

Pertemuan V, VI, VII

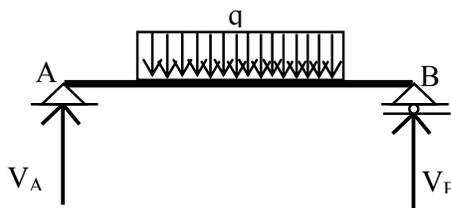
III. Struktur Balok

III.1 Pendahuluan

Balok (*Beam*) adalah suatu anggota struktur yang ditujukan untuk memikul beban transversal saja, suatu balok akan teranalisa dengan secara lengkap apabila diagram gaya geser dan diagram momennya telah diperoleh.

Diagram gaya geser dan momen suatu balok dapat digambarkan apabila semua reaksi luarnya telah diperoleh. Dalam telaah tentang keseimbangan sistem gaya-gaya sejajar yang sebidang, telah dibuktikan bahwa jumlah gaya yang tak diketahui pada sembarang benda-bebas (*free body*) yang dapat dihitung dengan prinsip statika tidak bisa lebih dari dua buah.

Tinjauan balok statis tertentu pada Gambar 3.1. Sejah keseimbangan balok secara keseluruhan yang ditinjau, reaksi yang tak diketahui muncul ada dua, yakni V_A dan V_B . Sebaiknya V_A diperoleh dengan menggunakan persamaan keseimbangan yang menyatakan bahwa jumlah momen di B harus sama dengan nol, dan kemudian V_B diperoleh dengan menggunakan persamaan yang menyatakan bahwa jumlah momen di A harus sama dengan nol, dan akhirnya pengecekan dilakukan dengan menggunakan persamaan yang menyatakan bahwa jumlah gaya vertikal harus sama dengan nol.



Gambar 3.1 Balok Statis Tertentu

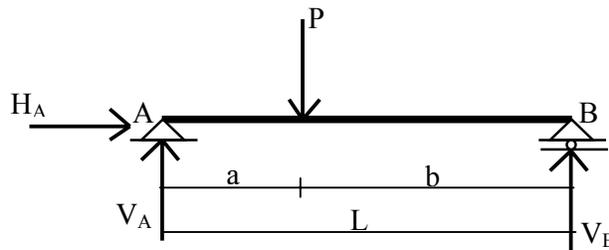
Balok statis tertentu dapat berupa, balok sederhana yang terletak di atas dua tumpuan sendi rol, balok kantilever yang terletak di atas

satu tumpuan jepit dan ujung lainnya lepas, dan balok gantung yang terletak di atas tumpuan sendi rol dengan salah satu atau kedua ujungnya ada perpanjangan.

III.2 Balok Sederhana

1. Reaksi perletakan dan gaya dalam akibat beban terpusat

Balok diletakkan di atas dua tumpuan A dan B dibebani muatan titik P seperti pada Gambar 3.2. Pada struktur demikian reaksi-reaksi terdapat pada perletakan A berupa reaksi vertikal V_A dan horisontal H_A , dan reaksi pada perletakan B berupa reaksi vertikal V_B .



Gambar 3.2 Balok Sederhana Dengan Beban Terpusat

Balok AB akan seimbang, bila :

$$\Sigma H = 0 \rightarrow H_A = 0 \quad \dots\dots\dots 3.1a)$$

$$\Sigma V = 0 \rightarrow V_A - V_B - P = 0 \quad \dots\dots\dots 3.1b)$$

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow V_A \cdot L - P \cdot b = 0 \rightarrow V_A = \frac{P \cdot b}{L} \quad \dots\dots\dots 3.1c)$$

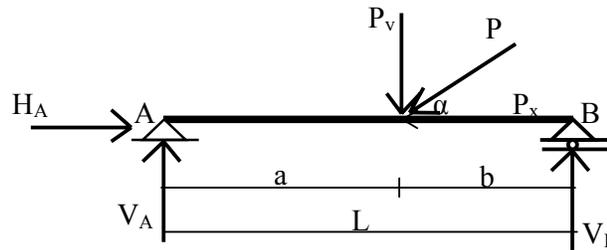
$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow -V_B \cdot L + P \cdot a = 0 \rightarrow V_B = \frac{P \cdot a}{L} \quad \dots\dots\dots 3.1d)$$

Setelah memperhatikan penyelesaian reaksi perletakan balok di atas, maka dapat disimpulkan :

- a. Semua gaya horisontal akan ditahan hanya oleh perletakan sendi saja.
- b. Reaksi-reaksi vertikal didapat dengan menggunakan persamaan momen terhadap salah satu titik perletakan.

Balok AB dibebani muatan terpusat yang miring seperti pada Gambar 3.3. Untuk menentukan reaksi-reaksi perletakan, terlebih

dahulu gaya-gaya diuraikan di dalam sumbu salib xy, sehingga P menjadi P_y dan P_x .



Gambar 3.3 Balok Sederhana Dengan Beban Terpusat Miring

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan keseimbangan gaya horizontal dan momen pada salah satu tumpuan, maka dapat ditentukan reaksi-reaksi perletakan di tumpuan A dan B.

Keseimbangan gaya luar :

$$\Sigma H = 0 \rightarrow H_A - P_x = 0 \rightarrow H_A = P_x \quad \dots\dots\dots 3.2a)$$

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow V_A \cdot L - P_y \cdot b = 0 \rightarrow V_A = \frac{P_y \cdot b}{L} \quad \dots\dots\dots 3.2b)$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow -V_B \cdot L + P \cdot a = 0 \rightarrow V_B = \frac{P_y \cdot a}{L} \quad \dots\dots\dots 3.2c)$$

Keseimbangan gaya dalam :

$$0 \leq x \leq a$$

$$L_x = V_A \quad \dots\dots\dots 3.3a)$$

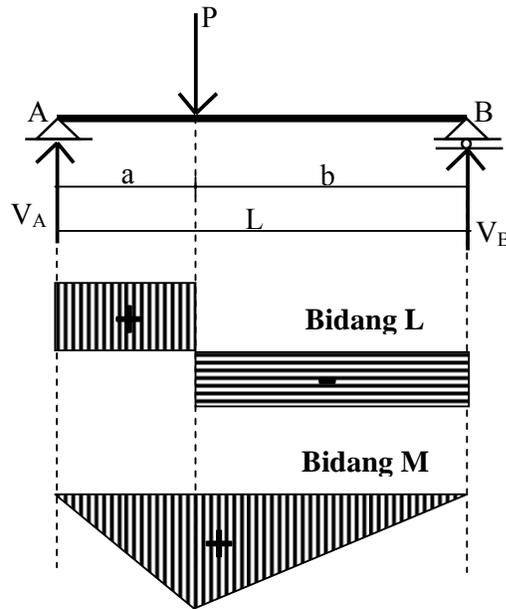
$$M_x = V_A \cdot x \quad \dots\dots\dots 3.3b)$$

$$a \leq x \leq (a + b) / L$$

$$L_x = V_A - P \quad \dots\dots\dots 3.3c)$$

$$M_x = V_A \cdot x - P(x - a) \quad \dots\dots\dots 3.3d)$$

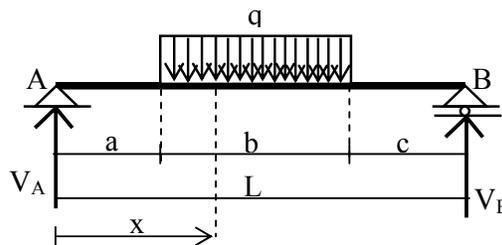
Diagram gaya lintang dan bidang momen dari persamaan di atas dapat dilukiskan sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 3.4.



Gambar 3.4 Diagram Gaya Dalam Balok Sederhana Akibat Beban Terpusat

2. Reaksi perletakan dan gaya dalam akibat beban terbagi rata

Suatu balok AB yang dibebani muatan terbagi rata seperti pada Gambar 3.5. Dengan menggunakan persamaan keseimbangan momen pada salah satu tumpuan, maka dapat ditentukan reaksi-reaksi perletakan di tumpuan A dan B.



