisi 5 jenis makanan

Daerah Persamaan: Z (1) (2) (3) (4)

Bahan makanan	Harga per satuan	Protein (gr)	Kalori	Calcium (mg)	Besi (mg)
1. Roti	3,-	8,3	246	17,2	2,01
2. Keju	7,-	24,9	243	810,0	0,57
3. Mentega	7,-	0,3	793	14,8	0,16
4. Kacang	5,-	6,0	93	61,6	2,05
5. Bayam	2,-	5,1	26	595,0	4,00
Kebutuhan minimum	Z	70	3000	800	12

Seorang konsumen tentu berusaha agar dari bahan makanan yang dikonsumsi diperoleh sedikit-sedikitnya sama zat-zat makanan dengan kebutuhan minimum itu. Disini, tidak akan ada bahayanya jika beberapa zat makanan yang diperoleh berlebih dari kebutuhan minimum itu. Akan tetapi kelebihan itu tidak akan ada faedahnya (apalagi juga beberapa zat lain tidak dipenuhi).

Dengan memisalkan, bahwa x_1, x_2, x_3, x_4, dan x_5 menunjukkan banyaknya kelima macam bahan makanan itu, didalam satuannya masing-masing, yang dikonsumsi oleh konsumen yang bersangkutan, maka biaya yang harus dikeluarkannya adalah :

$$Z = 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 2x_5$$

Inilah fungsi tujuan yang hendak diminimumkam itu didalam batasan zat-zat makanan diatas.

Batasan-batasan dari kebutuhan minimum zat makanan itu dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$8{,}30x_1 + 24{,}90x_2 + 0{,}40x_3 + 6{,}00x_4 + 5{,}10x_5 \geq 70 \quad .....(I)$$

$$2{,}4x_1 + 2{,}43x_2 + 7{,}93x_3 + 0{,}93x_4 + 0{,}26x_5 \geq 30 \quad .....(II)$$

$$1{,}72x_1 + 81{,}00x_2 + 1{,}48x_3 + 6{,}16x_4 + 59{,}50x_5 \geq 80 \quad .....(III)$$

$$2{,}01x_1 + 0{,}57x_2 + 0{,}16x_3 + 2{,}05x_4 + 4{,}00x_5 \geq 12 \quad .....(IV)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$$

Dengan demikian kita telah merumuskan secara Linear Programing persoalan bahan makanan itu.

Contoh 3.4

Marilah kita misalkan adanya sebuah perusahaan mobil yang menghasilkan dua macam mobil yaitu mobil sedan dan truk. Didalam perusahaan itu terdapat empat bagian, yaitu bagian pembuatan badan mobil, bagian pembuatan mesin, asembly sedan, dan asembly truk. Kapasitas perbulan dari perusahaan itu ditunjukan oleh daftar sebagai berikut.

Tabel 3.4 Pembuatan mobil dan truk

Bagian Perusahaan	Jumlah yang dapat dihasilkan	
	Mobil Sedan	Mobil Gerobak
1. Pembuatan Badan Mobil	250 buah	350 buah
2. Pembuatan Mesin	333 buah	167 buah
3. Asembly Mobil Sedan	225 buah	--
4. Asembly truk	---	150 buah

Hanya ada dua aktifitas dari perusahaan ini, yaitu produksi mobil sedan dan produksi truk. Marilah kita misalkan bahwa perusahaan itu menghasilkan $\mathbf{x_1}$ buah mobil sedan dan $\mathbf{x_2}$ buah truk setiap bulannya.

Untuk menghasilkan sebuah mobil sedan, diperlukan sebanyak 1/250 = 0,4 persen dari kapasitas bagian pembuatan badan mobil, sebanyak 1/333 = 0,3 persen dari kapasitas bagian pembuatan mesin, dan sebanyak 1/225 = 0,44 persen dari kapasitas bagian assembly mobil.

Untuk membuat sebuah truk, diperlukan 1/350 = 0,29 persen kapasitas bagian pembuatan mobil dan 1/167 = 0,6 persen dari kapasitas bagian membuat mesin dan sebanyak 1/150 = 0,67 persen dari kapasitas bagian asembly truk. Karena setiap bagian tidak akan dapat melebihi 100 persen kapasitasnya. Maka batasan-batasan kapasitas itu dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$0{,}40x_1 + 0{,}29x_2 \leq 100$$
$$0{,}30x_1 + 0{,}60x_2 \leq 100$$
$$0{,}44x_1 \leq 100$$
$$0{,}67x_2 \leq 100$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Marilah kita misalkan bahwa perusahaan itu memperoleh Rp 300.000,- keuntungan dari setiap mobil sedan yang dihasilkannya dan sebanyak Rp 250.000,- keuntumgan dari setiap truk. Jika yang menjadi tujuan dari perumusan itu maksimasi keuntungan, maka fungsi tujuan adalah :

$$z = 300.000\ x_1 + 250.000\ x_2$$

Inilah fungsi yang hendak dimaksimumkan didalam batasan kapasitas diatas.

Seperti telah diuraikan diatas, bahwa Linear Programing ialah suatu metoda untuk mencapai nilai objektif atau tujuan yang sebesar-besarnya (maksimum atau minimum) dengan pembatasan-penbatasan.

3.3 Penyelesaian dengan Menggunakan Grafik

Jika konstren-konstrennya dibatasi pada dua variabel, bagaimanapun banyaknya konstren tersebut penyelesaian yang termudah adalah dengan pendekatan grafik. Pendekatan grafik untuk maksimasi dan minimisasi diperlihatkan masing-masing dalam contoh-contoh beriktu ini.

Contoh 3.5

Suatu perusahaan mesin listrik memproduksi dua jenis mesin yaitu: motor induksi (x_1) dan generator sinkron (x_2). Setiap motor induksi memerlukan 2,5 jam untuk merakit rangka (A), 3 jam untuk merakit kumparan (B), dan 1 jam untuk finishing (C). Setiap generator sinkron memerlukan 1 jam untuk merakit rangka, 3 jam untuk merakit kumparan, dan 2 jam untuk finishing. Perusahaan tersebut tidak dapat menggunakan lebih dari 20 jam untuk merakit rangka, 30 jam untuk merakit kumparan , dan 16 jam finishing setiap minggu. Keuntumgan marginnya adalah $3 tiap motor induksi dan $4 untuk setiap generator.

Pendekatan grafik dipakai dibawah ini untuk mencari komposisi output (output mix) yang akan memaksimumkan keuntungan mingguan perusahaan tersebut. Hal ini diperlihatkan dalam empat langkah yang mudah **sebagai berikut**.

1. Nyatakan data tersebut sebagai persamaan atau pertidak samaan fungsi yang akan dioptimumkan, fungsi objektifnya menjadi :

$$Z = 3x_1 + 4x_2 \text{ (keuntungan)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.5)$$

Dibawah konstren-konstern

Konstren dari A (merakit rangka)	:	$2{,}5x_1 + x_2 \leq 20$
Konstren dari B (merakit kumparan)	:	$3x_1 + 3x_2 \leq 30$
Konstren dari C (finishing)	:	$x_1 + 2x_2 \leq 16$
Konstren ketidak negatifan	:	$x_1 , x_2 \geq 0$

Tiga pertidaksamaan pertama merupakan konstren-konstren yang teknis (tehcnikal constrain) yang ditetapkan oleh pernyataan tehknologi dan tersedianya input, pertidaksamaan yang keempat merupakan suatu konstren ketidak negatifan (non negativity consraint) yang ditentukan pada setiap soal untuk menghindarkan harga negatif (karena itu tak dapat diterima) dari penyelesaian.

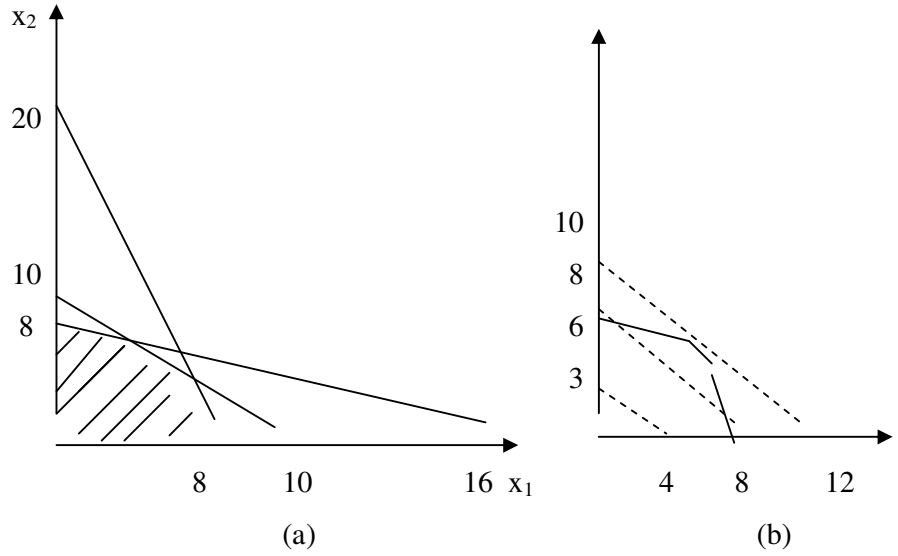
2. Perlakukan tiga konstren pertidaksamaan tersebut sebagai persamaan, selesaikan masing-masing untuk x_2 dalam satuan x_1, dan gambarkan grafiknya. **Jadi,**

dari A : $x_2 = 20 - 2{,}5x_1$

dari B : $x_2 = 10 - x_1$

dari C : $x_2 = 8 - 0{,}5x_1$

Grafik dari pertidak samaan asal "lebih kecil atau sama dengan" akan mencakup semua titik pada garis dan disebelah kiri garis (garis yang paling bawah). Lihat gambar 2.1 (a). Konstren ketidak negatifan $x_1, x_2 \geq 0$, masing-masing digambarkan oleh sumbu vertical dan sumbu horizontal. Daerah yang gelap disebut daerah mungkin (feasible region). Daerah itu berisi semua titik yang memenuhi semua tiga konstren ditambah konstren ketidak negatifan. x1 dan x2 disebut variabel keputusan atau variabel structural (decision or structural variables).



