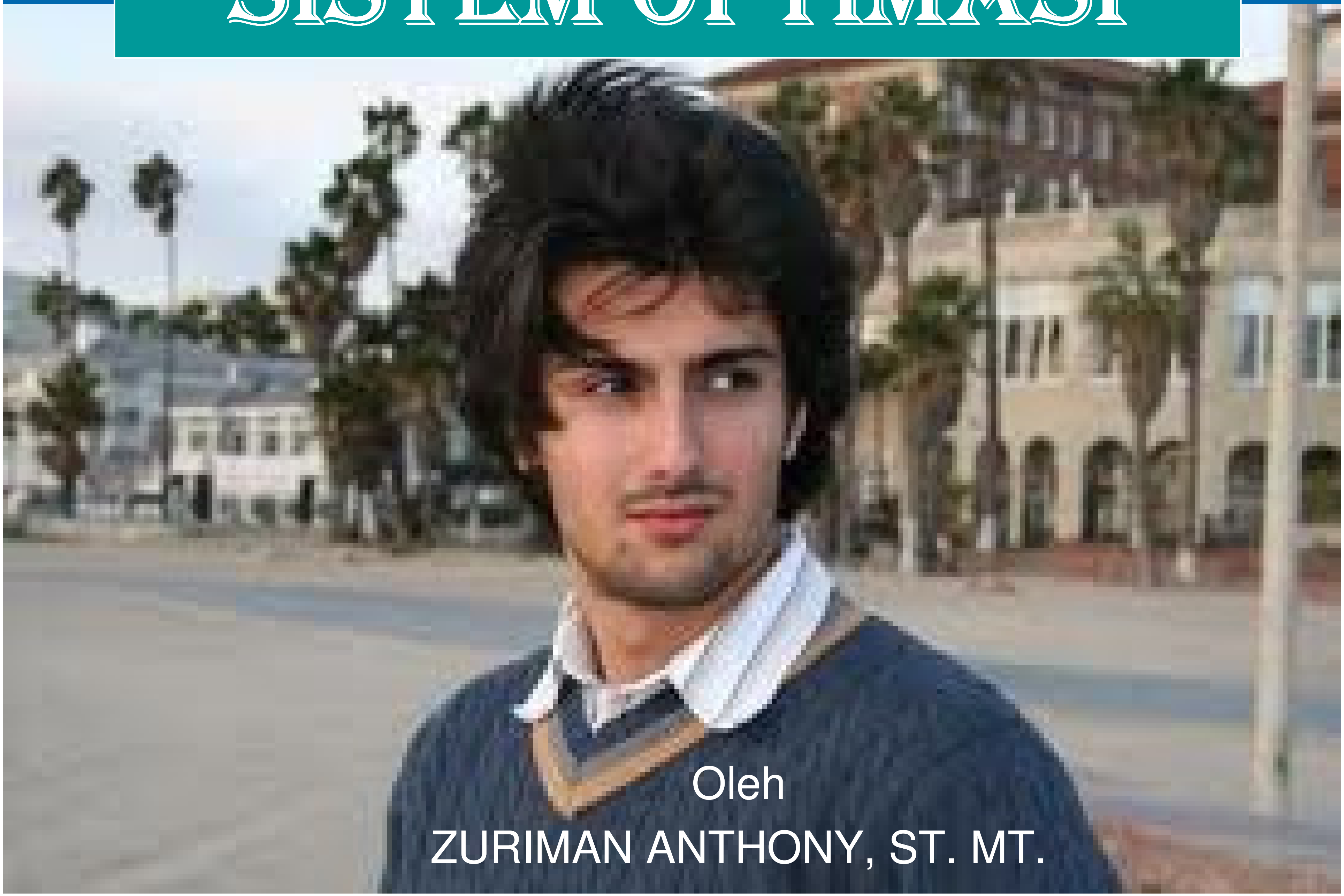
SISTEM OPTIMASI



Oleh
ZURIMAN ANTHONY, ST. MT.

Metode Pengali Lagrange

Untuk menyelesaikan persoalan optimasi persamaan berkendala, maka fungsi lagrange nya adalah:

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_i(x); \lambda \rightarrow pengali Lagrang$$

Dengan ini persoalan optimasi dapat diubah menjadi persoalan optimasi tanpa kendala dalam bentuk :

L (x , λ)

(x*, λ*) → penyelesaian dari L (x ,λ) ⇒ ∇ L (x*,λ*) = 0

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \rightarrow \nabla f(x) + \sum \lambda_1 \nabla h_i(x) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow h_i(x) = 0$$

Lanjutan Metode Pengali Lagrange

<u>Menentukan Fungsi Lagrange:</u>

Dari Persamaan Kendala:

$4Q_1 + 2Q_2 = 60$…………………(dari pers 1)

Dengan fungsi tujuan:

$U = Q_1.Q_2 + 2Q_1$……………..(dari pers 2)

Maka fungsi lagrange menjadi:

$U = Q1.Q2 + 2Q1 + \lambda (60 – 4Q1 - 2Q2)$.

