

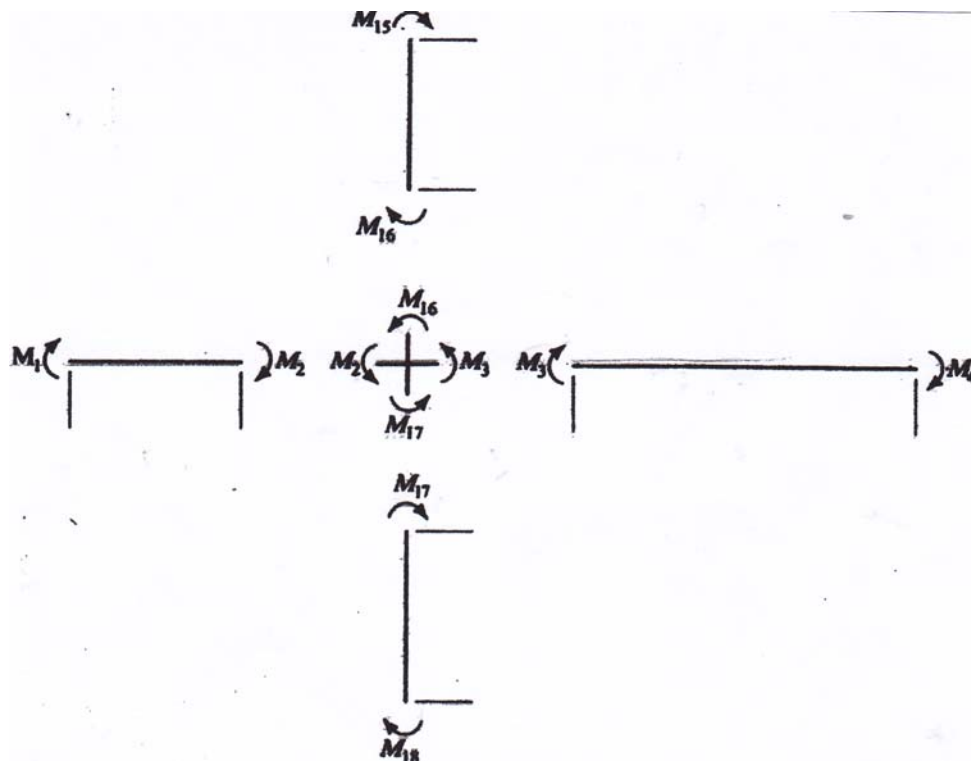
Pertemuan IX,X,XI

V. Metode Defleksi Kemiringan (*The Slope Deflection Method*) Lanjutan

V.1 Penerapan Metode Defleksi Kemiringan Pada Kerangka Kaku Statis Tak Tentu Tanpa Goyangan.

Hampir semua kerangka kaku yang secara actual dibangun di dalam praktek bersifat statis tak tentu. Tidak seperti titik-hubung kaku (180°) di tumpuan-tumpuan balok menerus, lebih dari dua ujung batang bisa terhimpun di titik-hubung yang sama, yang di dalam kasus ini, kondisi keseimbangan yang berkaitan dengan rotasi yang tak diketahui di titik hubung itu akan melibatkan lebih dari dua momen ujung. Kondisi keseimbangan untuk titik-hubung kaku pada Gambar 5.1 adalah

$$M_2 + M_3 + M_{16} + M_{17} = 0 \dots\dots\dots (5.1)$$



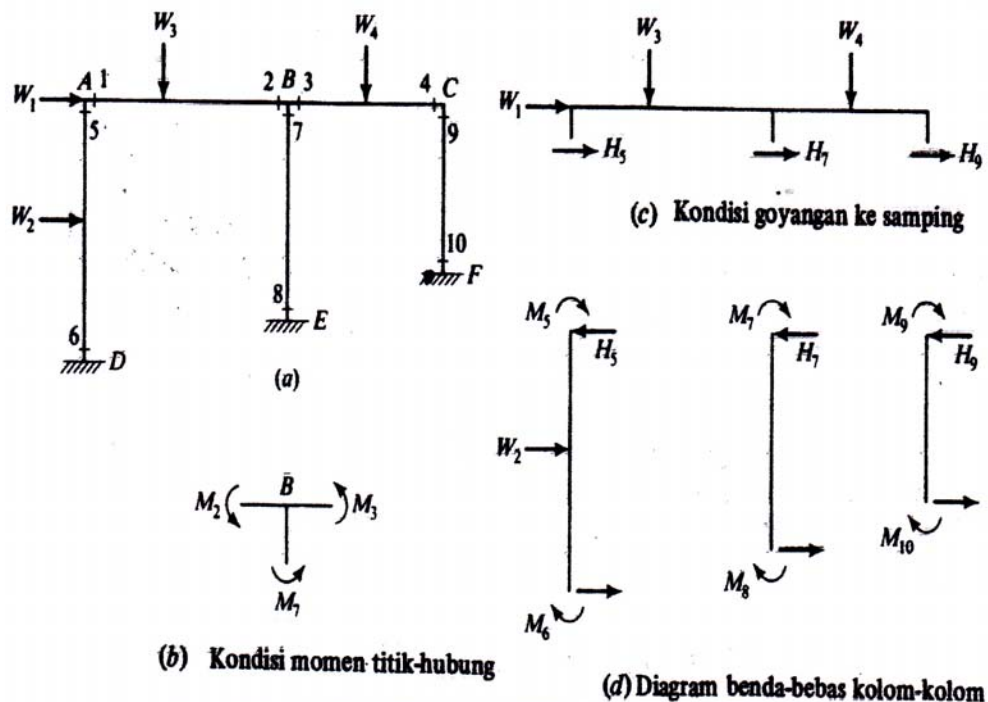
Gambar 5.1 Kondisi Momen Titik-Hubung di Dalam Metode Defleksi Kemiringan

