Pertemuan VI,VII

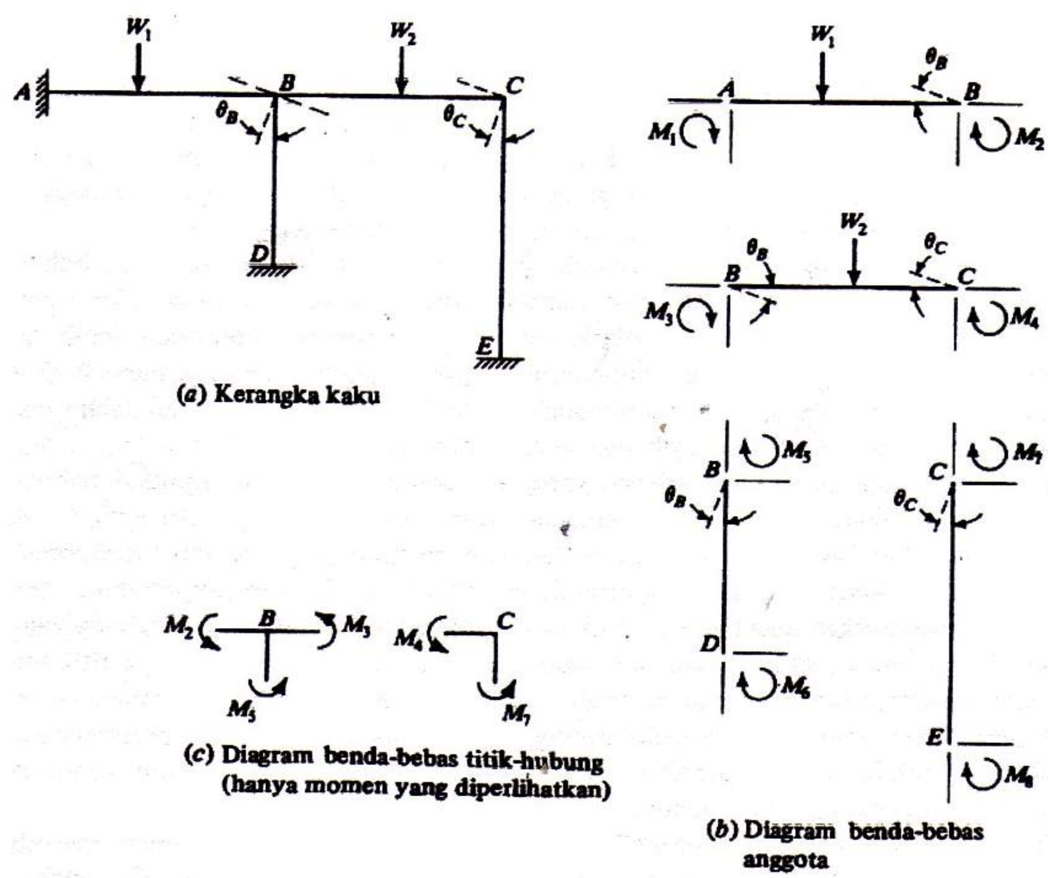
III. Metode Defleksi Kemiringan (*The Slope Deflection Method*)

III.1 Uraian Umum Metode Defleksi Kemiringan

Metode defleksi kemiringan (*the slope deflection method*) dapat digunakan untuk menganalisa semua jenis balok dan kerangka kaku statis tak tentu, dimana semua Sambungan dianggap kaku; yaitu sudut di sambungan antara batang dianggap tidak berubah harganya ketika beban diberikan. Jadi sambungan pada penyangga sebelah dalam balok statis tak tentu adapt dianggap sambungan kaku 180^{o} dan biasanya sambungan dalam kerangka dideformasikan, sambungan kakunya dianggap hanya berputar sebagai suatu keseluruhan. Dengan kata lain sudut antara garis singgung ke berbagai cabang kurva elastis yang bertemu pada sebuah sambungan tetap sama seperti sudut pada struktur yang belum terdeformasi.

Pada metode defleksi kemiringan, rotasi sambungannya dianggap tidak diketahui, nantinya akan diperlihatkan bahwa untuk setiap satu batang yang dibatasi oleh dua sambungan, mlomen ujungnya adapt dinyatakan dalam suku-suku rotasi sambungan. Namun untuk memenuhi syarat keseimbangan, jumlah dari momen ujung yang dikerjakan oleh setiap sambungan pada ujung pertemuan batang-batangnya harus sama dengan nol, karena sambungan kaku yang dipertanyakan menerima jumlah dari momen ujung tersebut. Persamaan keseimbangan ini menghasilkan syarat yang perlu dipenuhi oleh rotasi sambungan, dan bila rotasi sambungan yang tidak diketahui ini didapatkan, momen-monen ujung tersebut dapat dihitung dari persamaan defleksi sambungan.