Gambar 3.5 Balok Sederhana Dengan Beban Terbagi Rata

Keseimbangan gaya luar :

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow V_A \cdot L - qb(1/2b + c) = 0 \rightarrow V_A = \frac{qb(1/2b + c)}{L} \dots 3.4a$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow -V_B \cdot L + qb(1/2b + a) = 0 \rightarrow V_B = \frac{qb(1/2b + a)}{L} \dots 3.4b$$

Bila $a = 0$, $c = 0$, dan $b = L$, maka balok dibebani muatan terbagi rata penuh, sehingga reaksinya adalah :

$$V_A = V_B = \frac{1}{2} q \cdot L \quad \dots\dots\dots 3.4.c)$$

Keseimbangan gaya dalam :

$$0 \leq x \leq a \quad \dots\dots\dots 3.5a)$$

$$L_x = V_A \quad \dots\dots\dots 3.5b)$$

$$a \leq x \leq (a + b) / L \quad \dots\dots\dots 3.5c)$$

$$L_x = V_A - q(x - a) \quad \dots\dots\dots 3.5d)$$

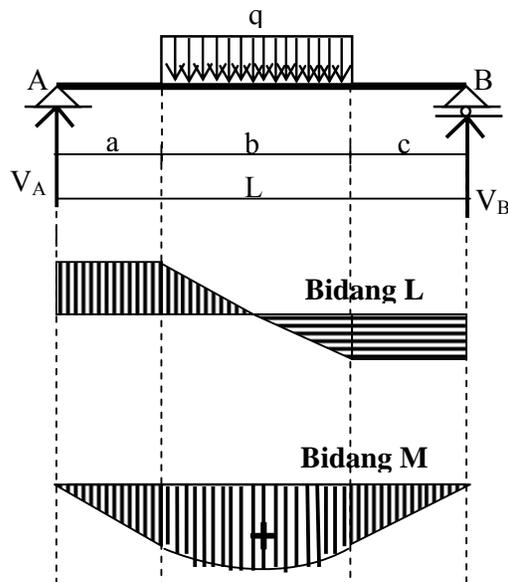
$$M_x = V_A \cdot x - 1/2 q(x - a)^2 \quad \dots\dots\dots 3.5e)$$

$$(a + b) \leq x \leq (a + b + c) / L \quad \dots\dots\dots 3.5e)$$

$$L_x = V_A - q \cdot b \quad \dots\dots\dots 3.5f)$$

$$M_x = V_A \cdot x - q \cdot b(x - 1/2b) \quad \dots\dots\dots 3.5f)$$

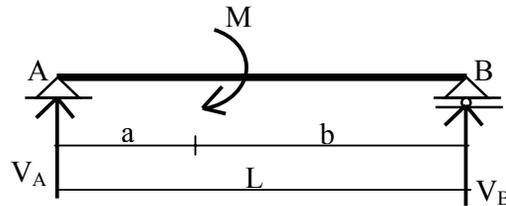
Diagram gaya lintang dan bidang momen dari persamaan di atas dapat dilukiskan sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 3.6.



Gambar 3.6 Diagram Gaya Dalam Balok Sederhana Akibat Beban Terbagi Rata

3. Reaksi perletakan dan gaya dalam akibat beban momen

Balok AB dibebani muatan momen, seperti pada Gambar 3.7. Dengan menggunakan persamaan keseimbangan momen pada salah satu tumpuan, maka dapat ditentukan reaksi-reaksi perletakan di tumpuan A dan B.



Gambar 3.7 Balok Sederhana Dengan Beban Momen

Keseimbangan gaya luar :

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow V_A \cdot L + M = 0 \rightarrow V_A = -\frac{M}{L} \quad \dots\dots\dots 3.6a)$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow -V_B \cdot L + M = 0 \rightarrow V_B = \frac{M}{L} \quad \dots\dots\dots 3.6b)$$

Tanda negatif pada reaksi VB, berarti arahnya ke bawah.

Keseimbangan gaya dalam :

$$0 \leq x \leq a$$

$$L_x = -V_A \quad \dots\dots\dots 3.7a)$$

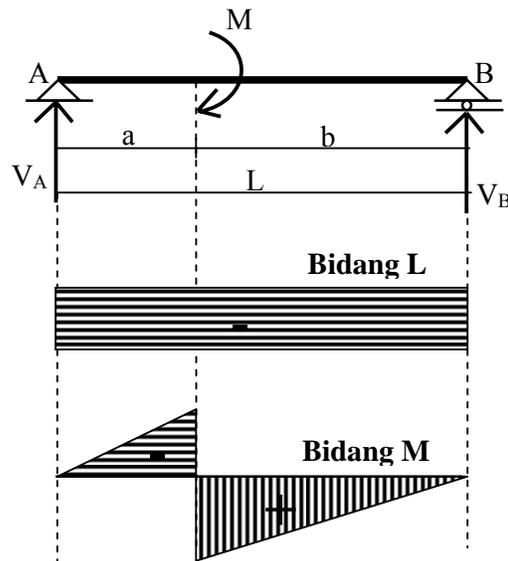
$$M_x = -V_A \cdot x \quad \dots\dots\dots 3.7b)$$

$$a \leq x \leq (a+b)/L$$

$$L_x = -V_B \quad \dots\dots\dots 3.7c)$$

$$M_x = V_B(L-x) \quad \dots\dots\dots 3.7d)$$

Diagram gaya lintang dan bidang momen dari persamaan di atas dapat dilukiskan sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 3.8.



Gambar 3.8 Diagram Gaya Dalam Balok Sederhana Akibat Beban Momen

4. Reaksi perletakan dan gaya dalam akibat beban tak langsung

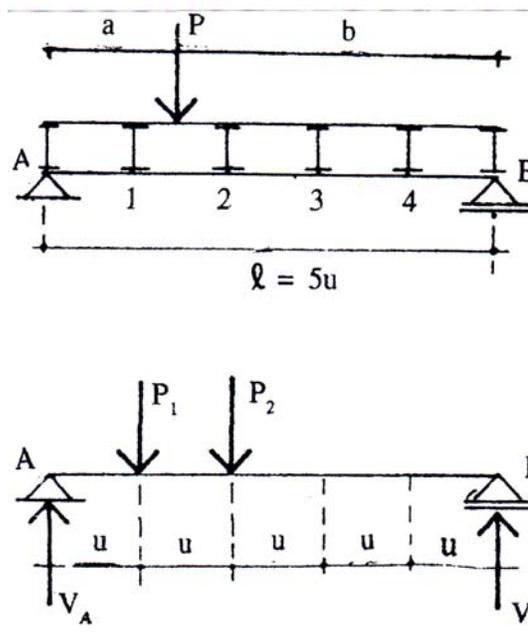
Suatu truktur sederhana dengan muatan tak langsung, seperti pada Gambar 3.9. Menurut pengertian muatan tak langsung beban P dirambatkan pada balok induk melalui balok 1 dan 2. Oleh karena itu beban P perlu diuraikan ke dalam gaya P₁ dan P₂, yaitu gaya yang disalurkan melalui balok anak 1 dan 2.

Uraian gaya P :

$$P_1 = \frac{2u - a}{u} P$$

$$P_2 = \frac{a - u}{u} P$$

Selanjutnya P₁ dan P₂ meneruskan gaya tersebut ke perletakan A dan B melalui balok induk. Besarnya reaksi perletakan pada tumpuan A dan B dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan keseimbangan momen salah satu tumpuan.



Gambar 3.9. Balok Sederhana Dengan Beban Tak Langsung

Keseimbangan gaya luar :

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow V_A \cdot L - P_1 \cdot 4u - P_2 \cdot 3u = 0 \rightarrow V_A = \frac{P_1 \cdot 4u + P_2 \cdot 3u}{L} \dots 3.8a)$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow -V_B \cdot L - P_1 \cdot u + P_2 \cdot 2u = 0 \rightarrow V_B = \frac{P_1 \cdot u + P_2 \cdot 2u}{L} \dots 3.8b)$$

Dengan mensubstitusikan P_1 dan P_2 ke dalam persamaan V_A dan V_B , maka diperoleh :

$$V_A = \frac{P \cdot b}{L} \dots 3.8c)$$

$$V_B = \frac{P \cdot a}{L} \dots 3.8d)$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa reaksi perletakan akibat beban tak langsung sama dengan perhitungan beban secara langsung.

Apabila bebannya berupa muatan terbagi rata, cara menghitung reaksi perletakan tidak berbeda dengan cara muatan langsung.