$U = Q1.Q2 + 2Q1 + 60 \lambda – 4Q1. \lambda – 2Q2. \lambda$

Turunan Petama Fungsi = 0.

$dU/dQ_1 = f1 = Q_2 + 2 – 4 \lambda = 0$ ……..(5)

$dU/dQ_2 = f2 = Q_1 - 2 \lambda = 0$ ………(6)

$dU/d \lambda = f \lambda = 60 – 4Q_1 – 2Q_2 = 0$…..(7)

Subtitusikan (5) dan (6):

$dU/dQ_1 = Q_2 + 2 - 4\lambda = 0$ ……(kali 1)

$dU/dQ_2 = Q_1 - 2\lambda = 0$ …..(kali 2)

Jadi : $Q_2 + 2 - 4\lambda = 0$…………(8)

$2Q1 - 4\lambda = 0$ ………..(9)

Jadi dari hasil pers (9) ke pers (8) diperoleh:

$Q2 + 2 - 2Q1 = 0$

$Q2 = 2Q1 - 2$ …………….(10)

Substitusikan (10) ke Persamaan (7):

$dU/d\lambda = 60 - 4Q_1 - 2Q_2 = 0$ … (dari pers 7)

Jadi:

$60 - 4Q1 - 2(2Q1 - 2) = 0$

$60 - 8Q1 + 4 = 0$………$Q1 = 8$.

(maka dari pers 7)….$60 - 4(8) - 2Q2 = 0$

$28 - 2Q2 = 0$ ……..$Q2 = 14$.

$U = Q_1.Q_2 + 2Q_1$

$= (8 \times 14) + (2 \times 8)$ ………$U = 128$

Cara Pembuktian Optimum Maksimum atau Minimum:

Menggunakan Batasan Determinan Hessian (Burder Hessian):

$$H = \begin{vmatrix} 0 & g1 & g2 \\ g1 & f11 & f12 \\ g2 & f21 & f22 \end{vmatrix} \quad \text{apabila: } H > 0 \text{ (Maks)}$$

$$H = 0 \text{ (Tdk)}$$

$$H < 0 \text{ (Min)}$$

Dari persoalan sebelumnya ……..

<u>Menentukan Fungsi Lagrange:</u>

Dari Persamaan Kendala:

4Q1+ 2Q2 = 60……………….(dari pers 1)

Dengan fungsi tujuan:

U = Q1.Q2 + 2Q1……………(dari pers 2)

Maka fungsi lagrange menjadi:

U = Q1.Q2 + 2Q1 + λ (60 – 4Q1- 2Q2).

U = Q1.Q2 + 2Q1 + 60 λ – 4Q1. λ – 2Q2. λ

Turunan Petama Fungsi = 0.

dU/dQ1 = f1 = Q2 + 2 – 4 λ = 0 ……..(5)

dU/dQ2 = f2 = Q1 - 2 λ = 0 ……...(6)

dU/d λ = f λ = 60 – 4Q1 – 2Q2 = 0…..(7)

Maka diperoleh ……..

Turunan Kedua (Turunan dari f_1 dan f_2):

$dU/dQ_1 = f_1 = Q_2 + 2 - 4\lambda = 0$ ……..(1)

$df_1/dQ_1 = f_{11} = 0$ dan $df_1/dQ_2 = f_{12} = 1$.

$dU/dQ_2 = f_2 = Q_1 - 2\lambda = 0$ ………(2)

$df_2/dQ_1 = f_{21} = 1$ dan $df_2/dQ_2 = f_{22} = 0$.

$P_{Q1} = g_1 = 4$ dan $P_{Q2} = g_2 = 2$.