Sebagai contoh sederhana untuk menganalaisa kerangka kaku dengan pembebanan sebagaimana terlihat pada Gambar 3.1. Kerangka kaku tersebut bersifat statis tak tentu berderajat enam. Oleh karena kerangkanya dicegah bergerak mendatar (horisontal) oleh tumpuan terjepit di A dan dicegah bergerak tegak (vertikal) oleh alas terjepit di D dan E , dan karena deformasi aksial pada batang-batangnya diabaikan, maka semua sambungan dari kerangka ini harus tetap pada tempat semula. (Kasus yang memungkinkan beberapa sambungan berubah posisi ketika kerangka kaku itu terdeformasi, hal ini akan dibicarakan nanti kemudian). Rotasi sambungan yang *searah jarum jam* θ_B *dan* θ_C dianggap bernilai *positif* , sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 3.1*a*. Diagram-diagram benda bebas semua batang diperlihatkan dalam Gambar 3.1*b*. Disalah satu ujung sambungan, ada tiga komponen reaksi, yaitu; tarik atau tekan langsung, geser ujung, dan momen ujung. Momen ujung yang bekerja di ujung *A* dari batang *AB* ditandai sebagai M_{AB}, dan di ujung *B* dari batang *AB* sebagai M_{AB}. Momen-momen *searah jarum jam* yang bekerja di ujung-ujung batang dianggap bernilai posititf, sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 3.1*b*.



Gambar 3.1 Kerangka Kaku Tipikal Tanpa Translasi Sambungan

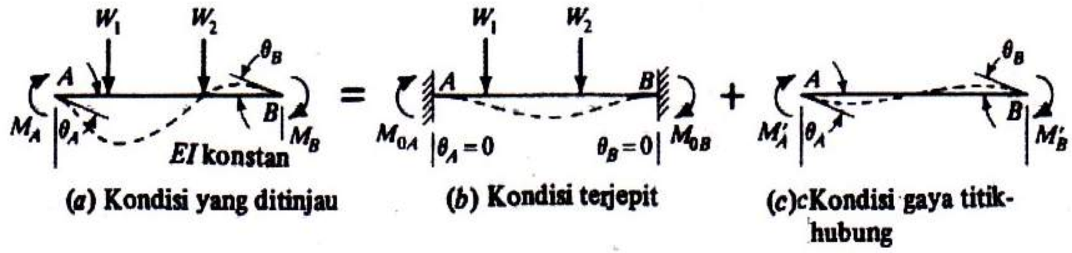
Dengan menggunakan persamaan-persamaan defleksi kemiringan, dapat dinyatakan momen ujung dari setiap sambungan yang tidak diketahui. Diagram benda bebas dari semua sambungan terlihat pada Gambar 3.1*c*. Batang pada sambungannya merupakan sebuah gaya dalam arah sumbu batang, sebuah gaya yang tegak lurus terhadap sumbu batang, dan sebuah momen, masing-masing berlawanan arah dengan kerja sambungan pada batang. Pada gambar 3.1*c* hanya momen-momennya saja yang diperlihatkan. Momen-momen tersebut diperlihatkan dalam arah positif, yakni *berlawanan arah jarum jam.* Untuk keseimbangan, jumlah semua momen yang bekerja pada setiap sambungan harus sama dengan nol. Jadi syarat sambungan di *B* dan di *C* , masing-masing adalah:

$$M_2 + M_3 + M_5 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.1a)$$

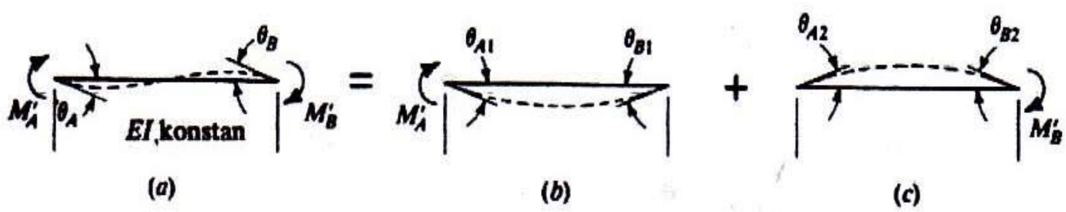
$$M_4 + M_7 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.1b)$$