Gambar 3.1.

3. Untuk mencari jawaban yang optimal dalam daerah mungkin, jika ada gambar grafik fungsi objektif sebagai suatu barisan garis-garis isoprofit. Dari data Z pada persamaan (3.5) :

$$x_2 = Z/4 - 3/4x_1$$

Jadi, garis isoprofit tersebut mempunyai kemiringan -3/4. Dengan menggambarkan suatu barisan garis-garis isoprofit (garis putus-putus) yang

memenuhi keuntungan-keuntungan yang semakin besar, kita mendapatkan garis isoprofit yang menggambarkan kemungkinan keuntungan terbesar menyinggung daerah mungkin di E, dimana x1 = 4 dan x2 = 6. Lihat gambar 3.1 (b). Disubstitusikan dalam persamaan (3.5), Z = 3(4) + 4(6) = 36.

4. Keuntungan maksimum pada perpotongan dari dua konstren itu yang dinamakan titik ekstrim (extreme point).

3.4 Teori Titik Ekstrim

Teorema titik ekstrim menyatakan bahwa jika suatu harga mungkin yang optimal (optimal feasible value) dari fungsi objektif ada, harga tersebut akan ditetapkan pada salah satu titik ekstrim (sudut) dari batas. Perhatikan bahwa terdapat sepuluh titik ekstrim yaitu : (0,20), (0,10), (6,5), (10, 0), (0,8), (4,6), (7,3), (8,0),(0,0), dan (16, 0) dalam gambar 1-1 (a). yang terakhir adalah perpotongan dari konstren-konstren ketidak negatifan. Semuanya disebut penyelesaian dasar (basic solution), tetapi hanya lima yang terakhir yang merupakan penyelesaian mungkin dasar (basic feasible solution) karena penyelesaian-penyelesaian tersebut tidak melanggar konstren satupun. Biasanya hanya salah satu dari penyelesaian mungkin dasar tersebut yang akan optimal. Di (7,3) umpamanya Z = 3(7) + 4(3) =31 yang adalah lebih rendah dari pada Z = 3(4) + 4(6) = 36 diatas.

Contoh 3.6

Seorang petani ingin mengetahui dimana fembalanya memperoleh kebutuhan harian yang minimum dari tiga bahan gizi dasar A,B dan C. Kebutuhan harianya adalah 14 untuk A, 12 untuk B, 18 untuk C. Produk y1 mempunyai dua unit A, dan satu unit masing-masing B dan C, produk y2 mempunyai mempunyai satu unit masing-masing A dan B dan tiga unit C. Harga y1 adalah \$2 dan harga y2 \$4. metode grafik dipakai dibawah ini untuk menetapkan kombinasi biaya yang semurah-murahnya (leastcost combination) dari y1 dan y2 yang akan memenuhi kebutuhan minimum. Dengan mengikuti prosedur yang dipakai dalam contoh 3.5.

1. Fungsi objektif yang diminimumkan adalah c = 2y1 + 4y2 (3.6)
   dibawah konstren-konstren,
   Konstren dari A : $2y_1 + y_2 \geq 14$

Konstren dari B : $y_1 + y_2 \geq 12$

Konstren dari C : $y_1 + 3y_2 \geq 18$

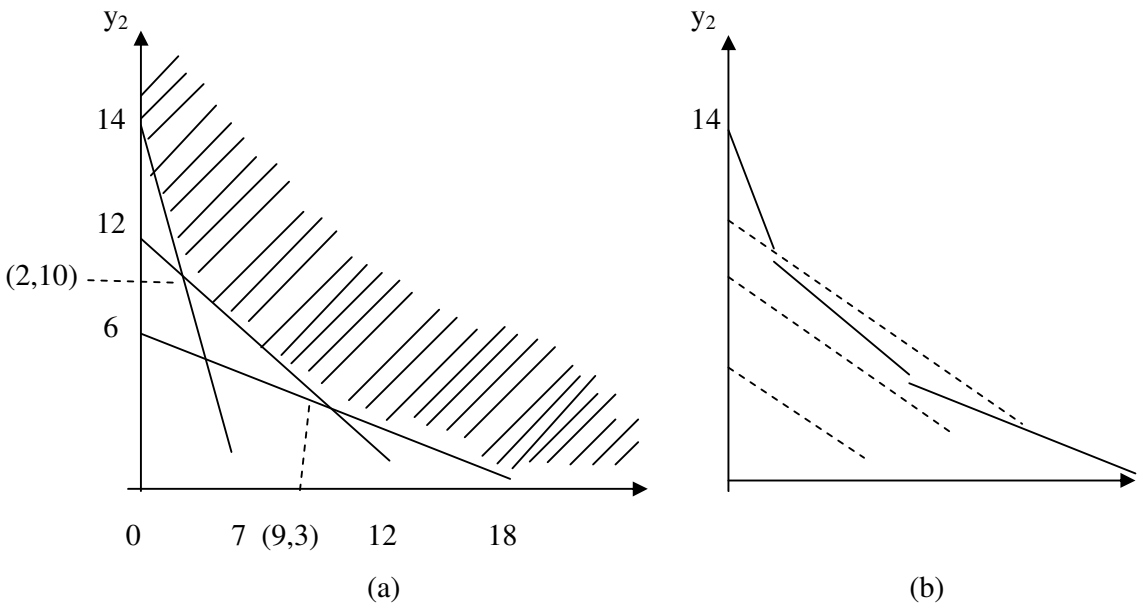
Konstren ketidak negatifan : $y_1 , y_2 \geq 0$

Dimana konstren-konstren teknisnya berbunyi ≥ karena kebutuhan minimum harus dipenuhi tetapi mungkin dilewati.

2. Perlakukan pertidaksamaan tersebut sebagai persamaan, selesaikan masing-masing untuk y2, dalam satuan y1, dan gambarkan grafiknya. Grafik dari pertidaksamaan asal "lebih besar atau sama dengan" akan mencakup semua titik-titik pada garis dan disebelah kanan garis (0n the line and the right of it). Lihat gambar 3.2 (a). Daerah yang gelap merupakan daerah mungkin yang berisi semua titik-titik yang memenuhi semua tiga konstren kebutuhan ditambah konstren ketidak negatifan.
3. Untuk mencari penyelesaian yang optimal, gambarkan grafik fungsi objektif sebagai suatu barisan baris isocost (garis putus-putus). Dari persamaa (3.6),

   $$Y2 = c/4 – ½ y1$$

   Garis isocost terendah yang akan menyinggung daerah mungkin adalah garis singgung (tangent) di y1 = 9 dan y2 = 3 dalam gambar 3.2 (b). Jadi c = 2(9) + 3(3) = 30 , yang menunjukan suatu biaya yang lebih rendah dari pada dititik ekstrim mungkin (feasible extreme point) lainnya. Umpamanya, di (2,10), c = 2(2) + 4(10) = 44 . (Untuk persoalan minimasi (0,0) tidak dalam daerah mungkin).



Gambar 3.2.

3.5 Menjawab Permasalahan dengan Menggunakan Grafik

Strategi menjawab permasalahaan dengan grafik ini adalah sebagai berikut.

1. Gambarlah grafik konstren-konstren pertidaksamaan setelah menyelesaikan masing-masing untuk variabel yang ada, misalnya: g2 dan g1.
2. Grafikkan kembali dan gelapkan dalam daerah mungkin (feasible region)
3. Hitunglah kemiringan dari fungsi objektif. Taruhlah penggaris dengan kemiringan ini, gerakan ia ketitik kontak dengan fungsi objektif, dan buatlah suatu garis putus-putus.
4. Bacalah harga-harga kritis untuk vareiabel yang ada (misalnya: g1 dan g2 pada titik kontak, dan evaluasilah fungsi objektif pada harga-harga ini.

Selanjutnya perhatikanlah pemecahan soal-soal berikut :

1. Suatu pabrik khusus baja memproduksi dua tipe baja (g1 dan g2). Tipe 1 memerlukan 2 jam untuk melebur, 4 jam untuk menggiling, dan 10 jam untuk memotong. Tipe 2 memerlukan 5 jam untuk melebur, 1 jam untuk menggiling, 5 jam untuk memotong. Empat puluh jam tersedia untuk melebur, 20 jam untuk menggiling, dan 60 untuk memotong. Keuntungan margin untuk tipe 1 adalah 24, untuk tipe 2 adalah 8, ubahlah data tersebut menjadi persamaan-persamaan dan pertidaksamaan-pertidaksamaan yang perlu untuk menetapkan komposisi output yang akan memaksimumkam keuntungan.

Jawaban :

Maksimumkan: $Z = 24g_1 + 8g_2$

Dibawah	$2g_1 + g_2 \leq 40$	Konstren melebur
	$4g_1 + g_2 \leq 20$	Konstren menggiling
	$10g_1 + 5g_2 \leq 60$	Konstren memotong
	$g_1 , g_2 \geq 0$	

2. Suatu pabrik batu kerikil untuk halaman rumah memproduksi dua macam yaitu : kasar (x1) dan baik (x2). Batu kerikil yang kasar memerlikan dua jam untuk menghancurkannya, 5 jam untuk mengayak dan 8 jam untuk mengeringkan. Batu kerikil yang baik memerlukan 6 jam untuk menghancurkan, 3 jam untuk mengayak dan 2 jam untuk mengeringkan. Keuntungan margin untuk batu kerikil yang kasar adalah 40, untuk batu kerikil yang baik adalah 50. Pabrik tersebut tersedia 36 jam

untuk menghancurkan, 30 jam untuk mengayak dan 40 jam untuk mengeringkan. Tentukan komposisi output yang maksimum untuk keuntungan dengan mereduksi data ini menjadi persamaan-persamaan dan pertidaksamaan.