Keseimbangan gaya dalam :

$$0 \leq x \leq u$$

$$L_x = V_A \quad \dots\dots\dots 3.9a)$$

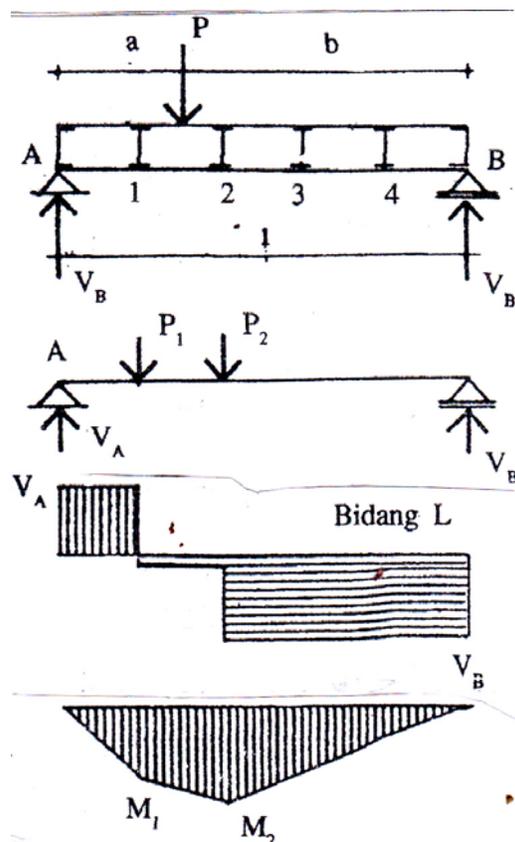
$$M_x = V_A \cdot x \quad \dots\dots\dots 3.9b)$$

$$2u \leq x \leq L$$

$$L_x = -V_B \quad \dots\dots\dots 3.9c)$$

$$M_x = V_B(L-x) \quad \dots\dots\dots 3.9d)$$

Diagram gaya lintang dan bidang momen dari persamaan di atas dapat dilukiskan sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 3.10.

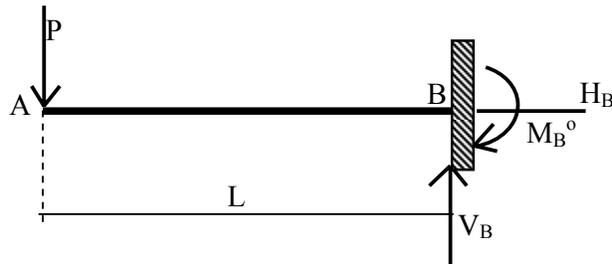


Gambar 3.10 Diagram Gaya Dalam Balok Sederhana Akibat Beban Tak Langsung

III.3 Balok Kantilever

1. Reaksi perletakan dan gaya dalam akibat beban terpusat

Suatu balok kantilever yang dibebani muatan terpusat P , seperti pada Gambar 3.11. Pada struktur demikian, gaya reaksi hanya terdapat pada perletakan jepit B , berupa reaksi vertikal V_B dan momen jepit M_B , dapat dicari dengan menggunakan persamaan statika.



Gambar 3.11 Balok Kantilever Dengan Beban Terpusat

Keseimbangan gaya luar :

$$\Sigma H = 0 \rightarrow H_B = 0 \quad \dots\dots\dots 3.10a)$$

$$\Sigma V = 0 \rightarrow V_B - P = 0 \rightarrow V_B = P \quad \dots\dots\dots 3.10b)$$

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow P.L + M_B = 0 \rightarrow M_B = -P.L \quad \dots\dots\dots 3.10c)$$

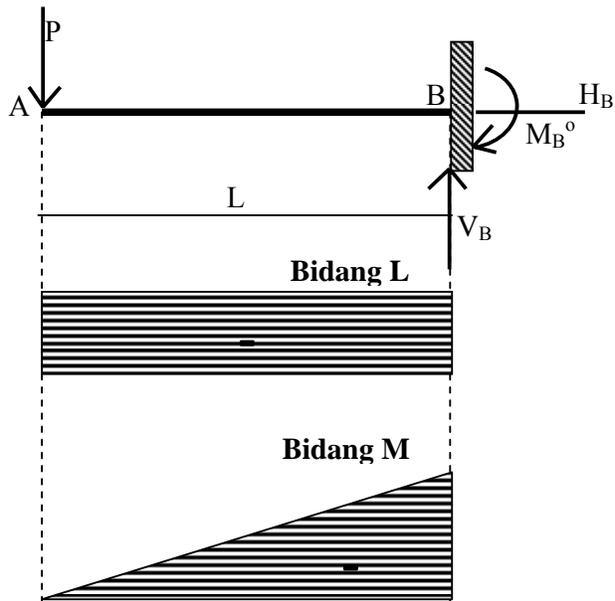
Keseimbangan gaya dalam :

$$L \geq x \geq 0 \quad \dots\dots\dots 3.11a)$$

$$L_x = -P \quad \dots\dots\dots 3.11b)$$

$$M_x = -P.x$$

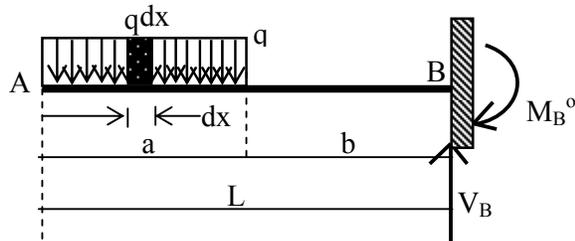
Diagram gaya lintang dan bidang momen dari persamaan di atas dapat dilukiskan sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 3.12.



Gambar 3.12 Diagram Gaya Dalam Balok Kantilever Akibat Beban Terpusat

2. Reaksi perletakan dan gaya dalam akibat beban terbagi rata

Suatu balok kantilever yang dibebani muatan terbagi rata, seperti Gambar 3.13. Dengan menggunakan persamaan statika dapat dicari gaya reaksi vertikal V_B dan momen jepit M_B^o .



Gambar 3.13 Balok Kantilever Dengan Beban Terbagi Rata

Bila pada suatu titik X, sejauh x dari A terdapat elemen $q \cdot dx$, maka dengan menggunakan integrasi untuk seluruh muatan didapat :

$$V_B = \int_0^a q \cdot dx = q \cdot x \Big|_0^a = q \cdot a \quad \dots\dots\dots 3.12a)$$

$$M_B^o = \int_0^a q \cdot dx(L - x) = q(L \cdot x - 1/2x^2) \Big|_0^a = q \cdot a(L - 1/2a) \quad \dots\dots 3.12b)$$

$$\text{Bila } \rightarrow a = L \rightarrow V_B = q \cdot L \rightarrow M_B^o = 1/2 \cdot q \cdot L^2 \quad \dots\dots\dots 3.12c)$$

$$\text{Bila } \rightarrow a = 1/2 \cdot L \rightarrow V_B = 1/2 \cdot q \cdot L \rightarrow M_B^o = 3/8 \cdot q \cdot L \quad \dots\dots\dots 3.12d)$$

Keseimbangan gaya dalam :

$$0 \leq x \leq a \quad \dots\dots\dots 3.13a)$$

$$L_x = -q \cdot x$$

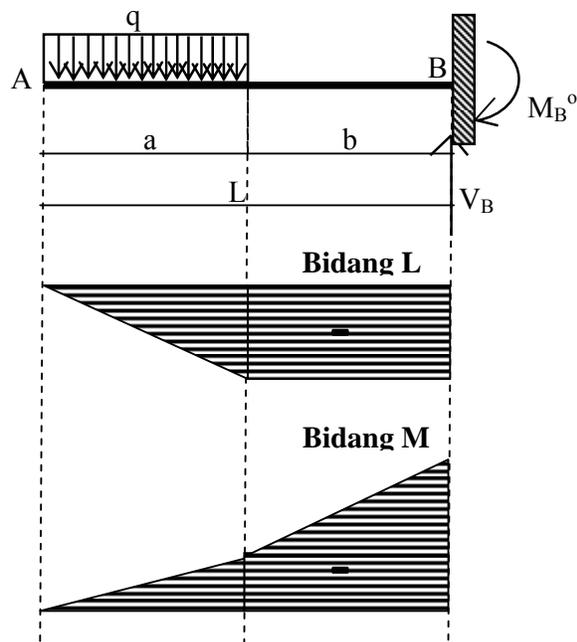
$$M_x = -1/2 q \cdot x^2 \quad \dots\dots\dots 3.13b)$$

$$a \leq x \leq L \quad \dots\dots\dots 3.13c)$$

$$L_x = -q \cdot a$$

$$M_x = -q \cdot a(x - 1/2a) \quad \dots\dots\dots 3.13d)$$

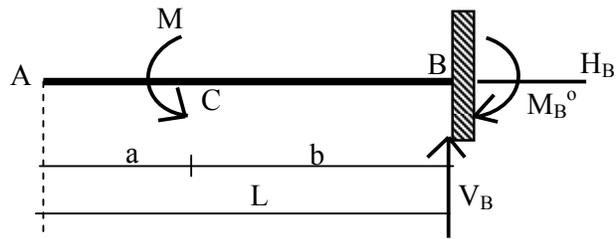
Diagram gaya lintang dan bidang momen dari persamaan di atas dapat dilukiskan sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 3.14.



Gambar 3.14 Diagram Gaya Dalam Balok kantilever Akibat Beban Terbagi Rata

3. Reaksi perletakan dan gaya dalam akibat beban momen

Suatu balok kantilever yang dibebani mutan momen M, seperti Gambar 3.15. Dengan menggunakan persamaan statika dapat dicari gaya reaksi vertikal V_B dan momen jepit M_B^o .