Analisa umum kerangka kaku didasarkan atas pengandaian, bahwa deformasi aksial yang sangat kecil apabila dibandingkan dengan lendutan-lentur boleh diabaikan. Berdasarkan pengandaian tersebut, banyak kerangka kaku memiliki bentuk sedemikian rupa sehingga tak satupun titik-hubung dapat mengalami perubahan posisi yang tak diketahui akibat beban-beban yang bekerja. Dengan demikian perpindahan-perpindahan yang tak diketahui akan hanya melibatkan rotasi-rotasi titik-hubungnya dan semua momen ujungnya dapat diekspresikan sebagai fungsi dari perpindahan-perpindahan yang tak diketahui tersebut melalui persamaan-persamaan defleksi kemiringan. rotasi-rotasi titik-hubung yang tak diketahui dapat diperoleh. Dengan menggantikan nilai-nilai rotasi titik-hubung kembali ke dalam persamaan-persamaan defleksi kemiringan, momen-momen ujung diperoleh. Semua momen ujung yang telah diketahui, gaya aksial, gaya geser dan momen pada semua batang dapat diperoleh dengan menerapkan hukum-hukum statika terhadap batang-batang individual.

V.2 Penerapan Metode Defleksi Kemiringan Pada Kerangka Kaku Statis Tak Tentu Dengan Goyangan Ke Samping.

Untuk kerangka kaku bertitik-hubung menyiku, translasi-translasi titik-hubung yang tak diketahui biasanya mengarah horizontal, karenanya dinamakan *goyangan ke samping (sides ways)* yang tak diketahui. Jumlah kerangka kaku menyiku akan sama dengan jumlah tingkat dalam kerangka kaku empat persegi panjang. Misalnya kerangka kaku bertingkat satu pada Gambar 5.2a, translasi yang tak diketahui yang mungkin hanyalah goyangan ke samping kanan dari titik hubung *A*, *B*, atau *C*. Kondisi keseimbangan untuk rotasi *searah jarum jam* yang tak diketahui di titik-hubung *B*, sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 5.2b, jumlah momen *berlawanan arah jarum jam* yang bekerja di titik-hubung adalah nol, atau

$$M_2 + M_3 + M_7 = 0 \dots\dots\dots (5.2)$$



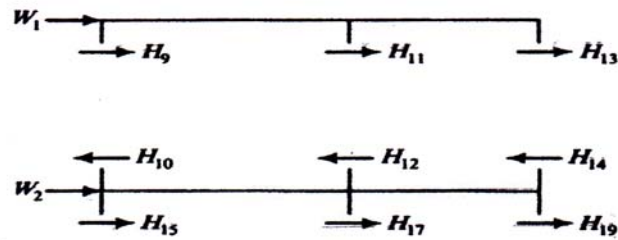
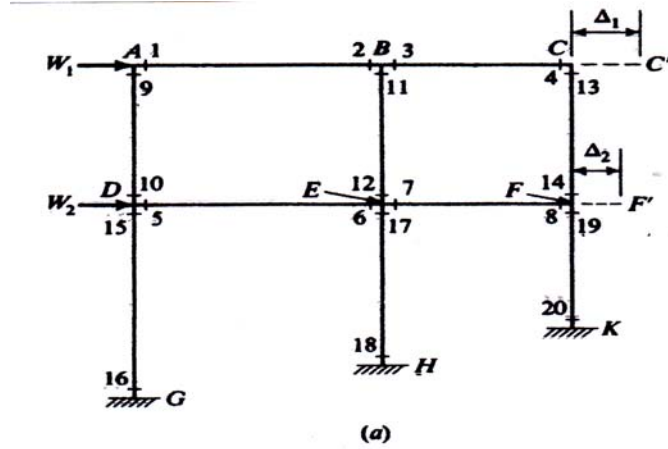
Gambar 5.2 Kerangka Kaku Tipikal Bertingkat Satu

Kondisi keseimbangan untuk goyangan ke samping *kanan* yang tak diketahui di titik-titik pada diagram benda bebas paduan titik-titik hubung A, B, atau C adalah bahwa jumlah gaya-gaya horizontal yang bekerja ke kiri pada diagram benda bebas paduan titik-titik hubung A, B, atau C, sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 5.2c adalah nol atau

$$-W_1 - H_5 - H_7 - H_9 = 0 \quad (5.3)$$

dengan H_5 , H_7 , dan H_9 dapat diekspresikan sebagai fungsi dari momen-momen ujung pada Gambar benda bebas kolom-kolom, sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 5.2d.