Kedua persamaan di atas diperlukan untuk menentukan nilai-nilai θ_B dan θ_C. Kemudian semua momen ujungnya dapat diperoleh dengan memasukkan rotasi sambungan yang diketahui ke dalam persamaan defleksi kemiringan. Dengan menggunakan prinsip statika, diagram-diagram gaya aksial, gaya geser, dan momen untuk setiap batang dapat ditentukan. Dalam menganalisa stuktur statis tak tentu harus memenuhi syarat statika maupun syarat bentuk geometri. Dengan menggunakan metoda defleksi kemiringan untuk menganalisa kerangka kaku, syarat-syarat bentuk yang diperlukan dari struktur terdeformasi yang berasal dari kekakuan sambungan, dipenuhi sekaligus dengan menghitung rotasi sambungan tunggal yang tidak diketahui pada setiap sambungan. Jadi syarat-syarat statika, yaitu agar jumlah dari momen yang bekerja pada setiap sambungan besarnya nol, digunakan untuk menjawab rotasi sambungannya.

III.2 Penurunan Persamaan Defleksi Kemiringan



Gambar 3.2 Persamaan Dasar Defleksi Kemiringan



Gambar 3.3 Statika dan Deformasi Batang Terlentur Yang Tak Dibebani

Dalam persamaan defleksi kemiringan, momen ujung yang bekerja pada ujung-ujung sebuah batang dinyatakan dalam suku-suku rotasi ujung dan pembebanan pada batang tersebut. Jadi untuk bentangan *AB* yang terlihat pada Gambar 3.2*a*, M_A dan M_B perlu dinyatakan dalam suku-suku rotasi ujung θ_A dan θ_B dan pembebanan yang diberikan W_1 dan W_2. Momen ujungnya diperlihatkan sebagai rotasi ujung melawan jarum jam dan rotasi ujung diperlihatkan sebagai searah jarum jam. Dengan pembebanan yang diberikan pada batang tersebut, diperlukan momen-momen ujung terjepit M_{0A} dan M_{0B} (yang keduanya terlihat searah jarum jam) untuk menahan garis-garis singgungnya tetap di ujung, terlihat pada Gambar 3.2*b*. Momen-momen ujung tambahan M'_A dan M'_B masing-masing harus sedemikian besarnya, sehingga menyebabkan rotasi θ_A dan θ_B. Jika θ_A dan θ_B merupakan rotasi ujung yang disebabkan oleh θ_A oleh M'_A dan θ_B oleh M'_B, terlihat pada Gambar 3.3*b* dan 3.3*c*, maka syarat-syarat bentuk yang diperlukan adalah:

$$\theta_A = -\,\theta_{A1} + \theta_{A2} \quad \text{.........} \quad (3.2a)$$

$$\theta_B = \theta_{B1} - \theta_{B2} \quad \text{.........} \quad (3.2b)$$

Menurut superposisi :

$M_A = M_{0A} + M'_A$ ……………………………………………... (3.3a)

$M_B = M_{0B} + M'_B$ ……………………………...…………… (3.3b)

Menurut balok konyugasi :

$$\theta_{A1} = \frac{M'_A.L}{3EI} \qquad \theta_{B1} = \frac{M'_A.L}{6EI} \quad \text{………………………………} \quad (3.4a)$$

$$\theta_{A2} = \frac{M'_B.L}{6EI} \qquad \theta_{B2} = \frac{M'_B.L}{3EI} \quad \text{………………………………} \quad (3.4b)$$

Dengan memasukkan persamaan 3.4 ke dalam persamaan 3.2, maka dieproleh :

$$\theta_A = +\frac{M'_A.L}{3EI} - \frac{M'_B.L}{6EI} \quad \text{……………………………………...} \quad (3.5a)$$

$$\theta_B = -\frac{M'_A.L}{6EI} + \frac{M'_B.L}{3EI} \quad \text{……………………………………....} \quad (3.5b)$$

Dengan menyelesaikan persamaan 3.4 untuk memperoleh M'_A dan M'_B :

$$M'_A = +\frac{2EI}{L}\left(2\theta_A + \theta_B\right) \quad \text{…………………………………….} \quad (3.6a)$$

$$M'_B = +\frac{2EI}{L}\left(2\theta_B + \theta_A\right) \quad \text{…………………...……..……….} \quad (3.6b)$$

Dengan memasukkan persamaan 3.6 ke dalam persamaan 3.3, maka diperoleh :

$$M_A = M_{0A} + \frac{2EI}{L}\left(2\theta_A + \theta_B\right) \quad \text{………………………………...} \quad (3.7a)$$