Jawaban :

Maksimumkan: $Z = 40x_1 + 50x_2$

Dibawah	$2x_1 + 6x_2 \leq 36$	Konstren menghancurkan
	$5x_1 + 3x_2 \leq 30$	Konstren mengayak
	$8x_1 + 2x_2 \leq 40$	Konstren mengeringkan
	$x_1 , x_2 \geq 0$	

3. Suatu pabrik mainan membuat dua permaian yaitu : Bong (g2) dan Zong (g2). Keuntungan margin pada Bong adalah 30, keuntungan margin pada Zong adalah 20. Bong memerlukan 6 jam untuk memproses, 4 jam untuk memasang dan 50 jam untuk mengepak. Zong memerlukan 3 jam untuk memproses, 6 jam untuk memasang dan 5 jam untuk mengepak. Jika 54 jam tersedia untuk memproses, 48 jam untuk memasang dan 50 jam untuk mengepak, bagaimana komposisi output yang memaksimumkan keuntungan dalam bentuk persamaan-persamaan dan pertidak samaan?

Jawaban :

Maksimumkan $Z = 30g_1 + 20g_2$

Dibawah	$6g_1 + 3g_2 \leq 54$	Konstren memproses
	$4g_1 + 6g_2 \leq 48$	Konstren memasang
	$5g_1 + 5g_2 \leq 50$	Konstren mengepak
	$g_1 , g_2 \geq 0$	

4. Suatun pabrik stereo membuat tiga tipe stereo standar (y1), kwalitas (y2), dan mewah (y3). Keuntungan margin dari masing-masing stereo adalah berturut-turut 15, 20, dan 24. Model standar memerlukan 3 jam untuk memasang kawat dan 1 jam untuk inkasing (endcasing), model kwalitas memerlikan 1 jam untuk memasang kawat dan 5 jam untuk inkasing, Model mewah memerlukan 3 jam untuk memasang kawat dan 2 jam untuk inkasing. Jika 120 jam tersedia untuk memasang kawat dan 60 jam untuk inkasing, nyatakan komposisi output yang akan memaksimumkan keuntungan sebagai persamaan-persamaan dan pertidaksamaan.

Jawaban :

Maksimumkan: $Z = 15y_1 + 20y_2 + 24y_3$

Dibawah	$3y_1 + y_2 + 3y_3 \leq 120$	Konstren memasang kawat
	$y_1 + 5y_2 + 2y_3 \leq 60$	Konstren inkasing
	$y_1 , y_2 , y_3 \geq 0$	

5. Suatu pabrik meubel membuat tiga tipe meja yaitu : kedaerahan (x1), kontempore (x2), dan modern (x3). Model kedaerahan memerlukan 2 jam untuk mengamplas dan tiga jam untuk mewarna, keuntungan marginnya adalah 36. Model kontemporer memerlukan 2 jam untuk mengamplas dan 2 jam untuk mewarna, keuntungan marginnya adalah 28. Model modern memerlukan 4 jam untuk mengamplas dan 1 jam untuk mewarna, sedangkan keuntungan marginnya 32. Bagaimana produksi harus dialokasikan untuk memaksimumkan keuntungan jika 60 jam tersedia untuk mengamplas dan 80 jam untuk mewarna ?

Jawaban :

Maksimumkan: $Z = 36x_1 + 28x_2 + 32x_3$

Dibawah	$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 60$	Konstren menganplas
	$3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 80$	Konstren mewarna
	$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$	

6. Seorang ahli perkebunan ingin mencampur pupuk yang akan memberikan minimum 15 unit kalium karbonat, 20 unit nitrat, dan 24 unit pospat. Merk 1 memberikan 3 unit kalium karbonat, 1 unit nitrat, dan 3 unit pospat harganya Rp 120. Merk 2 memberikan 1 unit kalium karbonat, 5 unit nitrat dan 2 unit phospat harganya Rp 60. Nyatakan kombinasi yang semurah-murahnya dari pupuk yang akan memenuhi spesifikasi yang diinginkan sebagai persamaan-persamaan dan pertidaksamaan.

Jawaban :

Miniimumkan: $Z = 120x_1 + 60x_2$

Dibawah	$3x_1 + x_2 \geq 15$	Kebutuhan kalium nitrat
	$x_1 + 5x_2 \geq 20$	Kebutuhan nitrat
	$3x_1 + 2x_2 \geq 24$	Kebutuhan phospat
	$x_1 , x_2 \geq 0$	

7. Seorang penggemar kesehatan ingin memperoleh minimum 36 unit vitamin A, 28 unit vitamin C, dan 32 unit vitamin D setiap hari. Merk 1 harganya Rp 3 dan

memberikan 2 unit vitamin A, 2 unit vitamin C dan 8 unit vitamin D. Merk 2 harganya Rp 4 dan memberikan 3 unit vitamin A, 2 unit vitamin C dan 2 unit vitamin D. Buatkanlah persamaan-persamaan yang memenuhi untuk biaya yang semurah-murahnya yang menjamin kebutuhan harian.

Jawaban :

Miniimumkan $Z = 3y_1 + 4y_2$

Dibawah
$2y_1 + 3y_2 \geq 36$ Kebutuhan vitamin A
$2y_1 + 2y_2 \geq 28$ Kebutuhan vitamin C
$8y_1 + 2x_2 \geq 32$ Kebutuhan vitamin D
$y_1 , y_2 \geq 0$

8. Si Ali meyakinkan ayam-ayamnya mendapat paling sedikit 24 unit besi dan 8 unit vitamin setiap hari. Jagung (x_1) memberikan 2 unit besi dan 5 unit vitamin. Tepung tulang (x_2) memberikan 4 unit besi dan 1 unit vitamin. Padi padian (x_3) memberikan 2 unit besi dan 1 unit vitamin. Bagaimana makanan-makanan tersebut harus dicampur untuk memberikan pemenuhan yang semurah-murahnya akan kebutuhan harian jika harga makanan berturut-turut adalah Rp 40, Rp 20 dan Rp 60.

Jawaban :

Minimumkan $Z = 40x_1 + 20x_2 + 60x_3$

Dibawah
$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 24$ Kebutuhan besi
$5x_1 + x_2 + x_3 \geq 8$ Kebutuhan vitamin
$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

<u>Penyelesaian dari soal 1,</u>

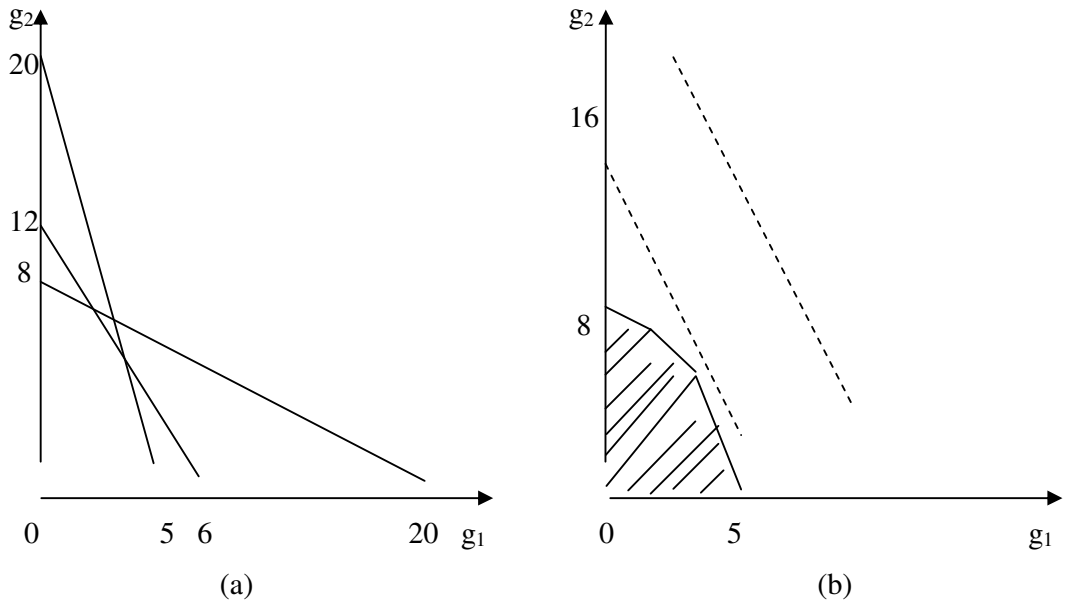
Maksimumkan $Z = 24g_1 + 8g_2$

Dibawah
$2g_1 + 5g_2 \leq 40$ Konstren 1
$4g_1 + g_2 \leq 20$ Konstren 2
$15g_1 + 5g_2 \leq 60$ Konstren 3
$g_1 , g_2 \geq 0$

<u>Jawaban :</u>

Konstren-konstren pertidak samaan tersebut harus digrafikkan seperti terlihat dalam gambar 3.3 (a). Untuk konstren 1 dari g2 = 8 – 2/5g1, apabila g1 = 0, g2 = 8

apabila g2 = 0, g1 = 20. Perhatikan bahwa konstren ketidak negatifan hanya membatasi analisa pada kuadran pertam. Daerah mungkin digrafikan dalam gambar 3.3 (b). Dari fungsi objektif, g1 = 4 dan g2 = 4. Jadi Z = 24(4) – 8(4) = 128.