Untuk kerangka kaku tipikal bertingkat dua pada Gambar 5.3a, terdapatlah enam rotasi titik-hubung yang tak diketahui dan dua goyangan ke samping yang tak diketahui yang ditunjukkan sebagai Δ_1 ke sebelah *kanan* dari titik-hubung A, B, atau C dan Δ_2 ke sebelah *kanan* dari titik-hubung D, E, atau F.



(b) Kondisi-kondisi goyangan ke samping

Gambar 5.3 Kerangka Kaku Tipikal Bertingkat Dua

Kedua kondisi keseimbangan yang berkaitan dengan dua goyangan ke samping yang tak diketahui tersebut diperoleh dengan menyamakan gaya-gaya horisontal yang bekerja ke *kiri* pada benda bebas paduan titik-titik hubung *A*, *B*, dan *C* yang kemudian benda bebas paduan titik-titik hubung *D*, *E*, dan *F*, dengan nol. Dengan demikian,

$$-W_1 - H_9 - H_{11} - H_{13} = 0 \quad \text{.....} \quad (5.4a)$$

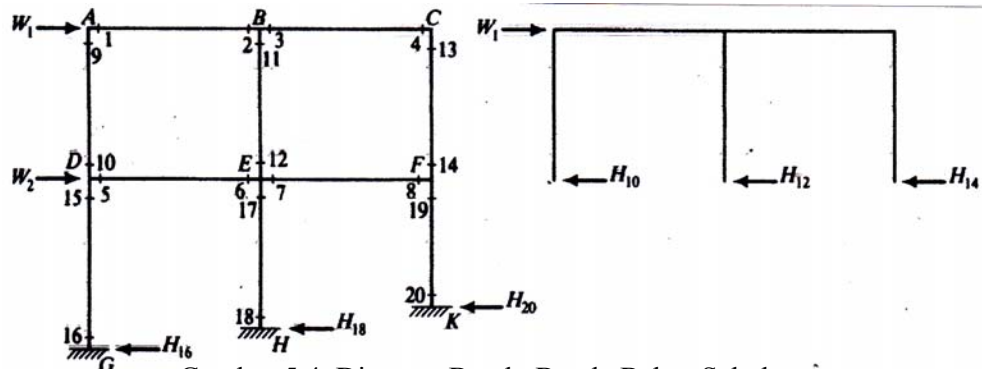
$$\text{dan } -W_2 + H_{10} + H_{12} + H_{14} - H_{15} - H_{17} - H_{19} = 0 \quad \text{.....} \quad (5.4b)$$

Kedua kondisi gaya geser yang berkaitan dengan goyangan-goyang ke samping yang tak diketahui Δ_1 dan Δ_2 ke sebelah untuk kerangka kaku pada Gambar 5.3 dapat dituliskan dengan cara lain dalam bentuk :

$$W_1 = H_{10} + H_{12} + H_{14} \quad \text{.....} \quad (5.5a)$$

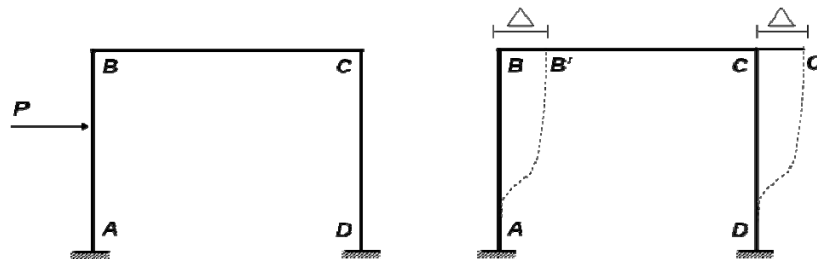
$$\text{dan } W_1 + W_2 = H_{16} + H_{18} + H_{20} = \quad \text{.....} \quad (5.5b)$$

Sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 5.4, jumlah semua gaya horisontal yang bekerja ke kakanan pada kerangka kaku, dari puncaknya hingga dasar-dasar himpunan kolom pada tingkat yang sama, sama dengan jumlah gaya-gaya geser yang bekerja ke kiri di dasar-dasar kolom.

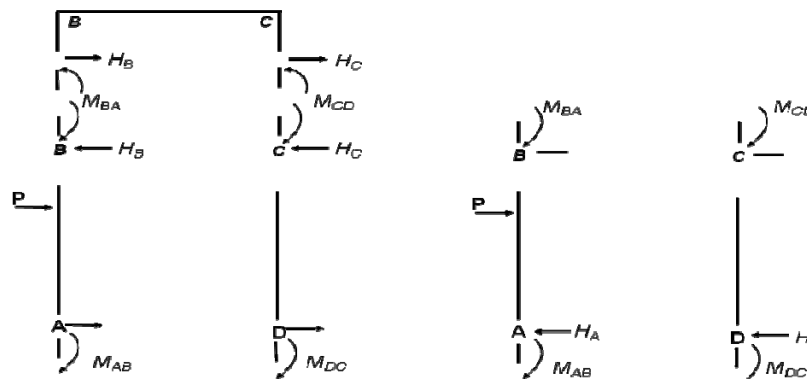


Gambar 5.4 Diagram Benda-Benda Bebas Sehubungan Dengan Goyangan ke samping

Analisa kerangka kaku dengan goyanga ke samping diperlihatkan pada Gambar 5.5a, serta diagram benda-benda bebas dan pengecekan kondisi gaya geser diperlihatkan pada Gambar 5.5b.



