

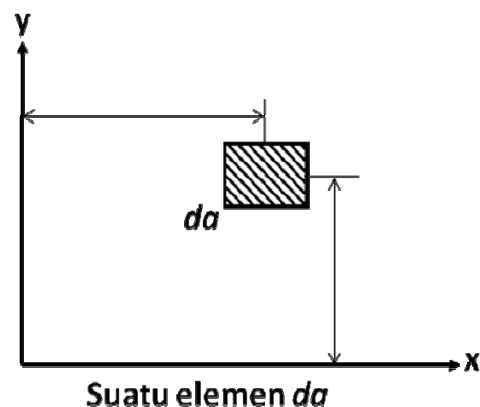
Pertemuan VII

IV. Titik Berat dan Momen Inersia

4.1 Titik Berat Penampang

Momen pertama suatu luasan elemen terhadap suatu sumbu di dalam bidang luasan diberikan dengan produk luasan elemen dan jarak tegak lurus antara elemen dengan sumbu.

Titik berat atau pusat suatu luasan adalah suatu titik dimana luasan terkonsentrasi dan tetap meninggalkan momen yang tidak berubah terhadap sembarang sumbu. Pada umumnya leyak titik berat dinyatakan sebagai jarak pada koordinat “x” dan “y”. Momen pertama dQ_x elemen da terhadap sumbu x adalah $dQ_x = yda$, dan terhadap sumbu y adalah $dQ_y = xda$.



Gambar 4.1 Koordinat Suatu Elemen

Momen pertama luasan terhingga terhadap suatu sumbu di dalam bidang luasan diberikan dengan jumlah momen pertama terhadap sumbu yang sama dari semua elemen luasan yang terdapat dalam luasan. Ini sering dievaluasi dengan cara integral. Jika momen pertama suatu luasan terhingga dinyatakan dengan Q_x , maka :

$$Q_x = \int dQ_x \quad \text{..... (4.1a)}$$

$$Q_y = \int dQ_y \quad \text{..... (4.1b)}$$

Jadi letak titik berat atau pusat suatu luasan dengan koordinat sebagai berikut:

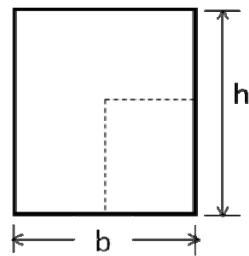
$$\bar{x} = \int \frac{x da}{A} = \frac{Q_y}{A} \quad \text{..... (4.2a)}$$

$$\bar{y} = \int \frac{y da}{A} = \frac{Q_x}{A} \quad \text{..... (4.2b)}$$

dimana A adalah luasan

Luasan dan titik berat beberapa bentuk penampang :