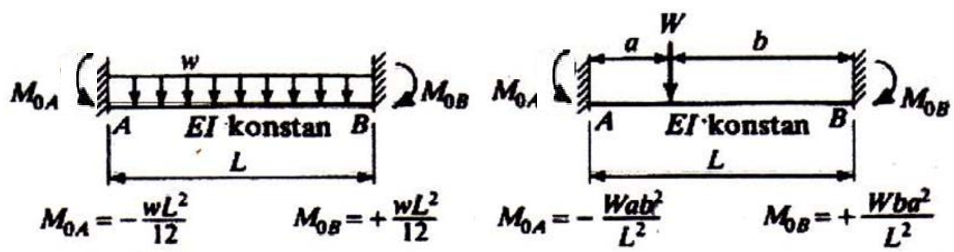
$$M_B = M_{0B} + \frac{2EI}{L}\left(2\theta_B + \theta_A\right) \quad \text{…………………………………} \quad (3.7b)$$

Persamaan 3.7 merupakan persamaan-persamaan defleksi kemiringan untuk suatu batang yang mengalami lenturan. Momen di sembarang ujung suatu batang yang mengalami lenturan sama dengan momen ujung terjepit akibat beban-beban yang bekerja pada batang tersebut ditambah dengan 2*EI/L* kali jumlahg dari dua kali kemiringan diujung dekat dan kemiringan di ujung jauh.

III.3 Penerapan Metode Defleksi Kemiringan Pada Balok Statis Tak Tentu

Persamaan defleksi kemiringan dapat digunakan untuk menganalisa balok statis tak tentu sehubungan dengan beban-beban yang bekerja, dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Tentukan momen-momen ujung terjepit di ujung-ujung setiap bentangan dengan menggunakan rumus-rumus untuk beban terbagi rata dan beban terpusat yang ditunjukkan pada Gambar 3.4.



Gambar 3.4 Momen Ujung Terjepit Akibat Beban Merata dan Beban Terpusat

2. Nyatakan semua ujung sebagai suatu fungsi dari momen-momen ujung terjepit dan rotasi sambungannya dengan menggunakan persamaan-persamaan defleksi kemiringan.

3. Tetapkan suatu sistem persamaan-persamaan serempak dengan menggunakan kondisi keseimbangan, jumlah momen disetiap sambungan harus sama dengan nol.

4. Selesaikan persamaan-persamaan serempak untuk memperoleh rotasi-rotasi sambungan yang tak diketahui.

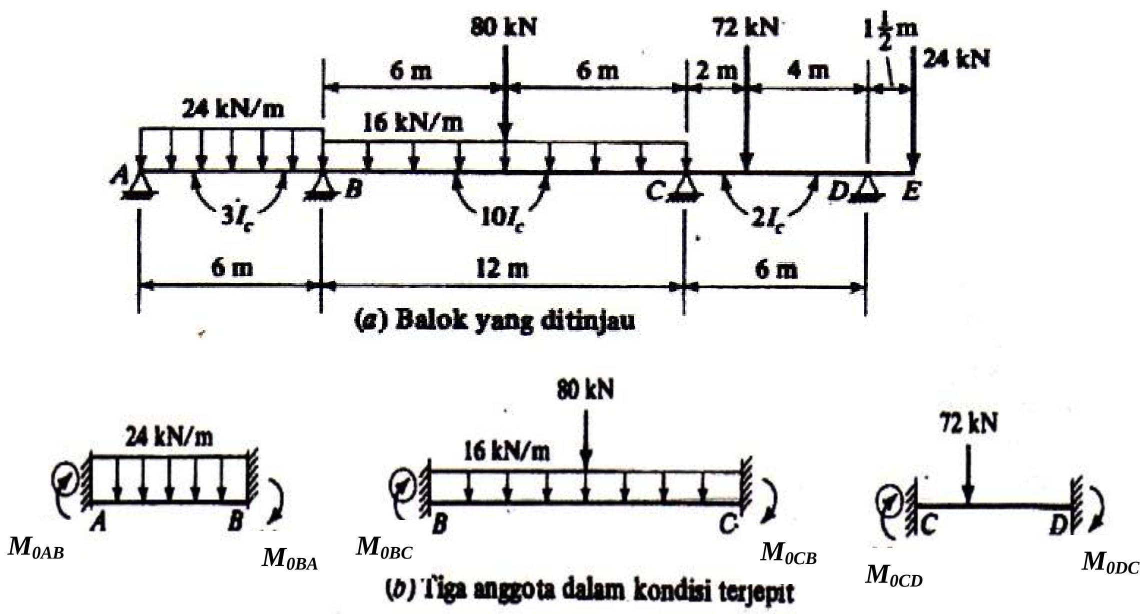
5. Masukkan nilai-nilai rotasi yang sudah diketahui ke dalam persamaan defleksi kemiringan dan hitung momen ujungnya.