(a) Kerangka kaku dengan goyangan ke samping



(b) Diagram benda-benda bebas dan pengecekan kondisi gaya geser

Gambar 5.5 Analisa Kerangka Kaku Dengan Goyangan

Perbedaan persamaan-persamaan defleksi kemiringan pada kerangka kaku tak bergoyang dengan kerangka kaku bergoyang, yaitu pada kolom-kolomnya, seperti diperlihatkan di dalam persamaan-persamaan berikut ini :

$$M_{AB} = M_{0AB} + \frac{2E(I_{AB})}{L_{AB}} \left(2\theta_A + \theta_B - \frac{3\Delta}{L_{AB}} \right) \dots\dots\dots (5.6a)$$

$$M_{BA} = M_{0BA} + \frac{2E(I_{BA})}{L_{BA}} \left(2\theta_B + \theta_A - \frac{3\Delta}{L_{BA}} \right) \dots\dots\dots (5.6b)$$

$$M_{CD} = M_{0CD} + \frac{2E(I_{CD})}{L_{CD}} \left(2\theta_C + \theta_D - \frac{3\Delta}{L_{CD}} \right) \dots\dots\dots (5.6c)$$

$$M_{DC} = M_{0DC} + \frac{2E(I_{DC})}{L_{DC}} \left(2\theta_D + \theta_C - \frac{3\Delta}{L_{DC}} \right) \dots\dots\dots (5.6d)$$

dengan kondisi gaya geser :

$$H_B = \frac{Pa}{L_{AB}} + \frac{M_{AB} + M_{BA}}{L_{AB}} \dots\dots\dots (5.7a)$$

$$H_C = \frac{M_{CD} + M_{DC}}{L_{CD}} \dots\dots\dots (5.7b)$$

$$-H_B - H_C = 0 \dots\dots\dots (5.7c)$$

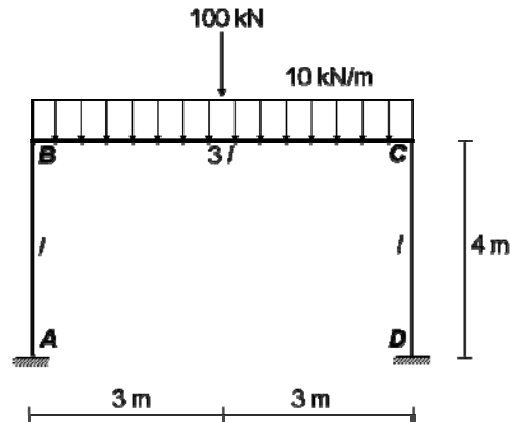
dan cek gaya geser :

$$H_A + H_D \approx P \dots\dots\dots (5.8a)$$

$$\left[\left(\frac{Pb}{L_{AB}} + \frac{M_{AB} + M_{BA}}{L_{AB}} \right) + \left(\frac{M_{CD} + M_{DC}}{L_{CD}} \right) \right] \approx P \dots\dots\dots (5.8b)$$

V.3 Contoh-Contoh Soal dan Pembahasan

Soal 1. Analisalah kerangka kaku pada Gambar 5.6 dengan metode defleksi kemiringan. Tentukan reaksi perletakan, gaya geser, dan momen-momen pada semua batangnya.



Gambar 5.6 Kerangka Kaku Contoh Soal V.1

Penyelesaian :

(1) *Momen-momen ujung jepit.*

$$M_{0AB} = M_{0BA} = 0$$

$$M_{0BC} = -\frac{10(6)^2}{12} - \frac{100(3)(3)^2}{(6)^2} = -105 \text{ kNm}$$

$$M_{0CB} = +\frac{10(6)^2}{12} + \frac{100(3)^2(3)}{(6)^2} = +105 \text{ kNm}$$

$$M_{0CD} = M_{0DC} = 0$$

(2) *Persamaan-persamaan defleksi kemiringan.* Untuk tumpuan di A dan D jepit, maka $\theta_A = \theta_D = 0$.

$$M_{AB} = M_{0AB} + \frac{2E(I)}{4}(2\theta_A + \theta_B) = 0,5EI\theta_B$$

$$M_{BA} = M_{0BA} + \frac{2E(I)}{4}(2\theta_B + \theta_A) = EI\theta_B$$

$$M_{BC} = M_{0BC} + \frac{2E(3I)}{6}(2\theta_B + \theta_C) = -105 + 2EI\theta_B + EI\theta_C$$

$$M_{CB} = M_{0CB} + \frac{2E(3I)}{6}(2\theta_C + \theta_B) = +105 + 2EI\theta_C + EI\theta_B$$

$$M_{CD} = M_{0CD} + \frac{2E(I)}{4}(2\theta_C + \theta_D) = EI\theta_C$$

(3) *Persaman-persamaan serempak*, memenuhi syarat sambungan :