Gambar 3.15 Balok Kantilever Dengan Beban Momen

Keseimbangan gaya luar :

$$\Sigma H = 0 \rightarrow H_B = 0 \quad \dots\dots\dots 3.14a)$$

$$\Sigma V = 0 \rightarrow V_B = 0 \quad \dots\dots\dots 3.14b)$$

$$\Sigma M_B^o = 0 \rightarrow M_B^o = M_1 + M_2 \quad \dots\dots\dots 3.14c)$$

Keseimbangan gaya dalam :

$$0 \leq x \leq a$$

$$L_x = 0 \quad \dots\dots\dots 3.15a)$$

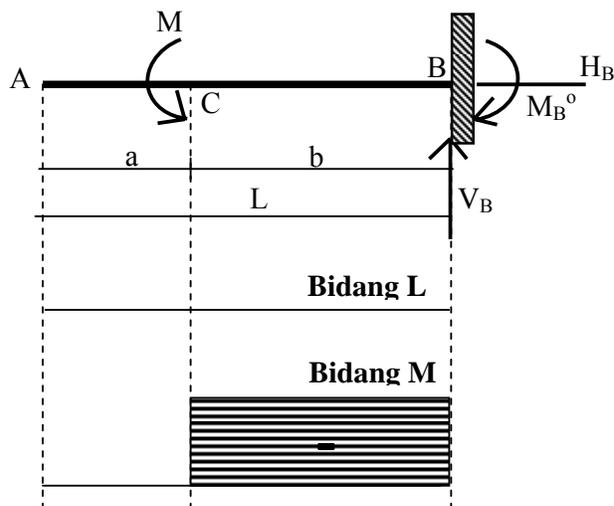
$$M_x = 0 \quad \dots\dots\dots 3.15b)$$

$$a \leq x \leq L$$

$$L_x = 0 \quad \dots\dots\dots 3.15c)$$

$$M_x = M \quad \dots\dots\dots 3.15d)$$

Diagram gaya lintang dan bidang momen dari persamaan di atas dapat dilukiskan sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 3.16.

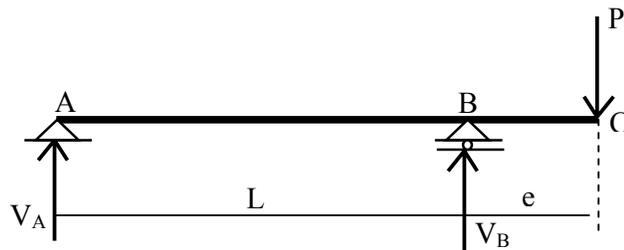


Gambar 3.16 Diagram Gaya Dalam Balok Kantilever Akibat Beban Momen

III.4 Balok Gantung

1. Reaksi perletakan dan gaya dalam akibat beban terpusat

Suatu struktur balok sederhana AC dengan balok gantung BC, seperti pada Gambar 3.17, dibebani muatan P pada ujungnya. Dengan menggunakan persamaan momen pada salah satu tumpuan akan dapat dihitung besarnya reaksi-reaksi di tumpuan Adan B.



Gambar 3.17 Balok Gantung Dengan Beban Terpusat

Keseimbangan gaya luar :

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow V_A \cdot L + P \cdot e = 0 \rightarrow V_A = \frac{-P \cdot e}{L} \dots\dots\dots 3.16a)$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow -V_B \cdot L + P(e + L) = 0 \rightarrow V_B = -\frac{P(e + L)}{L} \dots\dots\dots 3.16b)$$

Keseimbangan gaya dalam :

$$0 \leq x \leq L$$

$$L_x = V_A \dots\dots\dots 3.17a)$$

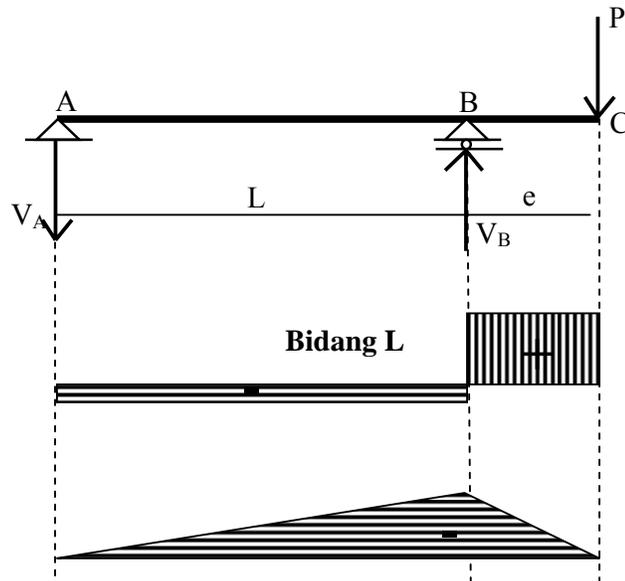
$$M_x = V_A \cdot x \dots\dots\dots 3.17b)$$

$$L \leq x \leq (L + e)$$

$$L_x = P \dots\dots\dots 3.17c)$$

$$M_x = P(x - (L + e)) \dots\dots\dots 3.17d)$$

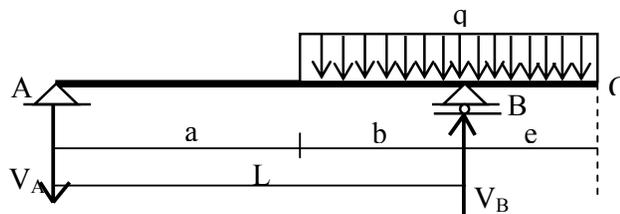
Diagram gaya lintang dan bidang momen dari persamaan di atas dapat dilukiskan sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 3.18.



Gambar 3.18 Diagram Gaya Dalam Balok Gantung Dengan Beban Terpusat

2. Reaksi perletakan dan gaya dalam akibat beban terbagi rata

Suatu struktur balok sederhana AC dengan balok gantung BC, seperti pada Gambar 3.19, dibebani muatan terbagi rata. Dengan menggunakan persamaan momen pada salah satu tumpuan akan dapat dihitung besarnya reaksi-reaksi di tumpuan Adan B.



Gambar 3.19 Balok Gantung Dengan Beban Terbagi Rata

Keseimbangan gaya luar :

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow V_A \cdot L - qb \cdot 1/2 \cdot b + q \cdot e \cdot 1/2 \cdot e = 0$$

$$\rightarrow V_A = \frac{q \cdot (b^2 - e^2)}{2L} \quad \dots 3.18a$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow -V_B \cdot L + q(L + e - a) \cdot ((1/2)(L + e - a) + a) = 0$$

$$\rightarrow V_B = \frac{q \cdot ((L - e)^2 - a^2)}{2L} \quad \dots 3.18b$$

Keseimbangan gaya dalam :

$$0 \leq x \leq a \quad \dots\dots\dots 3.19a)$$

$$L_x = V_A \quad \dots\dots\dots 3.19a)$$

$$M_x = V_A \cdot x \quad \dots\dots\dots 3.19b)$$

$$a \leq x \leq L \quad \dots\dots\dots 3.19c)$$

$$L_x = V_A - q(x-a) \quad \dots\dots\dots 3.19c)$$

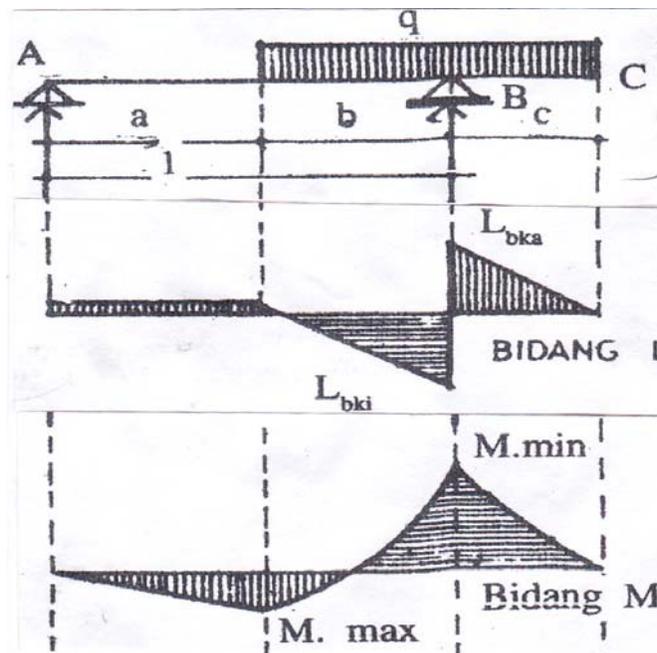
$$M_x = V_A \cdot x - 1/2q(x-a)^2 \quad \dots\dots\dots 3.19.d)$$

$$L \leq x \leq (L+e) \quad \dots\dots\dots 3.19e)$$

$$L_x = q(L+e-x)^2 \quad \dots\dots\dots 3.19e)$$

$$M_x = -1/2q(L+e-x)^2 \quad \dots\dots\dots 3.19f)$$

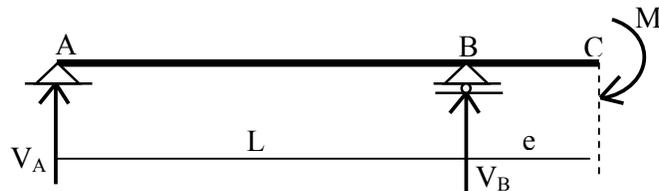
Diagram gaya lintang dan bidang momen dari persamaan di atas dapat dilukiskan sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 3.20.