6. Tentukan semua reaksi, gambarkan diagram gaya geser dan momen.

III.4 Contoh-Contoh Soal dan Pembahasan

Soal 1. Analisalah balok menerus pada Gambar 3.5*a* dengan menggunakan metode defleksi kemiringan. Gambar diagramkan gaya geser dan momennya.

Penyelesaian :



Gambar 3.5 Balok Menerus Contoh Soal III.1

(1) *Momen ujung terjepit*. Balok yang ditinjau diperlihatkan pada Gambar 3.5*a*. Jika kemiringan di *A, B, C*, dan *D* sama dengan nol, balok yang ditinjau dapat dipisahkan menjadi tiga balok yang berujung jepit, yang diperlihatkan pada Gambar 3.5*b*, dan sebuah balok kantilever yang tidak diperlihatkan pada Gambar 3.5*b*. Bagian kantilever *DE* tidak

dipandang sebagai batang yang sesungguhnya, karenanya persamaan defleksi kemiringan tidak dilukiskan untuk batang tersebut. Sesuai dengan perjanjian tanda bahwa momen searah jarum jam yang bekerja diujung batang bernilai positif, momen-momen ujung terjepit adalah :

$$M_{0AB} = -\frac{24(6)^2}{12} = -72 \text{ kNm} \qquad M_{0BA} = +72 \text{ kNm}$$

$$M_{0BC} = -\frac{16(12)^2}{12} - \frac{80(6)(6)^2}{12^2} = -312 \text{ kNm} \qquad M_{0CB} = +312 \text{ kNm}$$

$$M_{0CD} = -\frac{72(2)(4)^2}{6^2} = -64 \text{ kNm} \qquad M_{0DC} = +\frac{72(4)(2)^2}{6^2} = +32 \text{ kNm}$$

(2) *Persamaan-persamaan defleksi kemiringan :*

$$M_{AB} = M_{0AB} + \frac{2E(3I)}{6}(2\theta_A + \theta_B) = -72 + 2EI\theta_A + EI\theta_B$$

$$M_{BA} = M_{0BA} + \frac{2E(3I)}{6}(2\theta_B + \theta_A) = +72 + 2EI\theta_B + EI\theta_A$$

$$M_{BC} = M_{0BC} + \frac{2E(10I)}{12}(2\theta_B + \theta_C) = -312 + 3{,}333EI\theta_B + 1{,}667EI\theta_C$$

$$M_{CB} = M_{0CB} + \frac{2E(10I)}{12}(2\theta_C + \theta_B) = +312 + 3{,}333EI\theta_C + 1{,}667EI\theta_B$$

$$M_{CD} = M_{0CD} + \frac{2E(2I)}{6}(2\theta_C + \theta_D) = -64 + 1{,}333EI\theta_C + 0{,}667EI\theta_D$$

$$M_{DC} = M_{0DC} + \frac{2E(2I)}{6}(2\theta_D + \theta_C) = +32 + 1{,}333EI\theta_D + 0{,}667EI\theta_C$$

(3) *Persamaan-persamaan serempak dalam* $\theta_{A,}$ θ_B, $\theta_{C,}$ dan $\theta_{D.}$ Momen-momen ujung belum diketahui, maka harus memenuhi syarat sambungan :

- sambungan di A : $M_{AB} = 0$
- sambungan di B : $M_{BA} + M_{BC} = 0$
- sambungan di C : $M_{CB} + M_{CD} = 0$
- sambungan di D : $M_{DC} - 36 = 0$

Dengan memasukkan persamaan-persamaan defleksi kemiringan kedalam syarat-syarat sambungan, maka ditetapkan persamaan serempak berikut :

$$+2{,}000EI\theta_A + 1{,}000EI\theta_B = +\ 72{,}0$$

$$+1{,}000EI\theta_A + 5{,}333EI\theta_B + 1{,}667EI\theta_C = +240{,}0$$

$$+\ 1{,}667EI\theta_B + 4{,}667EI\theta_C + 0{,}667EI\theta_D = -248{,}0$$

$$+\ 0{,}667EI\theta_C + 1{,}333EI\theta_D = +\ 4{,}0$$

Perhatikan bahwa jika pada ruas kiri dari keempat persamaan di atas ditarik suatu diagonal ke kanan ke bawah, maka tidak hanya koefisien-koefisien pada diagonal tersebut menonjol di dalam persamaan-persamaannya sendiri, tapi koefisien-koefisien lainnya simetris terhadap diagonal tersebut. Hal ini selalu dapat dibuktikan kebenarannya melalui sifat-sifat dasar persamaan defleksi kemiringan dan kondisi-kondisi momen ujung yang bersangkutan. Untuk mengamati gejala ini, perlulah kita susun yang tak diketahui yang bersangkutan dalam urutan $\theta_{A,}$ θ_B, $\theta_{C,}$ dan $\theta_{D.}$ di sepanjang arah horisontal, dan kondisi-kondisi momen ujung yang bersangkutan dalan urutan sambungan *A, B, C*, dan *D* dalam arah vertikal.