- sambungan di B : $M_{BA} + M_{BC} = 0$

- sambungan di C : $M_{CB} + M_{CD} = 0$

Dengan memasukkan persamaan-persamaan defleksi kemiringan kedalam syarat-syarat sambungan, maka ditetapkan persamaan berikut :

$$3,00EI\theta_B + 1,00EI\theta_C = +105,00$$

$$1,00EI\theta_B + 3,00EI\theta_C = -105,00$$

Penyelesaian persaman serempak dengan cara eliminasi dan substitusi, hasilnya adalah :

$$EI\theta_B = +52,50 \qquad EI\theta_C = -52,50$$

(4) *Momen-momen ujung* :

$$M_{AB} = 0,5(+52,50) = +26,25 \text{ kNm}$$

$$M_{BA} = +52,50 \text{ kNm}$$

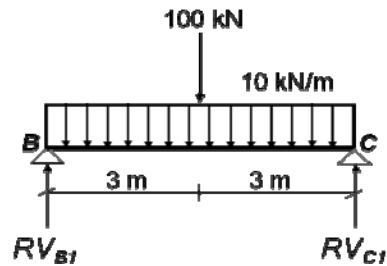
$$M_{BC} = -105,00 + 2(+52,50) + (-52,50) = -52,50 \text{ kNm}$$

$$M_{CB} = +105,00 + 2(-52,50) + (+52,50) = +52,50 \text{ kNm}$$

$$M_{CD} = -52,50 \text{ kNm}$$

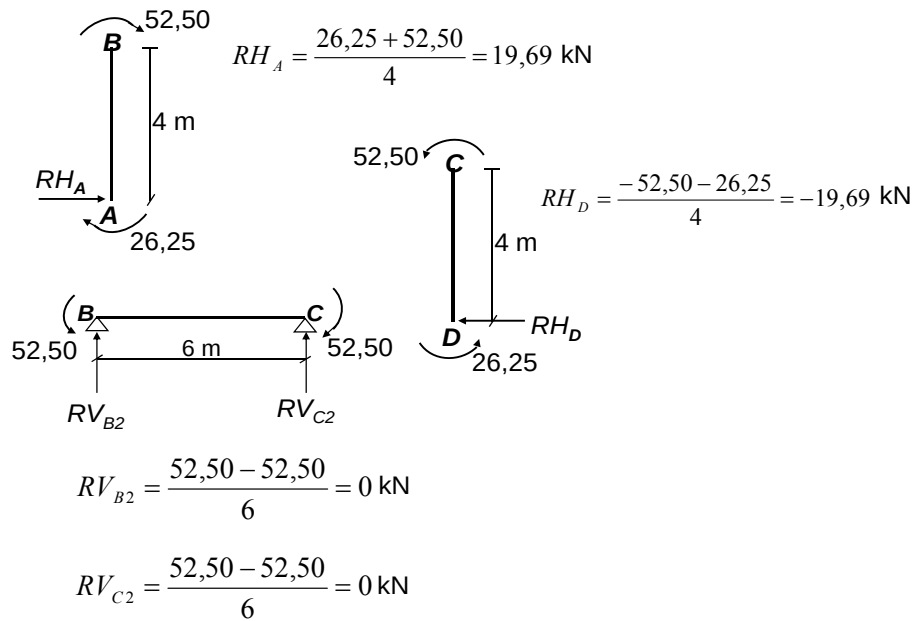
$$M_{DC} = 0,5(-52,50) = -26,26 \text{ kNm}$$

- (3) *Reaksi perletakan.* Reaksi total yang terjadi adalah reaksi akibat beban dan reaksi pengaruh momen.



$$RV_{B1} = RV_{C1} = \frac{10 \cdot 6}{2} + \frac{100}{2} = 80 \text{ kN}$$

- (a) Reaksi perletakan akibat beban



- (b) Reaksi perletakan pengaruh momen

Gambar 5.7 Reaksi Perletakan Contoh Soal V.1

Reaksi total :