Gambar 3.3.

Penyelesaian dari soal 2.

Maksimumkan: $Z = 40x_1 + 50x_2$

Dibawah

$2x_1 + 6x_2 \leq 36$ Konstren 1

$5x_1 + 3x_2 \leq 30$ Konstren 2

$8x_1 + 2x_2 \leq 40$ Konstren 3

$x_1 , x_2 \geq 0$

Jawaban :

Lihat Gambar 3.4 (a) untuk konstren-konstren yang digrafikan dan gambar 3.4(b) untuk daerah yang mungkin. Dari fungsi objektif x2 = Z/50 – 4/5x1, kemiringan = -4/5. Dalam gambar 3.4 (b) diperoleh: x1 =3 dan x2 = 5. Jadi Z= 40(3) + 50(5) = 370.

Penyelesaian dari Soal 6

Minimumkan: $c = 120x_1 + 60x_2$

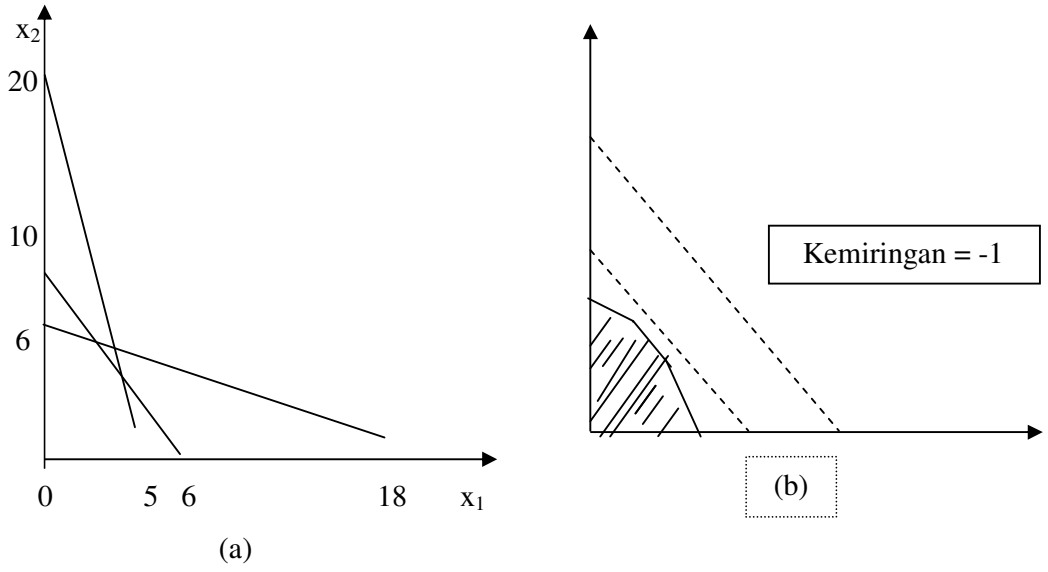
Dibawah

$3x_1 + x_2 \geq 15$ Konstren 1

$$x_1 + 5x_2 \geq 20 \quad \text{Konstren 2}$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 24 \quad \text{Konstren 3}$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

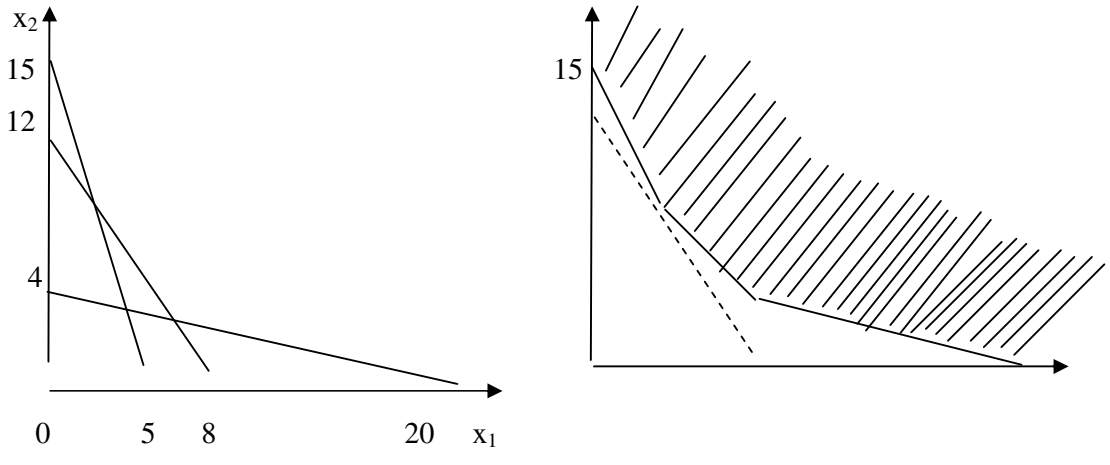
Jawaban :

Lihat gambar 3.5. Dari fungsi objektif, x2 = c/60 – 2x1, kemiringan = -2. Dalam gambar 2.5 (b), x1 = 2, x2 = 9, dan c = 120(2) + 60 (9) = 780.



(a)

Gambar 3.4.



a) b)

Gambar 3.5.

BAB IV
PEMECAHAN DUAL

4.1 DUAL

Setiap persoalan maksimasi (minimisasi) dalam programmasi linier mempunyai suatu persoalan minimisasi (maksimisasi) yang bersesuaian. Persoalan asalnya disebut primal ; persoalan yang bersesuaian (corresponding problem) disebut dual. Hubungan antara keduanya dapat dinyatakan dengan baik melalui pemakaian parameter-parameter yang diberikan bersama.

Kaidah-kaidah DUAL Dalam perumusan dual dari suatu persoalan primal :

1. Arah dari optimasi adalah kebalikan. Maksimasi dalam primal menjadi minimasi dalam dual dan sebaliknya.
2. Tanda pertidaksamaan dari konstren-konstren teknis adlah kebalikan, tetapi kekangan ketidak negatifan (non negativity restraint) pada variable-variabel keputusan (decision variables) selalu dipertahankan.
3. Baris dari matriks koefisien dari konstren-konstren dalam primal ditranspose menjadi kolom untuk matriks koefisien dari konstren-konstren dual.
4. Vektor baris dari koefisien-koefisien dalam fungsi objektif dalam primal ditranspose menjadi vector kolom konstan untuk konstren-konstren dual.
5. Vektor kolom konstan dari konstren primal ditranspose menjadi vector baris dari koefisien-koefisien untuk fungsi objektife dalam dual.
6. Variabel keputusan primal (xj) digantikan oleh variable keputusan dual (zi).

Contoh 4.1

Dual dari soal programasi linear:

Maksimumkan $\mathbf{Z = 5x_1 + 3x_2}$

Terikat pada $6x_1 + 2x_2 \leq 36$

$5x_1 + 5x_2 \leq 40$

$6x_1 + 4x_2 \leq 28$

$x_1 , x_2 \geq 0$

adalah

minimumkan $\mathbf{c = 36z_1 + 40z_2 + 28z_3}$

terikat pada $6z_1 + 5z_2 + 2z_3 \geq 5$

$2z_1 + 5z_2 + 4z_3 \geq 0$

$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

Contoh 4.2

Dual dari soal programasi linear:

Minimumkan $\mathbf{c = 20z_1 + 30z_2 + 16z_3}$

terikat pada $2{,}5z_1 + 3z_2 + z_3 \geq 3$

$z_1 + 3z_2 + 2z_3 \geq 0$

$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

adalah

maksimumkan $\mathbf{Z = 3x_1 + 4x_2}$

terikat pada $2{,}5x_1 + x_2 \leq 20$

$3x_1 + 3x_2 \leq 30$

$x_1 + 2x_2 \leq 16$

$x_1 , x_2 \geq 0$

Perhatikan bahwa jika dual dari dual diambil disini atau dalam contoh-contoh diatas primal yang bersesuaian akan terdapat.

4.2 Ketentuan DUAL

Dua ketentuan dual adalah sangat penting untuk programasi linear. Ketentuan tersebut menyatakan :

1. Harga optimal dari fungsi objektif primal selalu sama dengan harga optimal dari fungsi objektif dual, asalkan suatu penyelesaian mungkin yang optimal ada.
2. Jika dalam penyelesaian mungkin yang optimal tersebut
   6. Suatu variable keputusan dalam program primal mempunyai harga bukan nol, variable slack (atau surplus) yang bersesuaian dalam program dual harus mempunyai suatu harga optimal nol.

7. Suatu variable slack (atau surplus) dalam primal mempunyai harga nol, variable keputusan yang bersesuaian dalam program dual harus mempunyai suatu harga nol.

Contoh 4.3

Diberikan soal programasi linier berikut,

Maksimumkan $\mathbf{Z = 14x_1 + 12x_2 + 18x_3}$

Terikat pada $2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$

$x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 4$

$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

Ketentuan dual dipakai sebagai berikut untuk mencari harga optimal dari (1) fungsi objektif primal dan dua variable keputusan primal. Program dualnya adalah :

Minimumkan $\mathbf{c = 2z_1 + 4z_2}$

Terikat pada $2z_1 + z_2 \geq 14$

$z_1 + z_2 \geq 12$

$z_1 + 3z_2 \geq 18$

$z_1 , z_2 \geq 0$

1. Dengan penyelesaian grafik diperoleh ; z1=9, z2=3 dan c=30. Dengan harga optimal dari dual sama dengan 30, dari ketentuan dual pertama jelas bahwa nilai maksimum Z juga harus sama dengan 30.
2. Untuk mencari harga optimal dari variable keputusan primal, ubahlah konstren pertidaksamaan menjadi persamaan-persamaan dengan menambahkan variable-variabel slack pada primal (I) dan dengan mengurangkan variable-variabel surplus dari dual (II). Untuk membedakan variable slack dari primal dengan variable surplus dari dual, **'s'** dipakai untuk primal dan **'t**' untuk dual.