(4) *Penyelesaian persamaan serempak.* Persamaan-persamaan serempak dalam $\theta_{A,}$ θ_B, $\theta_{C,}$ dan $\theta_{D.}$ dapat diselesaikan dengan cara eliminasi dan substitusi, dan hasilnya adalah :

$EI\theta_A$ = + 0,20

$EI\theta_B$ = +71,60

$EI\theta c$ = -85,23

$EI\theta_D$ = +45,62

(5) *Perhitungan Momen-momen ujung*. Dengan mensubstitusikan nilai-nilai $\theta_{A,}$ θ_B, $\theta_{C,}$ dan $\theta_{D.}$ yang sudah diperoleh di atas ke dalam persamaan-persamaan defleksi kemiringan, maka diperoleh :

M_{AB} = -72 + 2(+0,20) + (+71,60) = 0

M_{BA} = +72 + 2(+71,60) + (+0,20) = +215,4 kNm

M_{BC} = -312 + 3,333(+71,60) + 1,667(-85,23) = -215,4 kNm

M_{CB} = +312 + 3,333(-85,23) + 1,667(+71,60) = +147,3 kNm

M_{CD} = -64 + 1,333(-85,23) + 0,667(+45,62) = -147,3 kNm

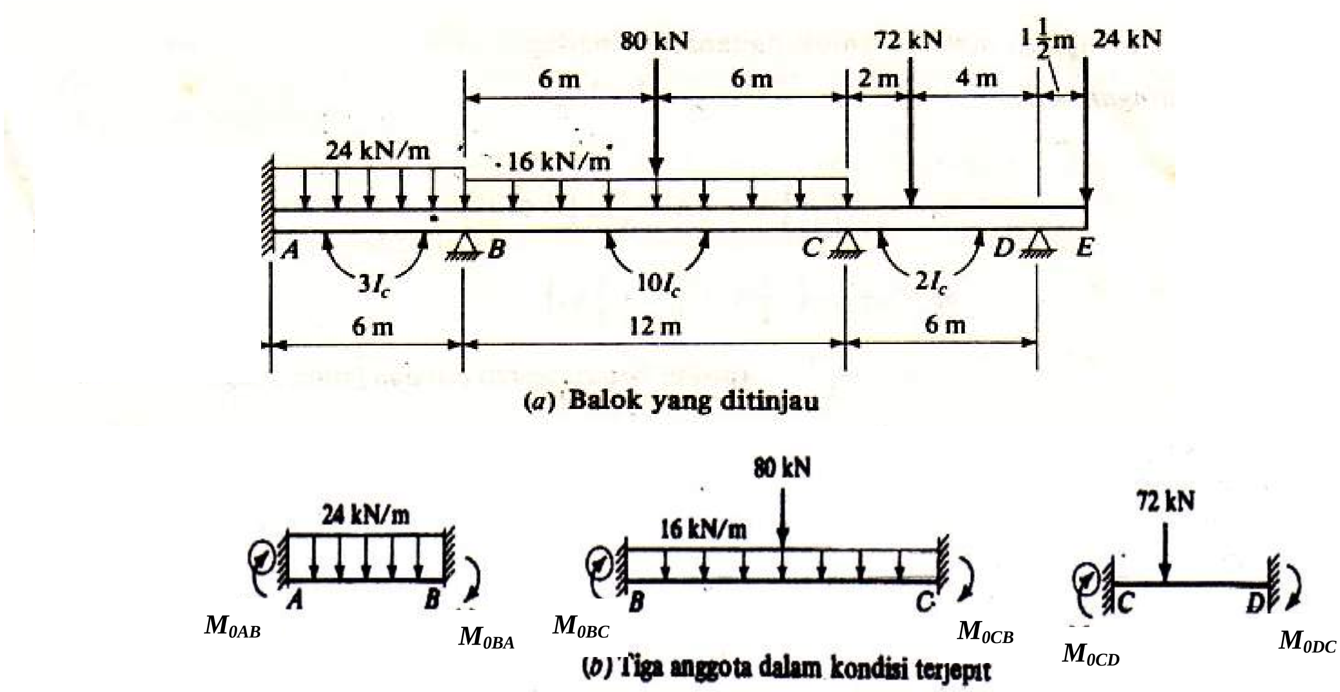
M_{DC} = +32 + 1,333(+45,62) + 0,667(-85,23) = +36,0 kNm