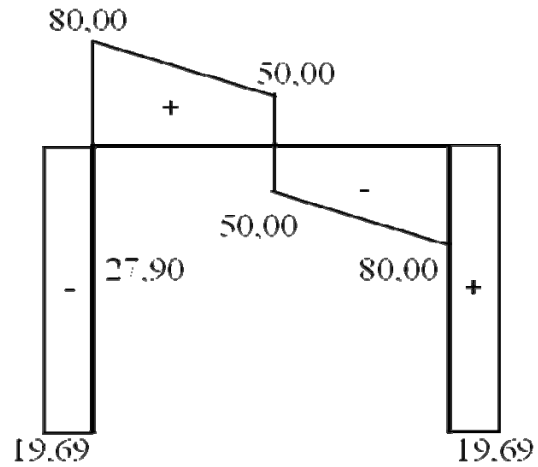
$$R_{HA} = 19,69 \text{ kN}$$

$$R_{HD} = -19,69 \text{ kN}$$

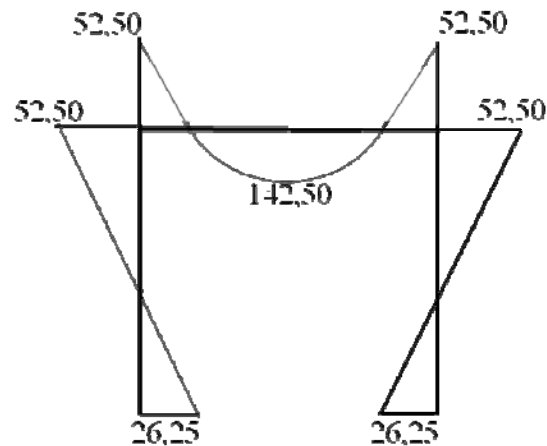
$$R_{VA} = R_{VB} = 80 \text{ kN}$$

$$R_{VC} = R_{VD} = 80 \text{ kN}$$

(4) Diagram gaya geser dan diagram momen.



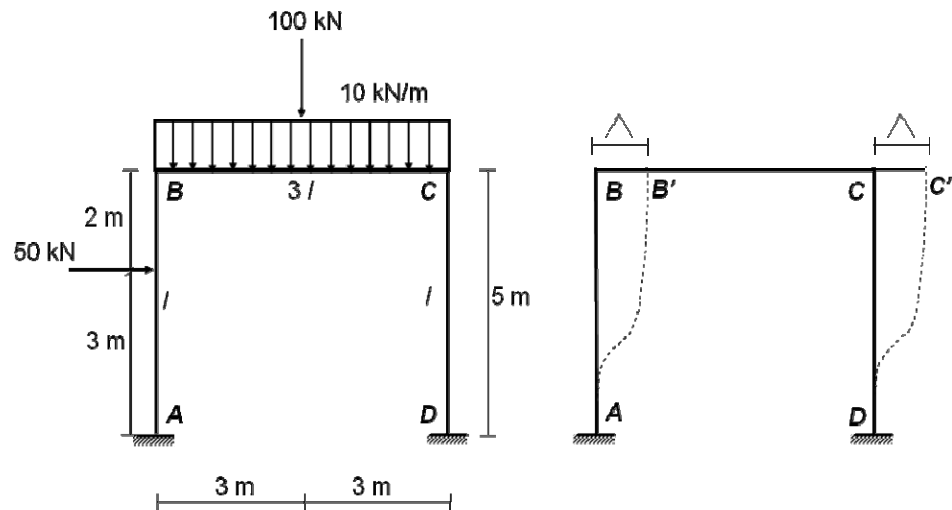
(a) Diagram gaya geser



(b) Diagram momen

Gambar 5.8 Diagram Gaya Geser dan Momen Contoh Soal V.1

Soal 2. Analisalah kerangka kaku pada Gambar 5.9 dengan metode defleksi kemiringan. Tentukan reaksi perletakan, gaya geser, dan momen-momen pada semua batangnya.



Gambar 5.9 Kerangka Kaku Contoh Soal V.2

Penyelesaian :

(1) *Momen-momen ujung jepit.*

$$M_{0AB} = -\frac{50(3)(2)^2}{(5)^2} = -24 \text{ kNm}$$

$$M_{0BA} = \frac{50(3)^2(2)}{(5)^2} = +36 \text{ kNm}$$

$$M_{0BC} = -\frac{10(6)^2}{12} - \frac{100(3)(3)^2}{(6)^2} = -105 \text{ kNm}$$

$$M_{0CB} = +\frac{10(6)^2}{12} + \frac{100(3)^2(3)}{(6)^2} = +105 \text{ kNm}$$

$$M_{0CD} = M_{0DC} = 0$$

(2) *Persamaan-persamaan defleksi kemiringan.* Untuk tumpuan di A dan D jepit, maka $\theta_A = \theta_D = 0$.

$$M_{AB} = M_{0AB} + \frac{2E(I)}{5} \left(2\theta_A + \theta_B - \frac{3\Delta}{5} \right) = -24 + 0,4EI\theta_B - 0,24EI\Delta$$

$$M_{BA} = M_{0BA} + \frac{2E(I)}{5} \left(2\theta_B + \theta_A - \frac{3\Delta}{5} \right) = +36 + 0,8EI\theta_B - 0,24EI\Delta$$

$$M_{BC} = M_{0BC} + \frac{2E(3I)}{6}(2\theta_B + \theta_C) = -105 + 2EI\theta_B + EI\theta_C$$

$$M_{CB} = M_{0CB} + \frac{2E(3I)}{6}(2\theta_C + \theta_B) = +105 + 2EI\theta_C + EI\theta_B$$

$$M_{CD} = M_{0CD} + \frac{2E(I)}{5}\left(2\theta_C + \theta_D - \frac{3\Delta}{5}\right) = 0,8EI\theta_C - 0,24EI\Delta$$

$$M_{DC} = M_{0DC} + \frac{2E(I)}{5}\left(2\theta_D + \theta_C - \frac{3\Delta}{5}\right) = 0,4EI\theta_C - 0,24EI\Delta$$