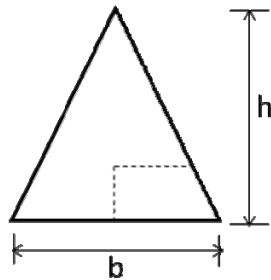
a. Empat persegi panjang



Luas = $b \cdot h$

Titik berat : $x = \frac{1}{2} b$
 $y = \frac{1}{2} h$

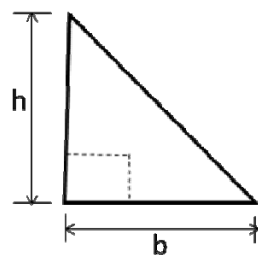
b. Segi tiga sama kaki



Luas = $\frac{1}{2} b \cdot h$

Titik berat : $x = \frac{1}{2} b$
 $y = \frac{1}{3} h$

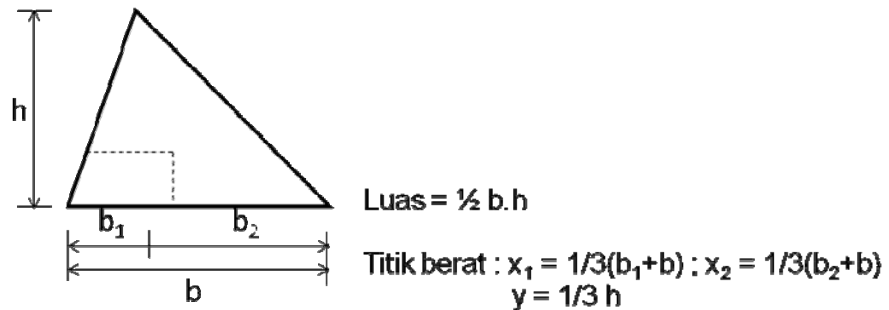
c. Segi tiga siku-siku



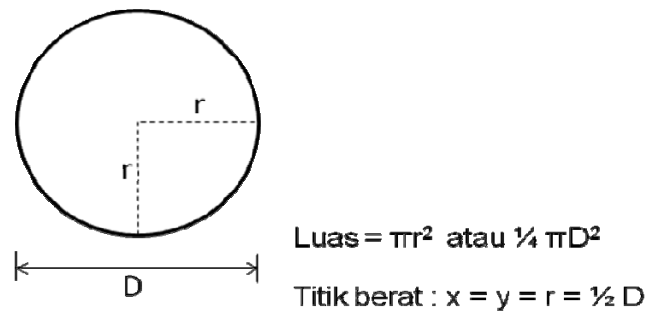
Luas = $\frac{1}{2} b \cdot h$

Titik berat : $x = \frac{1}{3} b$
 $y = \frac{1}{3} h$

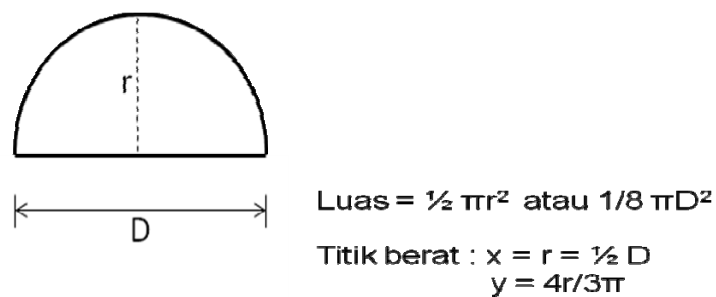
d. Segi tiga tidak sama kaki



e. Lingkaran



f. Setengah lingkaran



Untuk luasan bidang yang tersusun atas n sub-luasan A_i , dengan masing-masing koordinat “x” dan “y” diketahui, titik berat dapat ditentukan dengan cara menganggap luasan penampang sebagai berat, kemudian berdasarkan jumlah momen dari bagian-bagian luasan penampang terhadap garis sembarang sama dengan momen keseluruhan penampang terhadap garis yang sama, maka letak titik berat dapat ditentukan :

$$\sum_{i=1}^n A_i \cdot \bar{x}_i = \left(\sum_{i=1}^n A_i \right) \bar{x} \quad \text{dan} \quad \dots\dots\dots (4.3a)$$

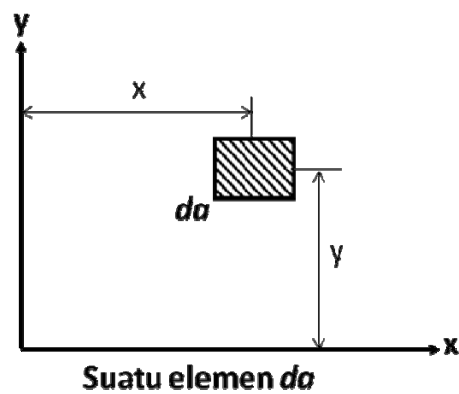
$$\sum_{i=1}^n A_i \cdot \bar{y}_i = \left(\sum_{i=1}^n A_i \right) \bar{y} \quad \dots\dots\dots (4.3b)$$

sehingga,

$$\bar{x}_i = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad \text{dan} \quad \dots\dots\dots (4.3c)$$