Perhatikan bahwa hasil-hasil momen-momen ujung telah memenuhi keempat syarat sambungan : M_{AB} = 0, M_{BA} + M_{BC} = 0, M_{CB} + M_{CD} = 0, M_{DC} – 36 = 0

(6) *Reaksi-reaksi, diagram gaya geser dan diagram momen*. Hal ini telah dilakukan di dalam contoh soal II.1 dan ditunjukkan pada Gambar 2.7, namun perhatikanlah bahwa apabila momen yang dihitung pada langkah (5) di atas dikerjakan pada diagram benda bebas pada 2.7*a*, sebuah momen positif searah jarum jam bekerja di ujung batang tersebut dan sebuah momen negatif berlawanan arah jarum jam bekerja di ujung batang tersebut. Perjanjian tanda ini sering disebut *perjanjian tanda defleksi kemiringan* yang berbeda dengan *perjanjian tanda pendesain*.

Soal 2. Analisalah balok menerus pada Gambar 3.6*a* dengan menggunakan metode defleksi kemiringan. Gambar diagramkan gaya geser dan momennya.

Penyelesaian :



Gambar 3.6 Balok Menerus dan Momen Ujung Jepit Contoh Soal III.2

Balok yang ditinjau diperlihatkan pada Gambar 3.6*a*. Satu-satunya perbedaan antara balok ini dengan balok pada contoh sebelumnya (contoh soal III.1) adalah bahwa tumpuan di *A* terjepit. Karenanya θ_A untuk balom ini bernilai nol, jadi $\theta_A = 0$ dalam persamaan-persamaan defleksi kemiringan.

(1) *Momen ujung jepit.* Dalam hal ini sama dengan nilai yang telah dihitung pada contoh soal III.1.

(2) *Persamaan-persamaan defleksi kemiringan :*

$$M_{AB} = M_{0AB} + \frac{2E(3I)}{6}(2\theta_A + \theta_B) = -72 + EI\theta_B$$

$$M_{BA} = M_{0BA} + \frac{2E(3I)}{6}(2\theta_B + \theta_A) = +72 + 2EI\theta_B$$

$$M_{BC} = M_{0BC} + \frac{2E(10I)}{12}(2\theta_B + \theta_C) = -312 + 3{,}333EI\theta_B + 1{,}667EI\theta_C$$

$$M_{CB} = M_{0CB} + \frac{2E(10I)}{12}(2\theta_C + \theta_B) = +312 + 3{,}333EI\theta_C + 1{,}667EI\theta_B$$

$$M_{CD} = M_{0CD} + \frac{2E(2I)}{6}(2\theta_C + \theta_D) = -64 + 1{,}333EI\theta_C + 0{,}667EI\theta_D$$

$$M_{DC} = M_{0DC} + \frac{2E(2I)}{6}(2\theta_D + \theta_C) = +32 + 1{,}333EI\theta_D + 0{,}667EI\theta_C$$

(3) *Persamaan-persamaan serempak dalam.* Dalam kenyataannya, ketiga persamaan simultan dalam θ_B, $\theta_{C,}$ dan $\theta_{D.}$ untuk soal ini serupa dengan persamaan kedua, ketiga, dan keempat, yaitu harus memenuhi syarat sambungan :

- sambungan di B : $M_{BA} + M_{BC} = 0$
- sambungan di C : $M_{CB} + M_{CD} = 0$
- sambungan di D : $M_{DC} - 36 = 0$

Dengan demikian diperoleh persamaan serempak berikut :

$$\begin{aligned}
5{,}333EI\theta_B + 1{,}667EI\theta_C \qquad\qquad &= +240{,}0 \\
+\,1{,}667EI\theta_B + 4{,}667EI\theta_C + 0{,}667EI\theta_D &= -248{,}0 \\
+\,0{,}667EI\theta_C + 1{,}333EI\theta_D &= +\quad 4{,}0
\end{aligned}$$

(4) *Penyelesaian persamaan serempak.* Persamaan-persamaan serempak dalam θ_B, $\theta_{C,}$ dan $\theta_{D.}$ dapat diselesaikan dengan cara eliminasi dan substitusi, dan hasilnya adalah :