(3) Gaya geser :

$$H_B = \frac{50,3}{5} + \left[\frac{(-24 + 0,4EI\theta_B - 0,24EI\Delta) + (+36 + 0,8EI\theta_B - 0,24EI\Delta)}{5} \right]$$

$$= 32,4 + 0,24EI\theta_B - 0,096EI\Delta$$

$$H_C = \left[\frac{(0,8EI\theta_C - 0,24EI\Delta) + (0,4EI\theta_C - 0,24EI\Delta)}{5} \right]$$

$$= 0,24EI\theta_C - 0,096EI\Delta$$

(4) Persaman-persamaan serempak, memenuhi syarat sambungan :

$$\text{- sambungan di B : } MBA + MBC = 0$$

$$\text{- sambungan di C : } MCB + MCD = 0$$

$$\text{- kondisi gaya geser : } -HB - H_C = 0$$

Dengan memasukkan persamaan-persamaan defleksi kemiringan kedalam syarat-syarat sambungan, maka ditetapkan persamaan berikut :

$$2,80EI\theta_B + 1,00EI\theta_C - 0,24EI\Delta = +69,00$$

$$1,00EI\theta_B + 2,80EI\theta_C - 0,24EI\Delta = -105,00$$

$$-0,24EI\theta_B - 0,24EI\theta_C + 0,19EI\Delta = +32,40$$

Penyelesaian persamaan serempak dengan cara eliminasi dan substitusi, hasilnya adalah :

$$EI\theta_B = +55,29$$

$$EI\theta_C = -41,38$$

$$EI\Delta = +185,13$$

(5) *momen ujung* :

$$M_{AB} = -24,00 + 0,4(+55,29) - 0,24(+185,13) = -46,32 \text{ kNm}$$

$$M_{BA} = +36,00 + 0,8(+55,29) - 0,24(+185,13) = +35,80 \text{ kNm}$$

$$M_{BC} = -105,00 + 2(+55,29) + (-41,38) = -35,80 \text{ kNm}$$

$$M_{CB} = +105,00 + 2(-41,38) + (+55,29) = +77,53 \text{ kNm}$$

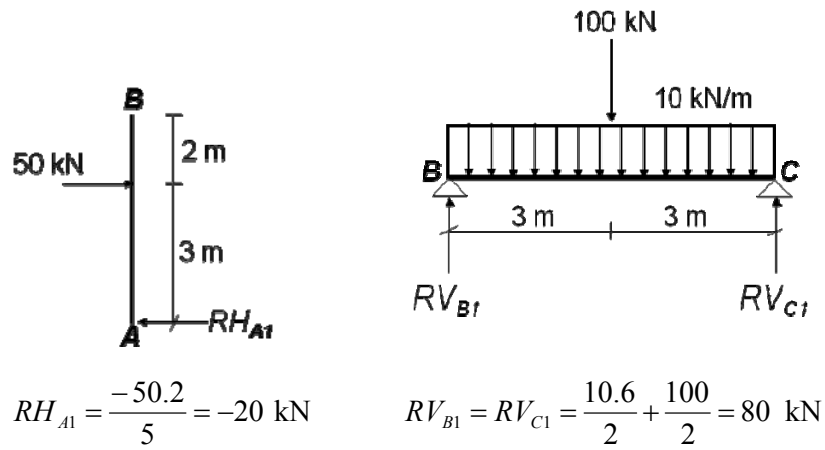
$$M_{CD} = 0,8(-41,38) - 0,24(+185,13) = -77,53 \text{ kNm}$$

$$M_{DC} = 0,4(-41,38) - 0,24(+183,13) = -60,98 \text{ kNm}$$

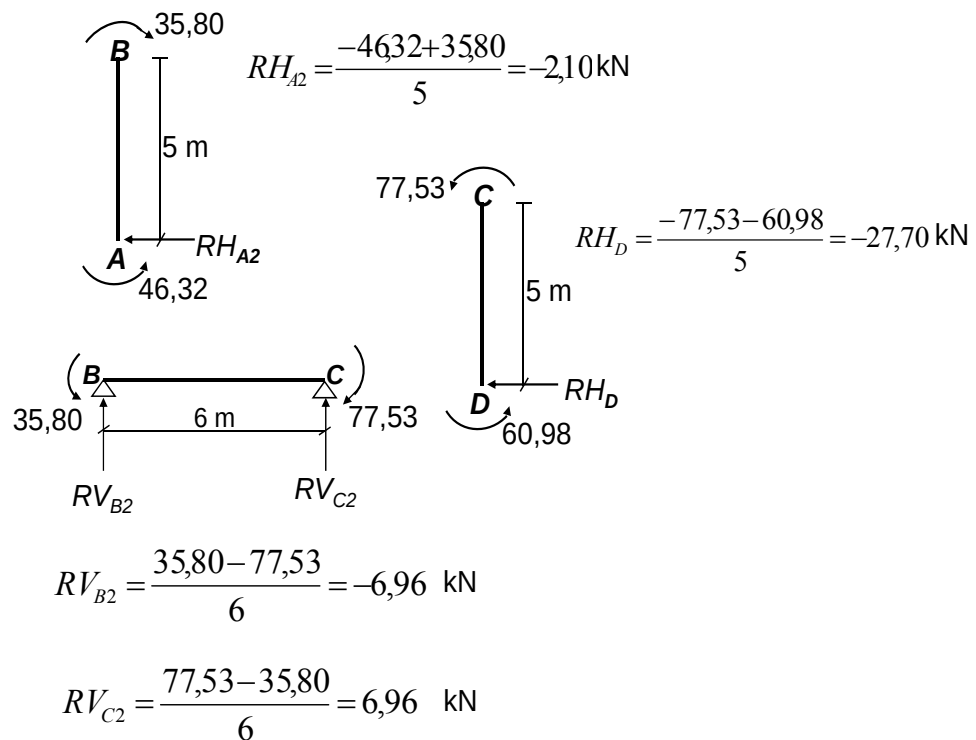
(6) *Cek gaya geser* :