   Jadi:

   Untuk Primal: $2x_1 + x_2 + x_3 + s1 = 2$

   $x_1 + x_2 + 3x_3 + s2 = 4$

   Untuk DUAL: $2z_1 + z_2 - t_1 = 14$

   $z_1 + z_2 - t_2 = 12$

   $z_1 + 3z_2 - t_3 = 18$

Substitusikan z1 = 9, z2 =3 dalam DUAL untuk mendapatkan t1,t2,t3 sebagai berikut :

$2(9) + 3 - t1 = 14$ $\quad t1 = 7$

$9 + 3 - t2 = 0$ $\quad t2 = 0$

$9 + 3(3) - t3 = 18$ $\quad t3 = 0$

Dengan variable surplus (t_2, t_3) untuk konstren dual kedua dan ketiga sama dengan nol, maka menurut ketentuan dual yang kedua, variable-variabel keputusan primal yang sesuai (x_2 , x_3) harus bukan nol. Dengan $t_1 \neq 0$, maka variable keputusan yang sesuai, $x_1 = 0$. Dengan menyelesaikan persamaan primalnya dengan $x_1 = 0$, maka diperoleh $x_2 = 1$ dan $x_3 = 1$.

4.3 Keuntungan DUAL

Dari hubungan antara primal dan dual, seperti di uraikan di atas jelas bahwa harga optimal dari fungsi obyektif dapat dicari baik melalui primal atau dual. Disebabkan oleh hubungan komplementer antara variabel-variabel keputusan dalam satu program dan variabel-variabel slack (atau surplus) di dalam program lainnya, penyelesaian untuk program yang satu memberikan penyelesaian penuh untuk program lainnya. Ini bermanfaat karena :

1. Hal ini memungkinkan persoalan minimisasi di selesaikan memakai (in terms of) maksimisasi, yang sering kali lebih mudah.
2. Untuk soal-soal primal dengan tiga variabel keputusan, dual mereduksi program tersebut menjadi dua variabel keputusan, (lihat contoh 3), yang kemudian dapat digrafikkan.

Selanjutnya perhatikan pemecahan soal-soal berikut :

1. Untuk soal prima berikut ini, (a) formulisakan dualnya, (b) selesaikan dual tersebut dengan grafik. Kemudian gunakan pernyelesaian dual untuk mencari harga optimal dari (c) fungsi obyektif primal dan (d) variabel-variabel keputusan primal.

   Minimumkan $\quad c = 40x_1 + 20x_2 + 60x_3$

   Terikat pada $\quad 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 \geq 24$

   $5x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 8 \qquad x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

Jawaban :

a. Dualnya adalah

Maksimumkan $Z = 24\ z_1 + 8z_2$

Terikat pada $2z_1 + 5z_2 \leq 40$

$4z_1 + z_2 \leq 20$

$10z_1 + 5z_2 \leq 60$

$z_1 , z_2 \geq 0$

b. Dual tersebut diselesaikan dengan grafik sebagai primal dan kemkudian dirubah x_1 menjadi z_1 , kemudian diperoleh $z_1 = 4$, $z_2 = 4$, dan $Z = 128$.

c. Dengan $Z = 128$, $c = 128$.

d. Untuk mencari variabel-variabel keputusan primal (x_1 , x_2 , x_3) dari variabel-variabel keputusan dual (z_1 , z_2), ubahlah dulu pertidaksamaan-pertidaksamaan primal dan dual menjadi persamaan-persamaan.

I. $2x_1 + 4x_2 + 10x_3 - s_1 = 24$

$5x_1 + x_2 + 5x_3 - s_2 = 8$

II. $2z_1 + 5z_2 + t1 = 40$

$4z_1 + z_2 + t2 = 20$

$10z_1 + 5z_2 + t3 = 60$

Kemudian substitusikan $z_1 = z_2 = 4$ kedalam persamaan-persamaan konstren dual untuk menyelesaikan variabel-variabel slacknya.

$2(4) + 5(4) + t_1 = 40$ $\quad t_1 = 12$

$4(4) + 4 + t_2 = 20$ $\quad t_2 = 0$

$10(4) + 5(4) + t_3 = 60$ $\quad t_3 = 0$

Dengan $t \neq 0$, variabel keputusan primal yang sesuai yaitu x_1 harus sama dengan nol. Dengan $t_2 = t_3 = 0$, x_2 , $x_3 \neq 0$.

Karena harga optimal dari variabel-variabel keputusan dual (z_1 , z_2) tidak sama dengan nol, variabel-variabel surplus primal yang sesuai (s_1 , s_2) harus sama dengan nol. Dengan memasukan yang diketahui $x_1 - s_1 = s_2 = 0$ kedalam persamaan-persamaan konstren primal,

$2(0) + 4x_2 + 10x_3 - 0 = 24$, $\quad 5(0) + x_2 + 5x_3 - 0 = 8$

Diselesaikan secara simultan, $x_2 = 4$ dan $x_3 = 0{,}8$. jadi variabel-variabel keputusan primalnya adalah $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ dan $x_3 = 0{,}8$.

2. Mengulang soal nomor 1. Untuk soal primal berikut :

Maksimumkan : $C = 36\ x_1 + 30\ x_2 + 40\ x_3$

Terikat pada : $2x_1 + 5x_2 + 8x_3 \leq 40$

$6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 50$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 0$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Jawaban :

a. Maksimumkan pada $Z = 40z_1 + 50z_2$

Terikat pada $2z_1 + 6z_2 \leq 36$

$5z_1 + 3z_2 \leq 30$

$8z_1 + 2z_2 \leq 40$

$z_1, z_2 \geq 0$

b. Equivalen dual tersebut terselesaikan dengan grafik dan diperoleh:

$z_1 = 3$, $z_2 = 5$ dan $Z = 370$

c. Dengan $Z = 370$, $C = 370$,

d. I $2x_1 + 5x_2 + 8x_3 - s_1 = 40$

$6x_1 + 3x_2 + 2x_3 - s_2 = 50$

II. $2z_1 + 6z_2 + t_1 = 36$

$5z_1 + 3z_2 + t_2 = 30$

$8z_1 + 2z_2 + t_3 = 40$

Dengan substitusi $z_1 = 3$ dan $z_2 = 5$ dalam II

$2(3) + 6(5) + t_1 = 36,$ $t_1 = 0$

$5(3) + 3(5) + t_2 = 30,$ $t_2 = 0$

$8(3) + 2(5) + t_3 = 40,$ $t_3 = 6$

Dengan $t_1 = t_2 = 0$, $x_1, x_2 \neq 0$. karena ketiga $t_3 \neq 0$, $x_3 = 0$

Selanjutnya:

$2x_1 + 5x_2 + 8(0) - (0) = 40$

$6x_1 + 3x_2 + 2(0) - (0) = 50$

Jadi $x_1 = 5{,}42$, $x_2 = 5{,}83$ dan $x_3 = 0$

3. Mengulangi soal 1. Diberikan soal programasi linear berikut

a. Maksimumkan : $Z = 15\ x_1 + 20\ x_2 + 24\ x_3$

Terikat pada : $3x_1 + 1x_2 + 3x_3 \leq 120$

$$x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 60$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$$

Jawaban :

Minimumkan pada $c = 120z_1 + 60z_2$

Terikat pada: $3z_1 + z_2 \geq 15$

$$z_1 + 5z_2 \geq 20$$

$$3z_1 + 2z_2 \geq 24$$

$$z_1, z_2 \geq 0$$

b. Equivalen dual tersebut diselesaikan dengan grafik: $z_1 = 2$, $z_2 = 9$ dan $c = 780$

c. Dengan $c = 780$, $Z = 780$

d. I $3x_1 + x_2 + 3x_3 + s_1 = 120$

$$x_1 + 5x_2 + 2x_3 + s_2 = 60$$

II. $3z_1 + z_2 - t_1 = 15$

$$z_1 + 5z_2 - t_2 = 20$$

$$3z_1 + 2z_2 - t_3 = 24$$

Dengan substitusi $z_1 = 2$ dan $z_2 = 9$ dalam II

$3(2) + 9 - t_1 = 15$ $\quad t_1 = 0$

$2 + 5(9) - t_2 = 20$ $\quad t_2 = 27$

$3(2) + 2(9) - t_3 = 24$ $\quad t_3 = 0$

Dengan $t_1 = t_3 = 0$, $x_1, x_3 \neq 0$. karena $t_2 \neq 0$, $x_2 = 0$

Selanjutnya:

$$3x_1 + 0 + 3x_3 + 0 = 120$$

$$x_1 + 5(0) + 2x_3 + 0 = 60$$

Jadi $x_1 = 20$, $x_2 = 0$ dan $x_3 = 20$

BAB V
ALGORITMA SIMPLEX

5.1 Variabel Slack dan Surplus

Persoalan-persoalan yang melibatkan lebih dari dua variabel adalah di luar lingkup dari pendekatan grafik dua dimensi yang diberikan dalam bab sebelumnya, karena diperlukan persamaan, sistem pertidaksamaan linear harus dirubah menjadi suatu system persamaan linear. Ini dilakukan dengan (s_i) ke dalam masing-masing pertidaksamaan (Konstren ke i) dalam sisitem tersebut.