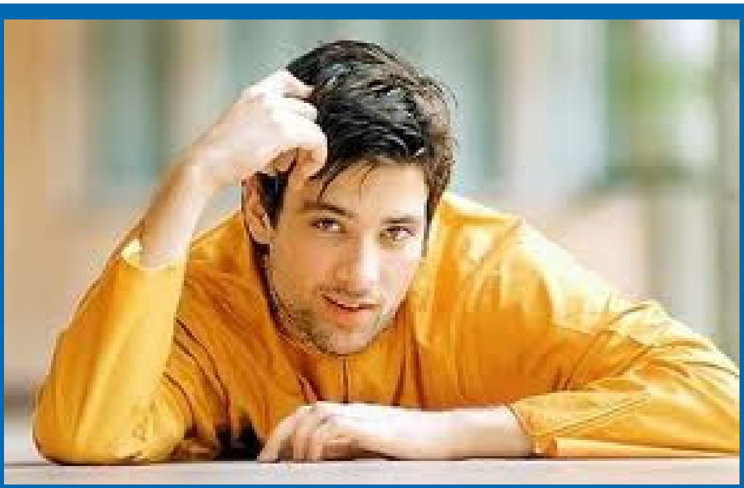
lanjutan

$$H = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} ;$$

$H = 0.0.0 + 4.1.2 + 2.4.1 – (2.0.2) – (1.1.0) – (0.4.4)$ ………$H = 16 > 0$

(Optimum Maksimum)

SOAL-SOAL LATIHAN



(1). $U = 4Q_1.Q_2 – Q_2^2$ ……………………FT

$2Q_1 + 5Q_2 = 11$……………………… PK

(2). $U = B + 6Q_1.Q_2 – BQ_1^2 – Q_2^2$……FT

$Q_1 + BQ_2 = 19$…………………………PK

(3). $U = 16Q_1 + 26Q_2 – Q_1^2 – Q_2^2$……FT

$3Q_1 + 4Q_2 = 26$ ………………………PK

lanjutan

(4). $U = Q_1^2 + 2Q_2^2 + 5Q_1.Q_2$……..FT

$5Q_1 + 10Q_2 = 90$ ………………..PK

Tentukan:

a. Jumlah Q_1 dan Q_2 yang memaksimum Utilitas;
b. Tentukan U optimum;
c. Buktikan bahwa U Optimum Maksimum.

KOMBINASI INPUT DENGAN BIAYA TERKECIL

Formulasi Masalahnya adalah:

Meminimimisasi biaya:

$C = P_1.X_1 + P_2.X_2$………Fungsi Tujuan

(Persamaan Biaya Tetrtentu/ Isocost)

Dengan Kendala Quota Produksi:

$Q_0 = f (X_1, X_2)$…………Pers.Kendala

(Fungsi Produksi Tertentu/ Isoquant)

Fungsi Lagrange:

$C = P_1.X_1 + P_2.X_2 + \lambda\ [\ Q_0 - f\ (X_1,X_2)]$

Menentukan Turunan Pertama Fungsi:

$dC/dX_1 = f_1 = 0$ ……………(1)

$dC/dX_2 = f_2 = 0$ ……………(2)

$dC/d\lambda = f_3 = 0$ ………….(3)

Solusi Optimal:

a. Metode Substitusi;
b. Metode Diferensial Total
c. Metode Pengali Lagrange.

Contoh Soal :

Diketahui Fungsi Tujuan (Fungsi Biaya):

$C = 6\ X_1^2 + 3X_2^2$

Dengan Kendala:

$X_1 + X_2 = 18$

Tentukan :

a. Nilai X_1^*, X_2^* yang Meminimisasi Biaya, dan Besarnya Biaya Minimum C^*;
b. Buktikan C^* adalah Optimum Minimum.

Jawaban:

Fungsi Lagrange:

$$C = 6\,X_1^2 + 3X_2^2 + \lambda\,(\,18 - X_1 - X_2)$$

Turunan Pertama = 0

$dC/\,dX_1 = f_1 = 12X_1 - \lambda = 0$..........(1)

$dC/\,dX_2 = f_2 = 6X_2 - \lambda\ \ = 0$............(2)

$dC/\,d\,\lambda\ \ = f_3 = 18 - X_1 - X_2 = 0$ .....(3)

Cara Pembuktian Optimum Maksimum atau Minimum:

Menggunakan Batasan Determinan Hessian (Burder Hessian):

$$H = \begin{vmatrix} 0 & g1 & g2 \\ g1 & f11 & f12 \\ g2 & f21 & f22 \end{vmatrix} \quad \text{apabila: } H > 0 \text{ (Maks)}$$

$$H = 0 \text{ (Tdk)}$$

$$H < 0 \text{ (Min)}$$

Menentukan Optimum Maksimum/Minimum

$f_1 = 12X_1 - \lambda = 0$…….$f_{11} = 12$ dan $f_{12} = 0$;

$f_2 = 6X_2 - \lambda$ ………$f_{21} = 0$ dan $f_{22} = 6$.

Pers. Kendala: $1.X_1 + 1.\ X_2 = 18$; jadi:

$g_1 = 1$ dan $g_2 = 1$.

Determinan Hessian:

$$H = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 12 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -18 < 0 \text{ (Minimum).}$$

Semoga Sukses