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad \dots\dots\dots (4.3d)$$

4.2 Momen Inersia Penampang



Gambar 4.2 Momen Inersia Luasan Hingga

Momen inersia suatu luasan terhingga terhadap suatu sumbu di dalam bidang luasan diberikan dengan jumlah momen inersia terhadap sumbu yang sama dari seluruh elemen yang ada pada luasan terhingga tersebut, dinyatakan dalam bentuk integral :

Momen inersia suatu luasan elemen terhadap suatu sumbu di dalam bidang luasan diberikan dengan produk luasan elemen dan kuadrat jarak (tegak lurus) antara elemen dengan sumbu. Momen inersia elemen terhadap sumbu x adalah $dl_x = y^2 da$ dan terhadap sumbu y adalah $dl_y = x^2 da$

$$I_x = \int dl_x = \int y^2 da \quad \text{dan} \quad \dots\dots\dots (4.4a)$$

$$I_y = \int dl_y = \int x^2 da \quad \dots\dots\dots (4.4b)$$

Untuk suatu bidang yang tersusun atas n sub-bidang A_i , dimana masing-masing momen inersianya terhadap sumbu x dan sumbu y diketahui, maka bentuk integral dapat diganti dengan bentuk penjumlahan :

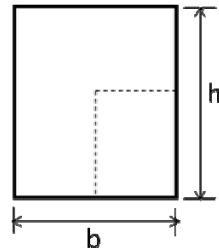
$$I_x = \sum_{i=1}^n (I_x)_i \quad \text{dan} \quad \dots\dots\dots (4.5a)$$

$$I_y = \sum_{i=1}^n (I_y)_i \quad \dots\dots\dots 4.5b).$$

Satuan untuk momen inersia adalah pangkat empat dari satuan panjang.

Momen inersia terhadap sumbu yang melalui titik berat beberapa bentuk penampang :