Gambar 3.20 Diagram Gaya Dalam Balok Gantung Akibat Beban Terbagi Rata

3. Reaksi perletakan dan gaya dalam akibat beban momen

Suatu struktur balok sederhana AC dengan balok gantung BC, seperti pada Gambar 3.21, dibebani muatan momen. Dengan menggunakan persamaan momen pada salah satu tumpuan akan dapat dihitung besarnya reaksi-reaksi di tumpuan Adan B.



Gambar 3.21 Balok Gantung Dengan Beban Momen

Keseimbangan gaya luar :

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow -V_A \cdot L + M = 0 \rightarrow V_A = \frac{M}{L} \quad \dots\dots\dots 3.20a)$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow -V_B \cdot L + M = 0 \rightarrow V_B = \frac{M}{L} \quad \dots\dots\dots 3.20b)$$

Keseimbangan gaya dalam :

$$0 \leq x \leq L \quad \dots\dots\dots 3.21a)$$

$$L_x = V_A \quad \dots\dots\dots 3.21a)$$

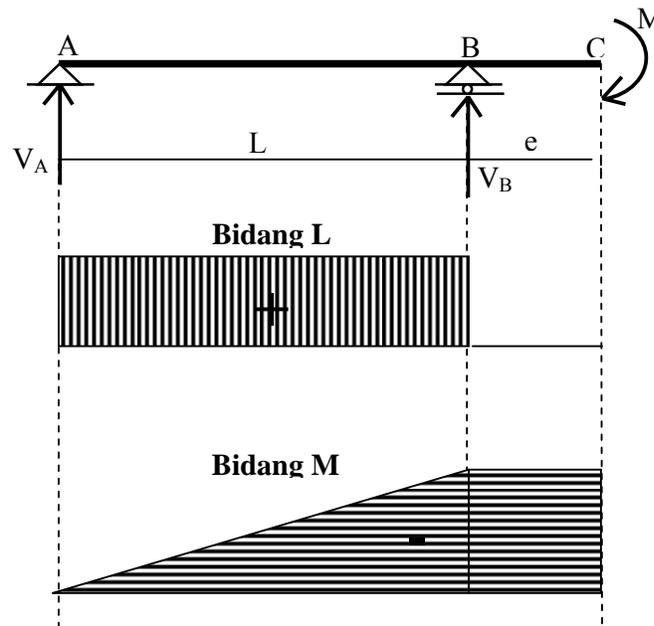
$$M_x = V_A \cdot x \quad \dots\dots\dots 3.21b)$$

$$L \leq x \leq (L+e) \quad \dots\dots\dots 3.21c)$$

$$L_x = 0 \quad \dots\dots\dots 3.21c)$$

$$M_x = -M \quad \dots\dots\dots 3.21d)$$

Diagram gaya lintang dan bidang momen dari persamaan di atas dapat dilukiskan sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 3.22



.Gambar 3.22 Diagram Gaya Dalam Balok Gantung Akibat beban Momen

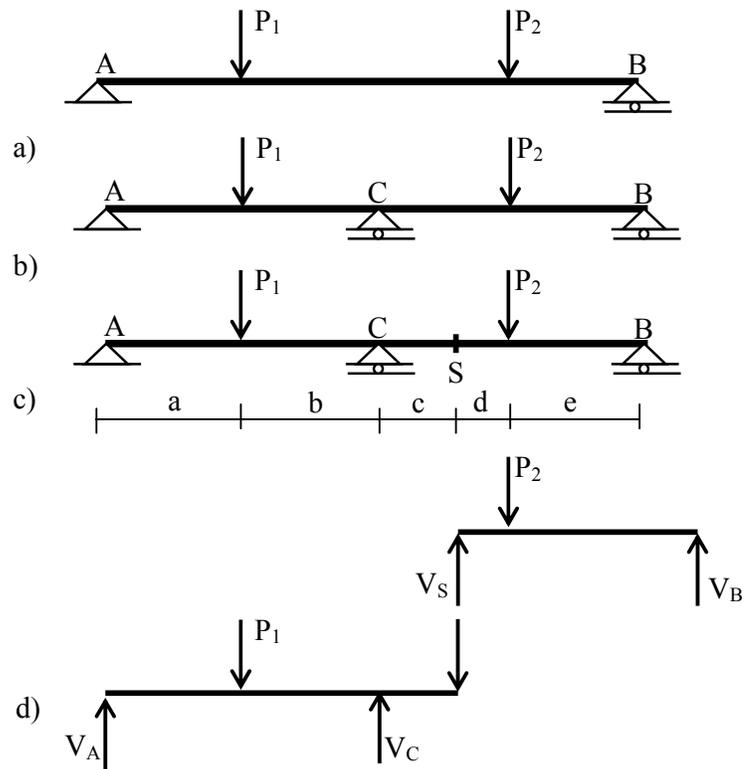
III.5 Konstruksi Balok Bersendi (Gerber)

Konstruksi Gerber merupakan konstruksi balok di atas beberapa tumpuan, yang merupakan gabungan konstruksi balok gantung yang disambung dengan balok lain oleh sendi.

Untuk menghindari timbulnya momen lentur yang besar pada konstruksi yang mempunyai bentang yang lebar, seringkali digunakan penunjang diantara dua perletakan, sehingga konstruksi tersebut terletak diatas tiga perletakan. Dengan adanya perletakan ketiga itu konstruksi menjadi statis tak-tentu. Untuk mengembalikan sifat konstruksi itu menjadi konstruksi statis tertentu digunakan sambungan sendi.

Misalkan suatu konstruksi balok yang terletak di atas tiga perletakan, yaitu satu perletakan sendi dan dua perletakan geser, seperti pada Gambar 3.23. konstruksi dengan perletakan demikian akan menimbulkan empat buah reaksi. Untuk mencari reaksi tersebut diperlukan empat buah persamaan, sedangkan pada persamaan statis tertentu hanya ada tiga persamaan, maka konstruksi harus disambung dengan satu sendi S, agar

dengan demikian terdapat tambahan persamaan, yaitu jumlah momen terhadap sendi S sama dengan nol.



Gambar 3.23 Konstruksi Balok Bersendi

Balok pada Gambar 3.23a, bentangan terlalu panjang, dapat dipasang satu perletakan di antara bentangan. Gambar 3.23b struktur menjadi statis tak-tentu tingkat satu, maka diperlukan satu tambahan sendi agar menjadi statis tertentu. Sendi tabahan diletakkan pada titik S, seperti pada Gambar 3.23c. Dengan demikian balok ACB menjadi suatu struktur yang stabil yang disebut struktur induk. Sedangkan balok SB merupakan bagian yang menumpang pada ACS, yang stabil, disebut struktur anak.

Konstruksi balok pada Gambar 3.23 mempunyai empat buah reaksi, yaitu H_A , V_A , V_B , dan V_C . Sedangkan persamaan reaksi yang dapat diturunkan berupa tiga persamaan statis tertentu ditambah satu persamaan momen terhadap S sama dengan nol. Dengan demikian keempat reaksi tersebut dapat dicari, yaitu menurut persamaan berikut :

$$\Sigma H = 0 \rightarrow H_A = 0 \quad \dots\dots\dots 3.22a)$$

$$\Sigma V = 0 \rightarrow V_A + V_B - P_1 - P_2 = 0 \quad \dots\dots\dots 3.22b)$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow P_1.a - V_C.L_{AC} + P_2.(L_{AB} - e) = 0 \quad \dots\dots\dots 3.22c)$$

$$\Sigma M_S = 0 \rightarrow -V_B.L_{SB} + P_2.d = 0 \quad \dots\dots\dots 3.22d)$$

Dengan empat persamaan tersebut, keempat reaksi dapat dicari, selanjutnya dapat digambarkan diagram gaya dalamnya.