Suatu pertidaksamaan "lebih kecil atau sama dengan " seperti $5x_1 + 3x_2 \leq 30$ dapat dirubah menjadi suatu persamaan dengan menambahkan suatu variable slack $s \geq 0$, demikian rupa hingga $5x_1 + 3x_2 + s = 30$. Jika $5x_1 + 3x_2 = 30$, variable slack $s = 0$. Jika $5x_1 + 3x_2 < 30$, s adalah suatu harga posistif yang sama dengan selisih antara $5x_1 + 3x_2$ dan 30.

Suatu pertidaksamaan "lebih besar atau sama dengan" seperti $4x_1 + 7x_2 \geq 60$ dirubah menjadi suatu persamaan dengan mengurangkan suatu variable surplus (subtracting a surplus variable) $s \geq 0$, sedemikian rupa hingga $4x_1 + 7x_2 - s = 60$. Jika $4x_1 + 7x_2 = 60$, variabel surplus $s = 0$. Jika $4x_1 + 7x_2 > 60$, s adalah suatu harga posistif yang sama dengan selisih antara $4x_1 + 7x_2$ dan 60.

Contoh 5.1

Untuk soal berikut (a) Ubahlah kostren-kostren pertidaksamaan dalam suatu data berikut menjadi persamaan dengan menambahkan variable slack atau mengurangkan variable surplus dan (b) nyatakan persamaan tersebut dalam bentuk matriks.

Maksimumkan $Z = 24y_1 + 8y_2$

Dibawah $2y_1 + 5y_2 \leq 40$ $\quad 10y_1 + 5y_2 \leq 60$

$4y_1 + y_2 \leq 20$ $\quad y_1 , y_2 \geq 0$

Jawaban :

(a) Untuk pertidaksamaan "lebih kecil atau sama dengan" ditambah variable slack.
Jadi : $2y_1 + 5y_2 + s_1 = 40$

$$4y_1 + y_2 + s_2 = 20$$
$$10y_1 + 5y_2 + s_3 = 60$$

(b) Bentuk matriks:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Contoh 5.2

Mengulangi contoh 5.1, untuk yang berikut :

Minimumkan $Z = 60x_1 + 80x_2$

Di bawah $2x_1 + 3x_2 \geq 36$, $8x_1 + 2x_2 \geq 32$

$2x_1 + 2x_2 \geq 28$, $x_1 , x_2 \geq 0$

Jawaban :

(a) Untuk pertidak samaan " Lebih besar atau sama dengan ", di kurangkan variabel surplus :

$$2x_1 + 3x_2 - s_1 = 36 \quad 2x_1 + 2x_2 - s_2 = 28 \quad 8x_1 + 2x_2 - s_3 = 32$$

(b) Bentuk matriks:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 28 \\ 32 \end{pmatrix}$$

5.2 Algoritma Simpleks Maksimum

Algoritma adalah suatu himpunan kaidah – kaidah atau suatu prosedur yang sistematis untuk mendapatkan penyelesaian pada suatu persoalan. Algoritma simple adalah suatu metode (atau prosedur perhitungan) untuk menentukan penyelesaian mungkin dasar pada suatu sistem persamaan dan menguji optimalitas penyelesaian tersebut, karena paling sedikit n - m variable harus sama dengan nol untuk suatu menyelesaikan dasar, n-m variabel ditetapkan sama dengan nol dari setiap langkah dari

prosedur tersebut Penyelesaian di peroleh dengan menyelesaikan m persamaan untuk m variabel sisanya.

Algoritma bergerak dari satu penyelesaian mungkin dasar ke penyelesaian mungkin dasar yang lain, selalu meningkatkan penyelesaian sebelumnya, sampai penyeleseian optimal di capai. Variable – variable yang di tetapkan sama dengan nol pada suatu langkah tertentu di sebut tidak dalam dasar atau tidak dalam penyelesaian. Variabel - variabel yang tidak di tetapkan sama dengan nol di sebut dalam dasar atau dalam penyelesaian, atau lebih sederhana variabel – variabel dasar .metode simplex diperlihatkan dalam contoh 4 untuk maksiminasi dan dalam contoh 5 untuk minimisasi

Contoh 5.3.

Algoritma simplex di gunakan sebagai berikut untuk memaksimumkan keuntungan , di tentukan

Maksimumkan: $Z = 5x_1 + 3x_2$

Di bawah konstren:

$6x_1 + 2x_2 \leq 36$ $\qquad$ $2x_1 + 4x_2 \leq 28$

$5x_1 + 5x_2 \leq 40$ $\qquad$ $x_1, x_2 \geq 0$

1. Tabel Simplex Permulaan

i. Ubahlah pertidaksamaan menjadi persamaan dengan menambah variable-variable slack

$6x_1 + 2x_2 + s_1 = 36,$ $\qquad$ $2x_1 + 4x_2 + s_3 = 28$

$5x_1 + 5x_2 + s_2 = 40$

ii. Nyatakan persamaan –persamaan dalam bentuk matriks :

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 40 \\ 28 \end{pmatrix}$$

iii. Susun lah suatu tabel simplex permulaan yang terdiri dari matrick koevisien dari persamaan – persamaan konstrewn dan vector kolom dari konstan di letak kan di atas baris indicator yang adalah negative dari koefisien – koefisien fungsi obyektif

dan suatu koefisien nol untuk masing – masing variable . elemen kolom konstan dari baris terakhir adalah juga nol sesuai dengan harga dari fungsi obyektif di titk asal kalau $x_1 = x_2 = 0$)

Tabel 5.1 (Tabel Simplek Permulaan)

x_1	X_2	s_1	s_2	s_3	**Konstren (batasan)**
6	**2**	**1**	**0**	**0**	**36**
5	5	0	1	0	40
2	4	0	0	1	28
-5	-3	0	0	0	0

Indikator

iv. Penyelesaian mungkin dasar yang pertama dapat di baca dari tebel simplek permulaan tersebut dengan menetap kan $x_1 = 0$ dan $x_2 = 0$ seperti dalam contoh 3, $s_1 = 36$, $s_2 = 40$, $s_3 = 28$. pada penyelesaian mungkin dasar yang pertama tersebut fungsi obyektif mempunyai harga nol

2. Elemen Pivot dan Perubahan Asal

Untuk menaikan harga dari fungsi obyektif suatu penyelesaian dasar yang baru di periksa. Untuk bergerak ke suatu penyelesaian mungkin dasar yang baru, suatu variable di masukan kedalam dasar dan salah satu variable yang mulanya pada dasar harus di keluarkan. Proses pemilihan variable yang di masukan dan variable yang di keluarkan tersebut di sebut perubahan dasar (change of basis)

i. Indicator negative dengan harga absolute yang terbesar akan menentukan variable yang masuk ke dalam dasar kerena -5 dalam kolom pertama (atau x_1) merupakan indicator negative dengan harga absolute terbesar, x_1 menjadi kolom pivot dan di tunjukan dengan anak panah.

ii. Variable yang di eliminasi di tentukan oleh rasio pemindahan (isplacemen ratio). Rasio pemindahan di peroleh dengan membagi elemen – elemen dari kolom konstan dengan elemen – elemen kolom pivot . baris dengan risio pemindahan yang terkecil (yaitu baris pivot) dengan mengabaikan rasio – rasio lebih atau sama dengan 0, akan menentukan dasar karena $\underline{36}$ memberikan rasio

yang terkecil (36/6 , 40/5 , 28/2), baris 1 merupakan baris pivot. Karena vector satuan dengan 1 dalam baris pertamanya berada dibawah kolom s_1, maka s_1 akan meninggalkan dasar. Elemen pivotnya adalah 6, elemen perpotongan dari kolom variable yang memasuki dasar dan baris yang berhubungan variable yang meninggalkan dasar (yaitu elemen diperpotongan dari baris pivot dan kolom pivot).

3. Pivoting

Pivoting adalah proses penyelesaian m persamaan dalam n variable yang sedang dalam dasar. Karena hanya satu variable baru yang masuk dasar pada setiap langkah dari proses, dan langkah sebelumnya selalu melibatkan suatu matrik identitas, pivoting hanya mengikuti pengubahan elemen pivot menjadi satu dan semua elemen-elemen lainnya dalam colom pivot menjadi nol, seperti dalam metode elimanisasi Gaus sebagai berikut :

i. Kalikan baris pivot dengan kebalikan (reciprocal) dari elemen pivot.

Tabel 5.2. (Dalam hal ini, kalikan baris dengan 1/ 6)

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Konstren
1	**1/3**	**1/6**	**0**	**0**	**6**
5	5	0	1	0	40
2	4	0	0	1	28
-5	-3	0	0	0	0

ii. Setelah mereduksi elemen pivot menjadi satu, berekan kolom pivotnya, Disini kurangkan 5 kali baris1 dari baris 3, dan tambahkan 5 kali baris 1 ke baris 4. Ini memberikan tabel 5.3.

Tabel 5.3

x_1	X_2	s_1	s_2	s_3	Konstren
1	**1/3**	1/6	0	0	6
0	**10/3**	**-5/6**	**1**	**0**	**10**
0	**10/3**	-1/3	0	1	16
0	**-4/3**	5/6	0	0	30

Penyelesaian mungkin dasar kedua dapat dibaca secara langsung dari tabel kedua. Dengan menetapkan F2 = 0 dan x_1 = 0 kita ditinggali suatu matrik identitas yang memberikan x_1 = 6 s_2 = 10, dan s_3 = 16. Elemen terakhir dalam baris terakhir (hal ini, 30) merupakan harga dari fungsi objektif pada penyelesaian mungkin dasar yang kedua.