$$\left[\left(\frac{50,2}{5} + \frac{46,32 - 35,8}{5} \right) + \left(\frac{77,53 + 60,98}{5} \right) \right] \approx 50$$

(7) *Reaksi perletakan*. Reaksi total yang terjadi adalah reaksi akibat beban dan reaksi pengaruh momen.



(a) Reaksi perletakan akibat beban



(b) Reaksi perletakan pengaruh momen

Gambar 5.10 Reaksi Perletakan Contoh Soal V.2

Reaksi total :

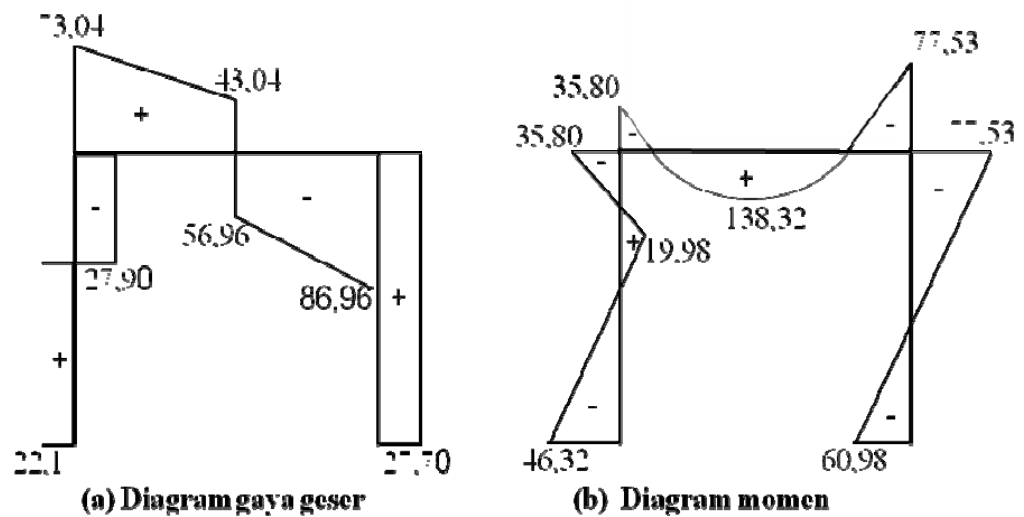
$$R_{HA} = -22,1 \text{ kN}$$

$$R_{HD} = -27,7 \text{ kN}$$

$$R_{VA} = R_{VB} = 73,04 \text{ kN}$$

$$R_{VC} = R_{VD} = 86,96 \text{ kN}$$

(8) Diagram gaya geser dan diagram momen :

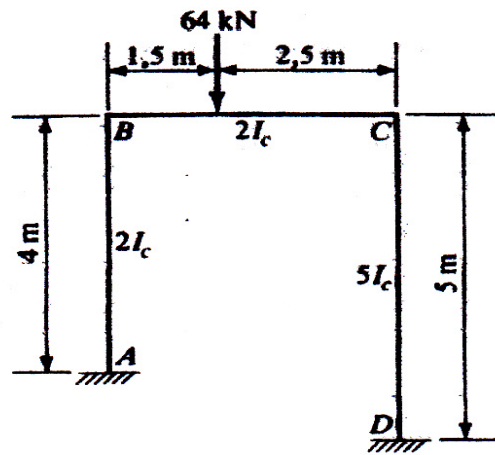


Gambar 5.11 Diagram Gaya Geser dan Momen Contoh Soal V.2

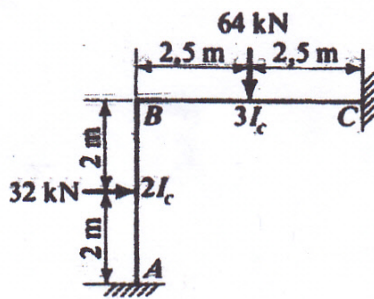
V.4 Soal-Soal Latihan

Analisalah kerangka kaku di bawah ini dengan menggunakan metode defleksi kemiringan, gambar diagram gaya geser dan momen.

1.



2.



3.