Disamping itu ada cara menghitung menurut uraian seperti pada Gambar 3.23d. Konstruksi tersebut terdiri dari konstruksi induk ACS, dan struktur anak SB. Tentu SB menumpang pada konstruksi ACS.

Oleh karena beban yang bekerja merupakan gaya vertical, maka reaksinya juga berupa reaksi vertikal saja, reaksi horizontal sama dengan nol. Beban pada bagian SB ditumpu oleh perletakan B dan S. Reaksi pada sendi S merupakan beban bagi konstruksi bagian ACS merupakan konstruksi balok dengan pinggul CS. Dengan cara yang sudah dikenal ketiga reaksi perletakannya dapat dihitung dan diperoleh hasilnya.

Pada balok SB :

$$\Sigma M_S = 0 \rightarrow V_B.L_{SB} - P_2.d = 0 \quad \dots\dots\dots 3.23a)$$

$$\rightarrow V_B = \frac{P_2.d}{L_{SB}}$$

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow -V_S.L_{SB} + P_2.e = 0 \quad \dots\dots\dots 3.23b)$$

$$\rightarrow V_S = \frac{P_2.e}{L_{SB}}$$

Pada balok ACS :

$$\Sigma M_C = 0 \rightarrow V_A.L_{AC} - P_1.b + V_S.c = 0 \quad \dots\dots\dots 3.23c)$$

$$\rightarrow V_A = \frac{P_1.b - V_S.c}{L_{AC}}$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow -V_C.L_{AC} + P_1.a + V_S.(L_{AC} + c) = 0 \quad \dots\dots\dots 3.23d)$$

$$\rightarrow V_C = \frac{P_1.a + V_S.(L_{AC} + c)}{L_{AC}}$$

Konstruksi balok di atas merupakan gabungan balok gantung ACS dan balok sederhana SB, sehingga persamaan momen lentur dan gaya lintang dapat diselesaikan seperti biasanya.

Persamaan gaya dalam pada bagian CS bila diturunkan dari kiri, sebagai berikut :

$$L_x = V_A - P_1 + V_C \quad \dots\dots\dots 3.24a)$$

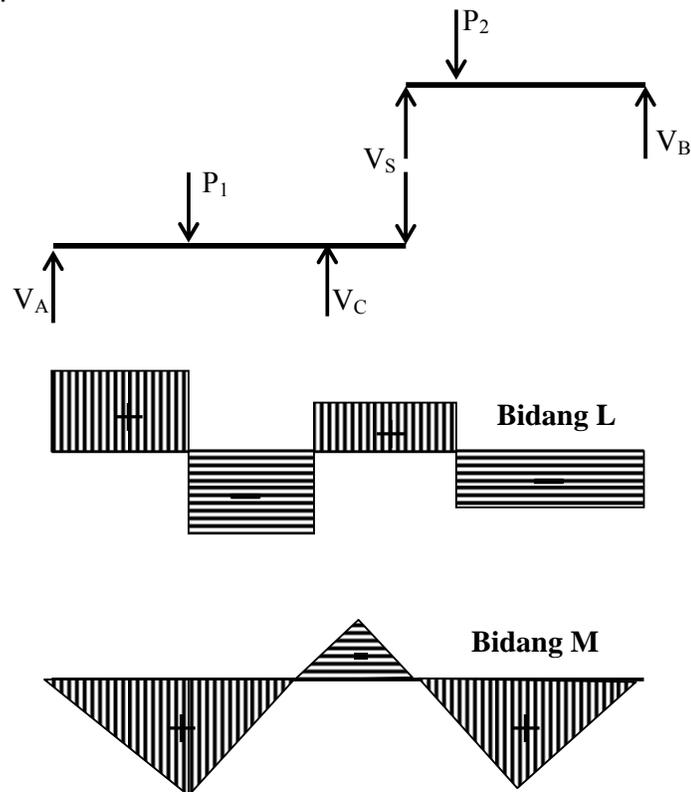
$$M_x = V_A \cdot x - P_1 \cdot (x - a) + V_C \cdot (x - L_{AC}) \quad \dots\dots\dots 3.24b)$$

Persamaan gaya dalam pada bagian CS bila diturunkan dari sebelah kanan berbentuk sebagai berikut :

$$L_x = V_B - P_2 \quad \dots\dots\dots 3.24c)$$

$$M_x = V_B \cdot x - P_2 \cdot (x - e) \quad \dots\dots\dots 3.24d)$$

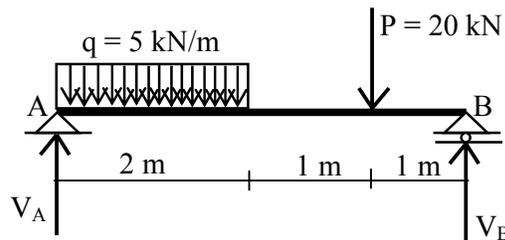
Diagram gaya dalam pada konstruksi bersendi dapat dilihat pada Gambar 3.24.



Gambar 3.24 Diagram Gaya Dalam Konstruksi Bersendi

III.6 Contoh-Contoh Soal dan Pembahasan

Soal 1. Tentukan reaksi perletakan dan gaya-gaya dalam serta gambar diagramnya dari balok sederhana seperti gambar di bawah ini.



Gambar 3.25 Contoh Soal 1 Analisa Balok Sederhana

Penyelesaian :

- Reaksi perletakan :

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow V_A \cdot 4 - 5 \cdot 2 \cdot (1 + 2) - 20 \cdot 1 = 0$$

$$\rightarrow V_A = \frac{30 + 20}{4} = 12,5 \text{ kN} \cdot (\uparrow)$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow -V_B \cdot 4 + 5 \cdot 2 \cdot 1 + 20 \cdot 3 = 0$$

$$\rightarrow V_B = \frac{10 + 60}{4} = 17,5 \text{ kN} \cdot (\uparrow)$$

$$\text{Kontrol } \Sigma V = 0$$

$$V_A + V_B - qb - P = 0$$

$$12,5 + 17,5 - 5 \cdot 2 - 20 = 0 \rightarrow \text{oke}$$

- Gaya-gaya dalam (lintang dan momen) :

$$0 \leq x \leq 2m$$

$$L_x = V_A - q \cdot x$$

$$x = 0 \rightarrow L_0 = 12,5 - 5 \cdot 0 = 12,5 \text{ kN}$$

$$x = 1m \rightarrow L_1 = 12,5 - 5 \cdot 1 = 7,5 \text{ kN}$$

$$x = 2m \rightarrow L_2 = 12,5 - 5 \cdot 2 = 2,5 \text{ kN}$$

$$M_x = V_A \cdot x - 1/2 q x^2$$

$$x = 0 \rightarrow M_0 = 12,5 \cdot 0 - 1/2 \cdot 5 \cdot 0^2 = 0$$

$$x = 1m \rightarrow M_1 = 12,5 \cdot 1 - 1/2 \cdot 5 \cdot 1^2 = 10 \text{ kNm}$$

$$x = 2m \rightarrow M_2 = 12,5 \cdot 2 - 1/2 \cdot 5 \cdot 2^2 = 15 \text{ kNm}$$

$$2m \leq x \leq 3m$$

$$L_x = V_A - qb$$

$$x = 2m \rightarrow L_2 = 12,5 - 5 \cdot 2 = 2,5 \text{ kN}$$

$$x = 3m \rightarrow L_3 = 12,5 - 5 \cdot 2 = 2,5 \text{ kN}$$

$$M_x = V_A \cdot x - qb(x - 1/2 \cdot b)$$

$$x = 2m \rightarrow M_2 = 12,5 \cdot 2 - 5 \cdot 2(2 - 1/2 \cdot 2) = 15 \text{ kNm}$$

$$x = 3m \rightarrow M_3 = 12,5 \cdot 3 - 5 \cdot 2(3 - 1/2 \cdot 2) = 17,5 \text{ kNm}$$

$$3m \leq x \leq 4m$$

$$L_x = V_A - qb - P$$

$$x = 3m \rightarrow L_3 = 12,5 - 5 \cdot 2 - 20 = -17,5 \text{ kN}$$

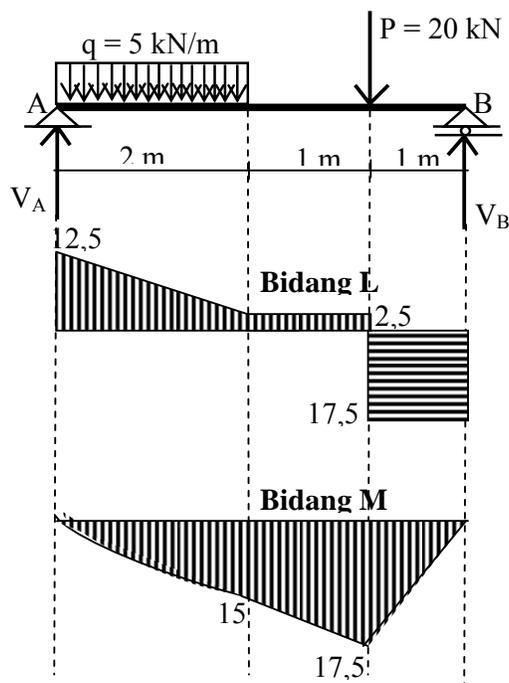
$$x = 4m \rightarrow L_4 = 12,5 - 5 \cdot 2 - 20 = -17,5 \text{ kN}$$

$$M_x = V_A \cdot x - qb(x - 1/2 \cdot b) - P(x - a)$$

$$x = 3m \rightarrow M_3 = 12,5 \cdot 3 - 5 \cdot 2(3 - 1/2 \cdot 2) - 20(3 - 3) = 17,5 \text{ kNm}$$