$EI\theta_B$ = +71,64

$EI\theta c$ = -85,25

$EI\theta_D$ = +45,63

(5) *Perhitungan Momen-momen ujung.* Dengan mensubstitusikan nilai-nilai $\theta_{A,}$ θ_B, $\theta_{C,}$ dan $\theta_{D.}$ yang sudah diperoleh di atas ke dalam persamaan-persamaan defleksi kemiringan, maka diperoleh :

M_{AB} = -72 + (+71,64) = - 0,36 kNm

M_{BA} = +72 + 2(+71,64) = +215,3 kNm

M_{BC} = -312 + 3,333(+71,64) + 1,667(-85,25) = -215,3 kNm

M_{CB} = +312 + 3,333(-85,25) + 1,667(+71,64) = +147,2 kNm

M_{CD} = -64 + 1,333(-85,25) + 0,667(+45,63) = -147,2 kNm

M_{DC} = +32 + 1,333(+45,63) + 0,667(-85,25) = +36,0 kNm

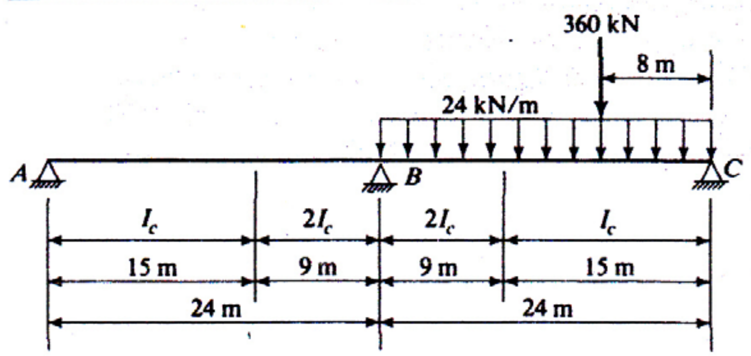
Perhatikan bahwa hasil-hasil momen-momen ujung telah memenuhi keempat syarat sambungan : $M_{BA} + M_{BC} = 0$, $M_{CB} + M_{CD} = 0$, $M_{DC} - 36 = 0$

(6) Reaksi-reaksi, diagram gaya geser dan diagram momen. Hal ini telah dilakukan di dalam contoh soal II.2.

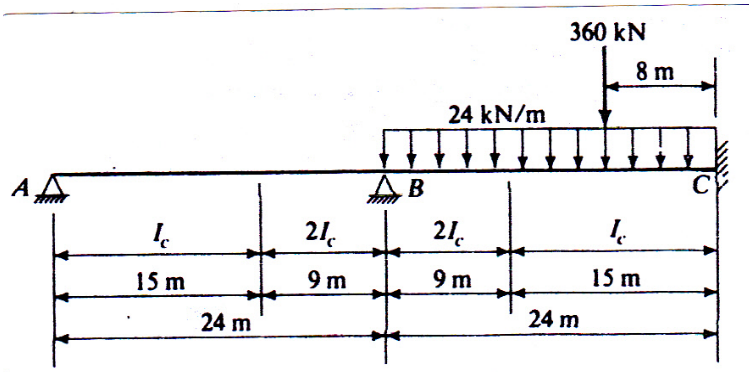
III.5 Soal-Soal Latihan

Analisalah balok menerus di bawah ini dengan menggunakan metode defleksi kemiringan, gambar diagram gaya geser dan momen.

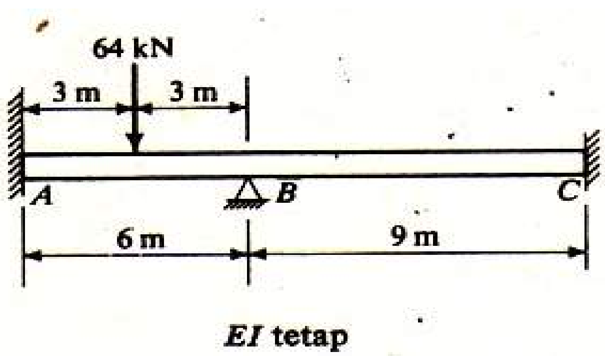
1.


360 kN
8 m
24 kN/m
A
B
C
I_c
$2I_c$
$2I_c$
I_c
15 m
9 m
9 m
15 m
24 m
24 m

2.


360 kN
8 m
24 kN/m
A
B
C
I_c
$2I_c$
$2I_c$
I_c
15 m
9 m
9 m
15 m
24 m
24 m

3.


64 kN
3 m
3 m
A
B
C
6 m
9 m
EI tetap