4. Optimisasi

Fungsi objektif dimaksimumkan kalau tidak terdapat indicator negative dalam baris terakhir. Dengan mengubah dasar dan pivoting terus menerus menerus kaidah diatas sampai ini dicapai. Karena -4/3 dalam kolom kedua merupakan satu-satunya indikator negative, maka x2 dimasukan ke dalam dasar ; = kolom 2 menjadi kolom pivotnya. Dengan membagi kolom konstan dengan kolom pivot memperlihatkan bahwa rasio terkecil adalah dalam baris kedua, jadi 10/3 menjadi elemen pivot yang baru. Karena vector satuan dengan 1 dalam baris keduanya adalah dibawah s2, maka s2 akan meninggalkan dasar untuk mempivot.

i. **Tabel 4.4** (Kalikan s_2 dengan 3/10)

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Konstren
1	**1/3**	1/6	0	0	6
0	**1**	**-1/4**	**3/10**	**0**	**3**
0	**10/3**	-1/3	0	1	16
0	**-4/3**	5/6	0	0	30

ii. Kemudian kurangkan 1/3 kali baris 2 dari baris 1, 10/3 kali baris 2 dari baris 3, dan tambahkan 4/3 kali baris 2 ke baris 4 menghasilkan tabel 5.5.

Tabel 5.5.

x_1	x_2	s_1	S_2	s_3	Konstren
1	0	¼	-1/10	0	**5**
0	**1**	-1/4	3/10	0	**3**
0	0	½	-1	**1**	**6**
0	0	½	2/5	0	**34**

Penyelesaian mungkin dasar yang ketiga dapat dibaca secara langsung dari tabel tersebut. Karena tidak terdapat indikator negative yang tertinggal dalam baris terakhir, ini merupakan penyelesaian optimal.

Elemen terakhir dalam baris terakhir menunjukan bahwa pada x1 = 5, x2 = 3, s_1 = 0, s_2 = 0, dan s_3 = 6, dengan fungsi objektif tersebut mencapai suatu maksimum pada Z = 34. Dengan s1 = 0 dan s2 = 0, tidak terdapat slack dalam 2 konstren yang pertama dan dua input yang pertama semuanya habis. Akan tetapi, dengan s3 = 6, 6 unit dari input yang ketiga akan tersisa tidak dipakai.

Contoh 5.4

Gunakan algoritma simplex untuk menyesuaikan sistem persamaan dan tidak persamaan berikut.

Maksimumkan: $Z = 3y_1 + 4y_2$

Terikat pada $2{,}5y_1 + y_2 \leq 20$ $\qquad$ $y_1 + 2y_2 \leq 16$

$3y_1 + 3y_2 \leq 30$ $\qquad$ $y_1, y_2 \geq 0$

Jawaban :

1. Buatlah tabel simplex permulaan.
   i. Tamabahkan variable slack pada konstren untuk membuatnya menjadi persamaan.

   $2{,}5y_1 + y_2 + s_1 = 20, \quad 3y_1 + 3y_2 + s_2 = 30, \quad y_1 + 2y_2 + s_3 = 15$

   ii. Nyatakan persamaan-persamaan tersebut dalam bentuk metriks.

$$\begin{vmatrix} 2{,}5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 \\ 30 \\ 16 \end{vmatrix}$$

   iii. Bentuklah tebel simplex permulaan yang disusun dari matriks koefesien dari persamaan konstren dan vektor kolom konstan diletekkan di atas suatu baris indikator yang adalah negatif dari koefisien-koefisien fungsi obyektif dengan koefisien nol untuk variable slack.

Tabel 5.6 (Tabel permulaan) :

y_1	y_2	s_1	s_2	s_3	Konstren
5/2	**1**	1	0	0	20……20/1
3	**3**	0	1	0	30……30/3
1	**2**	**0**	**0**	**1**	**16……16/2 (terkecil)**
-3	**-4**	0	0	0	0

Dengan menetapkan y1 = y2 = 0, menyelesaikan mungkin dasar yang yang pertama adalah s1 = 20, s2 = 30, dan s3 = 16. Pada penyelesaian mungkin dasar yang pertama tersebut, Z = 0.

2. Merubah dasar. Indikator negatif dengan harga absolute terbesar (anak panah) menentukan kolom pivot. Rasio pemindahan yang terkecil yang muncul dan pembagian elemen-elemen kolom konstan dengan elemen-elemen kolom privot menentukan baris pivot. Jadi, 2 menjadi elemen pivot dan kolom pivot.

3. Pivot.
   i. Ubah elemen pivot menjadi 1 dengan mengalikan baris 3 dengan ½

Tabel 5.6

y1	y2	s1	s1	s3	Konstren
5/2	**1**	1	0	0	20
3	**0**	1	0	0	30
½	**1**	**0**	**0**	**½**	**8 =16/2 (terkecil)**
-3	**-4**	0	0	0	0

   ii Bereskan kolom pivot dengan mengunakan baris 3 dari baris 1 , 3 kali baris 3 dari baris 2, dan tambahkan 4 kali baris 3 ke baris 4.

Tabel 5.7

y1	y2	s1	s1	s3	Konstren
2	0	1	0	- ½	12
3/2	**0**	**0**	**1**	**- 3/2**	**6 (pembagian terkecil)**
½	1	0	0	½	8
-1	0	0	0	2	32

4. Ubahlah dasar dan pivotnya lagi. Kolom$_1$ adalah kolom pivot, baris$_2$ baris pivot, dan 3/2 adalah elemen pivot.

   i. Kalikan baris $_2$ dengan 2/3.

Tabel 5.8

y1	y2	s1	s1	s3	Konstren
2	0	1	0	-1/2	12
1	**0**	**0**	**2/3**	**-1**	**4**
½	1	0	0	½	8
-1	0	0	0	2	32

   ii. Bersihkan kolom pivot dengan mengurangkan 2 kali baris 2 dari baris 1, ½ kali baris 2 dari baris 3, dan tambahkan baris 2 ke baris 4.

Tabel 5.9 (Tabel terakhir).

y1	y2	s1	s2	s3	Konstren
0	0	**1**	-4/3	3/2	**4**
1	0	0	2/3	-1	**4**
0	**1**	0	-1/3	1	**6**
0	0	0	2/3	1	**36 (hasil yg dicari)**

Karena tidak terdapat indikator negative yang tertinggal, tebel terakhir telah dicapai. Dengan mengoreksi fakta bahwa vektor-vektor dari matriks indentitas adalah tidak pada tempatnya (out of order), $y_1 = 4$, $y_2 = 6$, $s_1 = 4$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$. dan $Z = 36$.

Contoh 5.5.

Maksimumkan $Z = 30x_1 + 24x_2 + 60x_3$

Terikat pada:

$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 30$

$2x_1 + 2x_2 + 10x_3 \leq 50, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Jawaban :

Pertama, tambahkan veriabel-veriabel slack dan nyatakan persamaan-persamaan konstren dalam bentuk matriks.

$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + s_1 = 30$

$2x_1 + 2x_2 + 10x_3 + s_2 = 50$

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 10 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x2 \\ x3 \\ s1 \\ s2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Kemudian, buatlah tabel permulaan:

Tabel 5.10 (Tabel permulaan):

x1	x2	x3	s1	s2	Konstren
6	3	**5**	1	0	30
2	**2**	**10**	**0**	**1**	**50**
-30	-24	**-60**	0	0	0

Dengan mengacu ke contoh sebelumnya, maka diperoleh:

(1) Kalikan baris 2 dengan 1/10.

x1	x2	x3	s1	s2	Konstren	
6		3	**5**	1	0	30
1/5		**1/5**	**1**	**0**	**1/10**	**5**
-30		-24	**-60**	0	0	0

(2) Tabel berikutnya:

x1	x2	x3	s1	s2	Konstren
5	**2**	**0**	**1**	**-1/2**	**5**
1/5	1/5	1	0	1/10	5
-18	-12	0	0	6	300

(3) Kalikan baris 1 dengan 1/5.

x1	x2	x3	s1	s2	Konstren
1	**2/5**	**0**	**1/5**	**-1/10**	**1**
1/5	1/5	1	0	1/10	5
-18	-12	0	0	6	300

(4) Tabel berikutnya:

x1	x2	x3	s1	s2	Konstren
1	**2/5**	**0**	**1/5**	**-1/10**	**1**
0	**3/25**	1	-1/25	3/25	24/25
0	**-24/5**	0	18/5	21/5	318

(5) Kalikan baris 1 dengan 5/2

x1	x2	x3	s1	s2	Konstren
5/2	**1**	**0**	**½**	**-1/4**	**5/2**
0	**3/25**	1	-1/25	3/25	24/5
0	**-24/5**	0	18/5	21/5	318

(6) Tabel berikutnya (tabel terakhir):

x1	x2	x3	s1	s2	Konstren
5/2	**1**	0	1/2	-1/4	**5/2**
-3/10	0	**1**	-1/10	3/20	**9/2**
12	0	0	6	3	**330**

Dalam kasus ini $x_1 = 0$, $x_2 = 2{,}5$, $x_3 = 4{,}5$ $s_1 = 0$, $s_2 = 0$ dan $Z = 330$.

5.3 Algoritma Simpleks Minimum

Apabila Algoritma simplek digunakan untuk mencari suatu harga minimal, harga negatif yang dihasilkan oleh variable surflus memberikan suatu persoalan khusus. Lihat Contoh 4. Seringkali akan lebih mudah untuk menyelesaikan soal-soal minimasi dengan memakai dual yang dibicarakan dalama Bab sebelumnya.

Contoh 5.6

Algoritma Simplek digunakan dibawah ini untuk meminimumkan biaya. Data tersebut adalah minimumkan $Z = 2x1 + 4x2$ dibawah konstren-konstren:

$2x1 + 4x2 \geq 14$ $\qquad$ $x1 + 3x2 \geq 18$

$x1 + x2 \geq 12$ $\qquad$ $x1, \; x2 \geq 0$

1. Tabel Simplek Permulaan (sedikit dimodifikasi)

   i. Ubahlah pertidaksamaan-pertidaksamaan menjadi persamaan-persamaan dengan mengurangkan variable surflus.