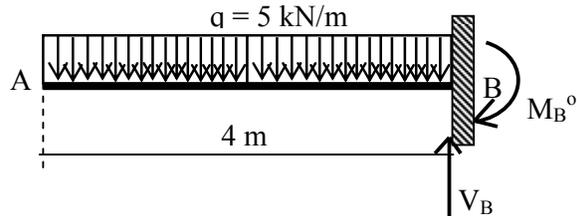
$$x = 4m \rightarrow M_4 = 12,5 \cdot 4 - 5 \cdot 2(4 - 1/2 \cdot 2) - 20(4 - 3) = 0 \text{ kNm}$$

- Diagram gaya-gaya dalam (lintang dan momen) :



Gambar 3.26 Diagram Gaya Dalam Soal 1
Analisa Balok Sederhana

Soal 2. Tentukan reaksi perletakan dan gaya-gaya dalam serta gambar diagramnya dari balok kantilever seperti gambar di bawah ini.



Gambar 3.27 Contoh Soal 2 Analisa Balok Kantilever

Penyelesaian :

- Reaksi perletakan :

$$\Sigma H = 0 \rightarrow H_B = 0$$

$$\Sigma V = 0 \rightarrow V_B - 5 \cdot 4 = 0 \rightarrow V_B = 20 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow -1/2 \cdot 5 \cdot 4^2 + M_B^o = 0 \rightarrow M_B^o = 40 \text{ kNm}$$

- Gaya-gaya dalam (lintang dan momen) :

$$0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$L_x = -q \cdot x$$

$$x = 0 \rightarrow L_0 = -5 \cdot 0 = 0 \text{ kN}$$

$$x = 1 \text{ m} \rightarrow L_1 = -5 \cdot 1 = -5 \text{ kN}$$

$$x = 2 \text{ m} \rightarrow L_2 = -5 \cdot 2 = -10 \text{ kN}$$

$$x = 3 \text{ m} \rightarrow L_3 = -5 \cdot 3 = -15 \text{ kN}$$

$$x = 4 \text{ m} \rightarrow L_4 = -5 \cdot 4 = -20 \text{ kN}$$

$$M_x = -1/2 \cdot q \cdot x^2$$

$$x = 0 \rightarrow M_0 = -1/2 \cdot 5 \cdot 0^2 = 0 \text{ kNm}$$

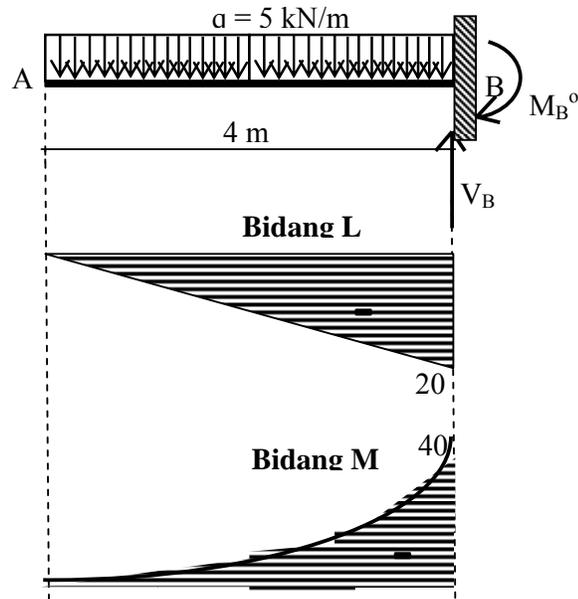
$$x = 1 \text{ m} \rightarrow M_1 = -1/2 \cdot 5 \cdot 1^2 = -2,5 \text{ kNm}$$

$$x = 2 \text{ m} \rightarrow M_2 = -1/2 \cdot 5 \cdot 2^2 = -10 \text{ kNm}$$

$$x = 3 \text{ m} \rightarrow M_3 = -1/2 \cdot 5 \cdot 3^2 = -22,5 \text{ kNm}$$

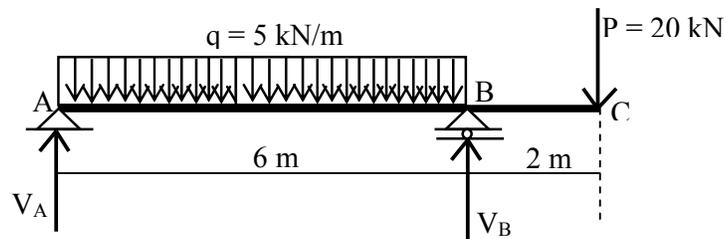
$$x = 4 \text{ m} \rightarrow M_4 = -1/2 \cdot 5 \cdot 4^2 = 40 \text{ kNm}$$

- Diagram gaya-gaya dalam (lintang dan momen) :



Gambar 3.28 Diagram Gaya Dalam Soal 2 Analisa Balok Kantilever

- Soal 3. Tentukan reaksi perletakan dan gaya-gaya dalam serta gambar diagramnya dari balok gantung seperti gambar di bawah ini.



Gambar 3.29 Contoh Soal 3 Analisa Balok Gantung

Penyelesaian :

- Reaksi perletakan :

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow V_A \cdot 6 - 5 \cdot 6 \cdot 3 + 20 \cdot 2 = 0$$

$$\rightarrow V_A = \frac{90 - 40}{6} = 8,33 \text{ kN} \cdot (\uparrow)$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow -V_B \cdot 6 + 5 \cdot 6 \cdot 3 + 20 \cdot 8 = 0$$

$$\rightarrow V_B = \frac{90 + 160}{6} = 41,67 \text{ kN} \cdot (\uparrow)$$

Kontrol $\sum V = 0$

$$V_A + V_B - qb - P = 0$$

$$8,33 + 41,67 - 5.6 - 20 = 0 \rightarrow \text{oke}$$

- Gaya-gaya dalam (lintang dan momen) :