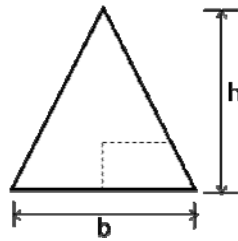
a. Empat persegi panjang



$$I_x = \frac{1}{12} b h^3$$

$$I_y = \frac{1}{12} h b^3$$

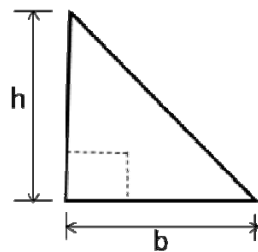
b. Segi tiga sama kaki



$$I_x = \frac{1}{36} b h^3$$

$$I_y = \frac{1}{48} b h^3$$

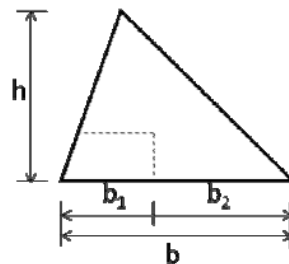
c. Segi tiga siku-siku



$$I_x = \frac{1}{36} b h^3$$

$$I_y = \frac{1}{48} b h^3$$

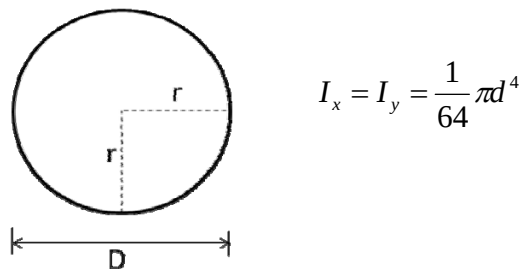
d. Segi tiga tidak sama kaki



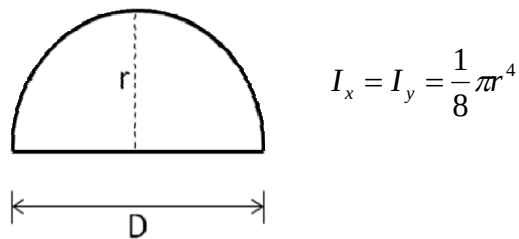
$$I_x = \frac{1}{36} b h^3$$

$$I_y = \frac{1}{36} b h (b^2 - b b_2 + b_2^2)$$

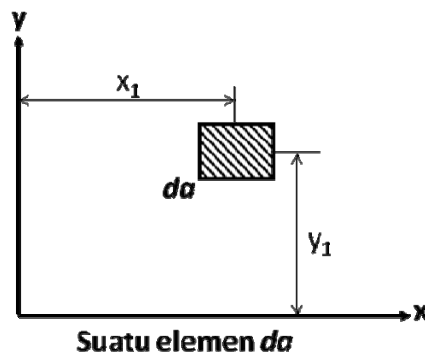
e. Lingkaran



f. Setengah lingkaran



Momen inersia suatu elemen terhadap sumbu yang bergeser dari titik berat, maka momen inersia terhadap sumbu x dan sumbu y adalah :



Gambar 4.3 Elemen Sumbu Yang Bergeser

$$I_x = I_{xG} + A.y_1^2 \quad \text{..... (4.6a)}$$

$$I_y = I_{yG} + A.x_1^2 \quad \text{..... (4.6b)}$$

Jari-jari putaran, jika momen inersia luasan A terhadap sumbu x dinyatakan dengan I_x , maka jari-jari putaran r_x dapat didefinisikan dengan :

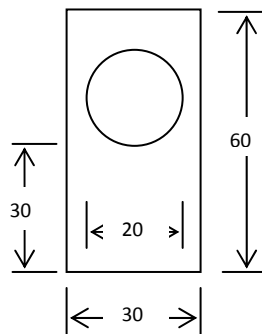
$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad \text{..... (4.7a)}$$

dan jika momen inersia luasan A terhadap sumbu y dinyatakan dengan I_y , maka jari-jari putaran r_y adalah :

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad \text{..... (4.7b)}$$

4.3 Contoh-Contoh Soal dan Pembahasan

Soal 1. Sebuah balok berlubang di tengah lebar balok dengan ukuran dalam cm seperti ditunjukkan pada gambar. Tentukan letak titik berat dan momen inersia balok penampang tersebut.



Penyelesaian :

a. Letak titik berat.

$$x = \frac{x_1 \cdot A_1 - x_2 \cdot A_2}{A_1 - A_2}$$

$$x = \frac{15 \cdot (30 \times 60) - 15 \cdot (\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 20^2)}{(30 \times 60) - (\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 20^2)} = 15 \text{ cm}$$

$$y = \frac{y_1 \cdot A_1 - y_2 \cdot A_2}{A_1 - A_2}$$

$$y = \frac{30 \cdot (30 \times 60) - 40 \cdot (\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 20^2)}{(30 \times 60) - (\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 20^2)} = 27,89 \text{ cm}$$

b. Momen inersia penampang.

$$I_x = I_{x1} - I_{x2}$$

$$I_x = \left(\frac{1}{12} \cdot b_1 \cdot h_1^3 + A_1 \cdot y_1'^2 \right) - \left(\frac{1}{64} \cdot \pi \cdot d^4 + A_2 \cdot y_2'^2 \right)$$

$$I_x = \left(\frac{1}{12} \cdot 30 \cdot 60^3 + (30 \times 60) \cdot 27,89^2 \right) - \left(\frac{1}{64} \cdot \pi \cdot 20^4 + \left(\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 20^2 \right) \cdot 40,79^2 \right)$$

$$I_x = 536355,33 \text{ cm}^4$$

$$I_y = I_{y1} - I_{y2}$$

$$I_y = \left(\frac{1}{12} \cdot b_1^3 \cdot h_1 + A_1 \cdot x_1'^2 \right) - \left(\frac{1}{64} \cdot \pi \cdot d^4 + A_2 \cdot x_2'^2 \right)$$

$$I_y = \left(\frac{1}{12} \cdot 30^3 \cdot 60 + (30 \times 60) \cdot 0^2 \right) - \left(\frac{1}{64} \cdot \pi \cdot 20^4 + \left(\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 20^2 \right) \cdot 0^2 \right)$$

$$I_y = 127146,02 \text{ cm}^4$$