   $2x1 + x2 - s1 = 14$

   $x1 + x2 - s2 = 12$

   $x1 + 3x2 - s3 = 18$

   ii. Nyatakan persamaan-persamaan konstren dalam bentuk matrik

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}$$

   Dari matrik tersebut jelas bahwa jika $x1 = 0$ dan $x2 = 0$ seperti dalam tabel simplek permulaan untuk maximisasi, penyelesaian dasar tidak akan mungkin karena $s1 = -14$, $s2 = -12$, $s3 = -18$ dan harga negatif adalah tidak mungkin (Non Veasible). Untuk mengatasi persoalan tersebut harus dimasukan variable-variabel buatan (Artivisial Variabel).

   iii. Tambahkan variabel-variabel buatan. Variabel buatan ($ai > 0$) adalah suatau variable kosong (dumi variable) yang ditambahkan dengan maksud khusus untuk menghasilkan suatu penyelsaian mungkin dasar permulaan.

Variabel tersebut tidak mempunyai arti ekonomi. Suatu variable buatan yang terpisah ditambahkan untuk masing-masing pertidak samaan "lebih besar atau sama dengan" asal.

Jadi :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}$$

2. Table Simplek Permulaan yang disesuaikan untuk minimisasi.
   i. Buatlah tabel Simplek Permulaan dengan meletakan matrik koefisien dan vector kolom dari konstan di atas dengan menambahkan nilai –M pada tujuan yang akan dicapai (fungsi dari Z), untuk meyakinkan bahwa 'A' akan dikeluarkan dari penyelesaian optimal. Baris indikator adalah negatif dari koefisien-koefisien fungsi objektif. Fungsi objektif mempunyai koefisien-koefisien nol.

Tabel 5.11.

x_1	X_2	s_1	s_2	S_3	A_1	A_2	A_3	*Konstren*
2	1	-1	0	0	1	0	0	14
1	1	0	-1	0	0	1	0	12
1	3	0	0	-1	0	0	1	18
-2	-4	0	0	0	-M	-M	-M	

Indikator

   ii. Kemudian pindahkan M dari kolom, variable buatan dengan menambahkan 'm kali (baris 1 + baris 2 + baris 3)' ke baris 4. Ini akan memberikan tabel permulaan.

Tabel 5.12.

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	A_1	A_2	A_3	*Konstren*
2	**1**	-1	0	0	1	0	0	14
1	**1**	0	-1	0	0	1	0	12
1	**3**	**0**	**0**	**-1**	**0**	**0**	**1**	**18**
4M-2	**5M-4**	-M	-M	-M	0	0	0	44M

Penyelesaian mungkin dasar yang pertama dapat dibaca secara langsung dari tabel permulaan tersebut. Dengan mengandaikan $x_1 = x_2 = s_1 = s_2 = s_3 = 0$, penyelesaian mungkin dasar yang pertama adalah : A1 = 14, A2 = 12, A3 = 18 dan fungsi objektifnya adalah 44 M suatu bilangan besar yang tidak mungkin untuk menurunkan biaya, carilah perubahan dasar.

3. Elemen Pivot

i. Untuk minimisasi, indikator positif yang terbesar akan menentukan kolom pivot dan variable yang memasuki dasar. Karena elemen terakhir dari baris paling bawah 44 M bukan indikator, maka 5M – 4 merupakan indikator positif yang terbesar. Jadi x_2 masuk dasar dan kolom pada x_2 menjadi kolom pivot (kolom yang **ditebalkan**).

ii. Baris pivot dan variable yang meninggalkan dasar ditentukan oleh rasio terkecil yang dihasilkan dari pembagian elemen-elemen dari kolom pivot persis seperti untuk soal maksimasi. Karena 18/3 = 6 merupakan rasio terkecil yang dihasilkan maka baris 3, maka baris ini dipilih menjadi baris pivot. Selanjutnya pertemuan baris ini dengan kolom $\mathbf{x_3}$ (yaitu angka 3) akan menjadi titik acuan pembagian penyelesaian baris dan kolom yang lain (baris 3 yang **ditebalkan**).

4. Pivoting

i. Reduksikan elemen pivot menajadi 1, kalikan baris 3 dengan 1/3.

Tabel 5.13.

X_1	x_2	s_1	s_2	s_3	A_1	A_2	A_3	*Konstren*
2	**1**	-1	0	0	1	0	0	14
1	**1**	0	-1	0	0	1	0	12
1/3	**1**	**0**	**0**	**-1/3**	**0**	**0**	**1/3**	**18/3 = 6**
4M-2	**5M-4**	-M	-M	-M	0	0	0	44M

ii. Bereskan kolom pivot untuk semua baris dengan mengacu ke baris 3.

Tabel 5.14.

X_1	X_2	s_1	s_2	s_3	A_1	A_2	A_3	*Konstren*
5/3	**0**	**-1**	**0**	**1/3**	**1**	**0**	**-1/3**	**8**
2/3	0	0	-1	1/3	0	1	-1/3	6
1/3	1	0	0	-1/3	0	0	1/3	6
(7M-2)/3	0	-M	-M	(2M-4)/3	0	0	(-5M+4)/3	14M+24

5. Pengulangan (Reiteration)

Selama masih ada indikator positif, proses tersebut berjalan terus. Pivot yang baru menjadi kolom 1 (karena positif terbesar) dan baris 1 (karena hasil pembagian terkecil). Semua elemen pivotnya pada baris 1 dibagi dengan 5/3.

Tabel 5.15.

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	A_1	A_2	A_3	*Konstren*
1	**0**	**-3/5**	**0**	**1/5**	**3/5**	**0**	**-1/5**	**24/5**
2/3	0	0	-1	1/3	0	1	-1/3	6
1/3	1	0	0	-1/3	0	0	1/3	6
(7M-2)/3	0	-M	-M	(2M-4)/3	0	0	(-5M+4)/3	14M+24

6. Bereskan semua baris dengan mengacu ke baris 1 dan kolom 1

Tabel 5.16

X_1	x_2	s_1	s_2	s_3	A_1	A_2	A_3	*Konstren*
1	0	**-3/5**	0	1/5	3/5	0	-1/5	24/5
0	**0**	**2/5**	**-1**	**1/5**	**-2/5**	**1**	**-1/5**	**14/5**
0	1	**1/5**	0	-2/5	-1/5	0	2/5	22/5
0	0	**(2M-2)/5**	-M	(M-6)/5	(-7M+2)/5	0	(-6M+6)/5	(14M+136)/5

7. Bentuk pivot baru pada baris 2 dan kolom 3

Tabel 5.17

X_1	X_2	s_1	s_2	s_3	A_1	A_2	A_3	*Konstren*
1	0	**-3/5**	0	1/5	3/5	0	-1/5	24/5
0	**0**	**1**	**-5/2**	**1/2**	**-1**	**5/2**	**-1/2**	**7**
0	1	**1/5**	0	-2/5	-1/5	0	2/5	22/5
0	0	**(2M-2)/5**	-M	(M-6)/5	(-7M+2)/5	0	(-6M+6)/5	(14M+136)/5

8. Bereskan semua baris dengan mengacu ke baris 2 dan kolom 3

Tabel 5.18

X_1	X_2	s_1	s_2	s_3	A_1	A_2	A_3	*Konstren*
1	0	0	-3/2	½	0	2/3	- ½	9
0	0	1	-5/2	½	1	5/2	- ½	7
0	1	0	½	- ½	0	½	½	3
0	0	0	-1	-1	-M	-M+1	-M+1	30

Dengan semua indikator negatif, suatu penyelesaian mungkin yang optimal, telah dicapai.Dengan memisahkan matriks identitas, dan memperhatikan bahwa vektor satuan untuk x2 dan s1 dibalik, penyelesaian mungkin dasar optimal tersebuy bicara secara langsung dari keempat : $X_1 = 9$, $X_2 = 3$, s1= 7, s2 = 0 dan s3 = 0. Harga fungsi objektif (Z) ditunjukan oleh elemen terakhir dari baris terakhir, dimana Z = 30.

Beberapa hal berguna untuk dicatat :

1. Dengan s2 = s3 = 0 kebutuhan kedua dan ketiga dipenuhi secara tepat. Tidak terdapat surflus. Dengan s1 = 7, kebutuhan pertama kelebihan (over fullfiled) dengan 7 unit.
2. Harga absolute dari indikator untuk variable-variabel surflus memberikan harga marjinal atau harga bayangan dari konstren. Dengan indikator untuk s1 = 0 pengurangan 1 unit dalam kebutuhan gizi yang pertama tidak akan mengurangi biaya. Akan tetapi, pengurangan 1 unit dalam kebutuhan gizi yang kedua atau ketiga akan mengurangi biaya sebesar s1, karena harga absolut dari indikator-indikator untuk s2 dan s3 adalah 1. Sebagaimana dalam hal harga marjinal, biaya total akan sama dengan jumlah dari bermacam kebutuhan x harga bayangannya masing-masing.
3. Indikator dari variable-variable buatan semuanya adalah negatif dalam tabel terakhir. Ini harus selalu cocok untuk suatu penyelesaian optimal.
4. Elemen-elemen koefisien dari variable surflus (s1, s2, s3) selalu sama dengan negatif dari elemen-elemen koefisien untuk variable-variabel buatannya yang sesuai (A1, A2, A3). Ini harus cocok dalam setiap tabel yang beruntun dan dapat membantu dalam menemukan kesalahan matematis.
5. Suatu variabel buatan tidak akan pernah nampak pada dasar dari tabel terakhir jika suatu penyelesaian mungkin yang optimal telah dicapai.