$$0 \leq x \leq 6m$$

$$L_x = V_A - q.x$$

$$x = 0 \rightarrow L_0 = 8,33 - 5.0 = 8,33kN$$

$$x = 1m \rightarrow L_1 = 8,33 - 5.1 = 3,33kN$$

$$x = 2m \rightarrow L_2 = 8,33 - 5.2 = -1,67kN$$

$$x = 3m \rightarrow L_3 = 8,33 - 5.3 = -6,67kN$$

$$x = 4m \rightarrow L_4 = 8,33 - 5.4 = -11,67kN$$

$$x = 5m \rightarrow L_5 = 8,33 - 5.5 = -16,67kN$$

$$x = 6m \rightarrow L_6 = 8,33 - 5.6 = -21,67kN$$

$$M_x = V_A.x - 1/2.q.x^2$$

$$x = 0m \rightarrow M_0 = 8,33.0 - 1/2.5.0^2 = 0$$

$$x = 1m \rightarrow M_1 = 8,33.1 - 1/2.5.1^2 = 5,83kNm$$

$$x = 2m \rightarrow M_2 = 8,33.2 - 1/2.5.2^2 = 6,66kNm$$

$$x = 3m \rightarrow M_3 = 8,33.3 - 1/2.5.3^2 = 2,49kNm$$

$$x = 4m \rightarrow M_4 = 8,33.4 - 1/2.5.4^2 = -6,68kNm$$

$$x = 5m \rightarrow M_5 = 8,33.5 - 1/2.5.5^2 = -20,85kNm$$

$$x = 6m \rightarrow M_6 = 8,33.6 - 1/2.5.6^2 = -40kNm$$

$$6m \leq x \leq 8m$$

$$L_x = V_A - qb + V_B$$

$$x = 6m \rightarrow L_6 = 8,33 - 5.6 + 41,67 = 20kN$$

$$x = 7m \rightarrow L_7 = 8,33 - 5.6 + 41,67 = 20kN$$

$$x = 8m \rightarrow L_8 = 8,33 - 5.6 + 41,67 = 20kN$$

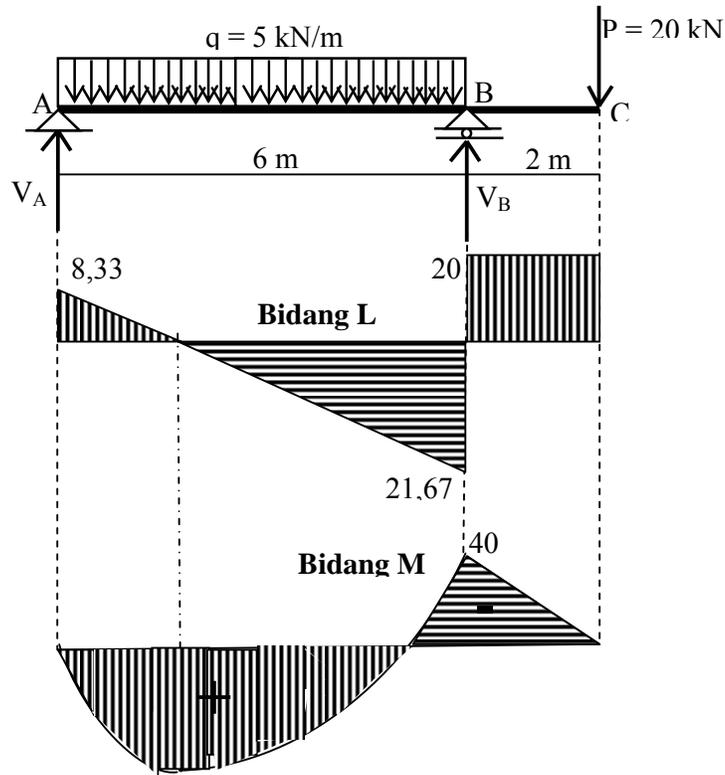
$$M_x = V_A.x - qb(x - 1/2L) + V_B(x - L)$$

$$x = 6m \rightarrow M_6 = 8,33.6 - 5.6(6 - 3) + 41,67(6 - 6) = 40kNm$$

$$x = 7m \rightarrow M_7 = 8,33.7 - 5.6(7 - 3) + 41,67(7 - 6) = 20kNm$$

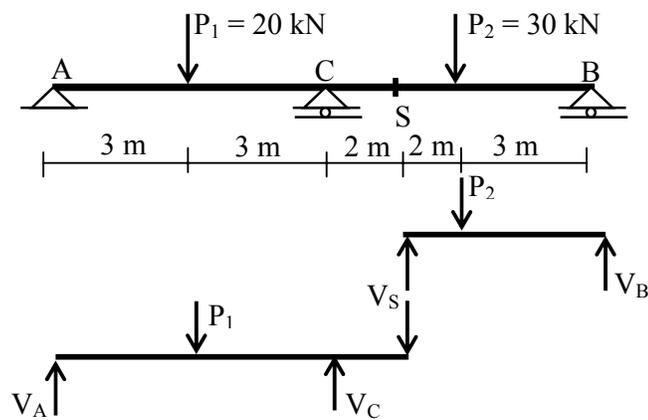
$$x = 8m \rightarrow M_8 = 8,33.8 - 5.6(8 - 3) + 41,67(8 - 6) = 0$$

- Diagram gaya-gaya dalam (lintang dan momen) :



Gambar 3.30 Diagram Gaya Dalam Soal 3 Analisa Balok Gantung

Soal 4. Suatu konstruksi balok gerber dibebani muatan seperti pada gambar di bawah ini. Tentukan reaksi perletakan dan gaya-gaya dalam.



Gambar 3.31 Konstruksi Balok Gerber Soal 4

Penyelesaian :

- Reaksi Perletakan :

$$\Sigma M_S = 0 \rightarrow V_B \cdot 5 - 30 \cdot 2 = 0$$

$$\rightarrow V_B = \frac{30 \cdot 2}{5} = 12 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow -V_S \cdot 5 + 30 \cdot 3 = 0$$

$$\rightarrow V_S = \frac{30 \cdot 3}{5} = 18 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_C = 0 \rightarrow V_A \cdot 6 - 20 \cdot 3 + 18 \cdot 2 = 0$$

$$\rightarrow V_A = \frac{60 - 36}{6} = 4 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow -V_C \cdot 6 + 20 \cdot 3 + 18 \cdot 8 = 0$$

$$\rightarrow V_C = \frac{60 + 144}{6} = 34 \text{ kN}$$

- Gaya-gaya dalam :

Dari kiri :

$$0 \leq x \leq 3m$$

$$L_x = V_A$$

$$x = 0 \rightarrow L_0 = 4 \text{ kN}$$

$$x = 3m \rightarrow L_3 = 4 \text{ kN}$$

$$M_x = V_A \cdot x$$

$$x = 0 \rightarrow M_0 = 0$$

$$x = 3m \rightarrow M_3 = 4 \cdot 3 = 12 \text{ kNm}$$

$$3m \leq x \leq 6m$$

$$L_x = V_A - P_1$$

$$x = 3m \rightarrow L_3 = 4 - 20 = -16 \text{ kN}$$

$$x = 6m \rightarrow L_6 = 4 - 20 = -16 \text{ kN}$$

$$M_x = V_A \cdot x - P_1 \cdot (x - a)$$

$$x = 3m \rightarrow M_3 = 4 \cdot 3 - 20 \cdot (3 - 3) = 12 \text{ kNm}$$

$$x = 6m \rightarrow M_6 = 4 \cdot 6 - 20 \cdot (6 - 3) = -66 \text{ kNm}$$

$$6m \leq x \leq 8m$$

$$L_x = V_A - P_1 + V_C$$

$$x = 6m \rightarrow L_6 = 4 - 20 + 34 = 18.kN$$

$$x = 8m \rightarrow L_8 = 4 - 20 + 34 = 18.kN$$

$$M_x = V_A \cdot x - P_1 \cdot (x - a) + V_C \cdot (x - L_{AC})$$

$$x = 6m \rightarrow M_6 = 4 \cdot 6 - 20 \cdot (6 - 3) + 34 \cdot (6 - 6) = -66.kNm$$

$$x = 8m \rightarrow M_8 = 4 \cdot 8 - 20 \cdot (8 - 3) + 34 \cdot (8 - 6) = 0.kNm$$

Dari kanan :

$$0 \leq x \leq 3m$$

$$L_x = -V_B$$

$$x = 0m \rightarrow L_0 = -12.kN$$

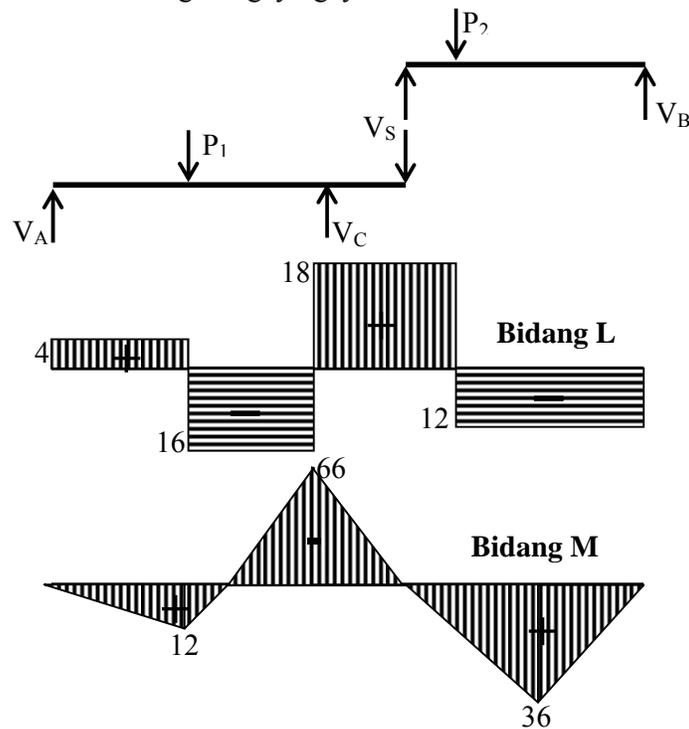
$$x = 3m \rightarrow L_3 = -12.kN$$

$$M_x = V_B \cdot x$$

$$x = 0m \rightarrow M_0 = 12 \cdot 0 = 0.kNm$$

$$x = 3m \rightarrow M_3 = 12 \cdot 3 = 36.kNm$$

- Gambar diagram gaya-gaya dalam :



Gambar 3.32 Diagram Gaya-Gaya Dalam Konstruksi Gerber Soal 4