

Pertemuan III,IV,V

II. Metode Persamaan Tiga Momen

II.1 Uraian Umum Metode Persamaan Tiga Momen

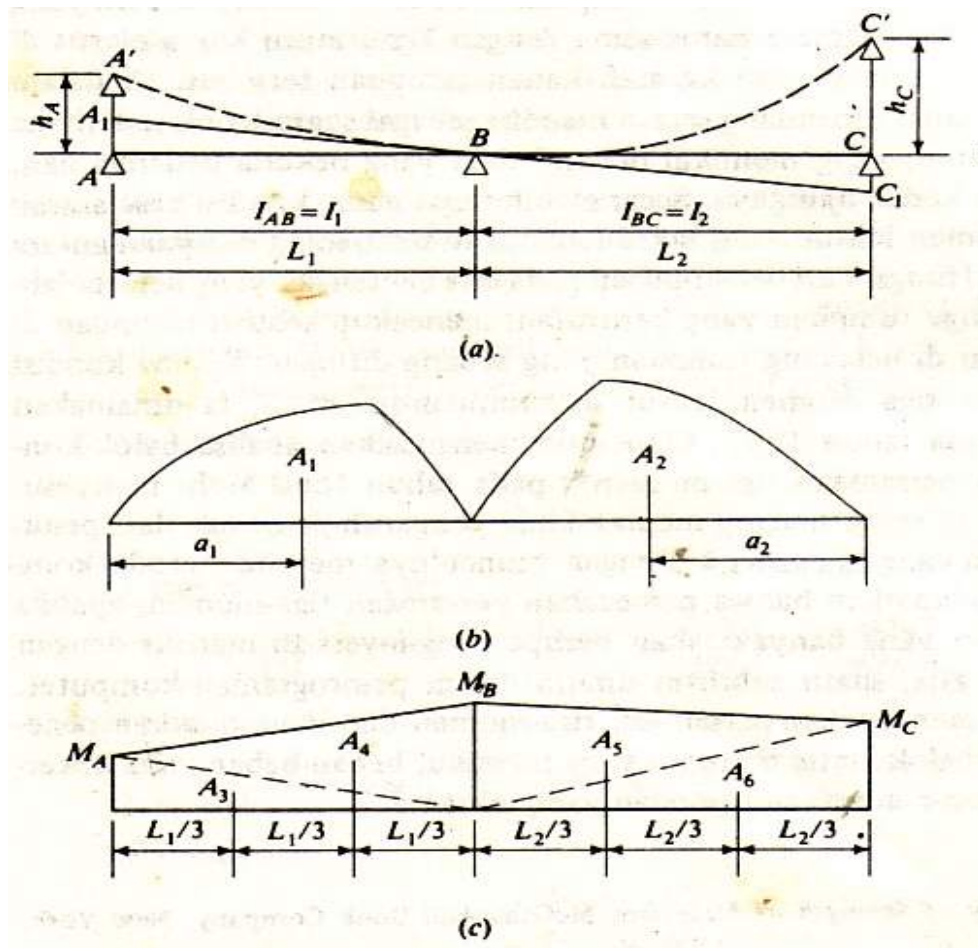
Analisa balok menerus, pendekatan yang lebih mudah adalah dengan menggunakan momen-momen lentur statis yang tak diketahui di tumpuan-tumpuan sebagai kelebihan. Untuk momen yang tak diketahui di suatu tumpuan terjepit, kondisi keselarasan yang bersangkutan adalah bahwa kemiringan di situ haruslah nol. Untuk momen yang tak diketahui di suatu tumpuan antara, kondisi keselarasan yang bersangkutan ke arah kiri tumpuannya harus sama dengan kemiringan kurva elastis di ujung kiri bentangan yang bersangkutan ke arah kanan tumpuan tersebut.

Pada cara ini, setiap bentangan dapat dipandang secara mandiri sebagai suatu balok sederhana yang momen inersianya tetap, yang memikul beban-beban yang bekerja padanya dan jika ada, momen-momen di kedua ujungnya. Secara lebih tepat guna, kondisi keselarasan yang berkaitan dengan momen lentur yang tak diketahui di sembarang tumpuan antara dapat diekspresikan sebagai fungsi dari beban-beban pada dua bentangan yang bersebelahan dan momen lentur di tiga tumpuan yang berurutan, mencakup sebuah tumpuan di depan dan sebuah tumpuan di belakang tumpuan yang sedang ditinjau. Karena kondisi keselarasan ini melibatkan tiga momen lentur di tumpuan-tumpuan, maka dinamakan ***persamaan tiga momen***.

Pada tahun 1857, Clapeyron adalah orang yang menguraikan analisa balok menerus dengan menggunakan persamaan tiga momen. Kemudian tahun 1860 Mohr menyesuaikan lebih lanjut metode tersebut dengan memasukkan pengaruh dari penurunan-penurunan tumpuan yang tak sama. Selanjutnya dengan munculnya metode-metode computer, seseorang akan mendapatkan bahwa pemecahan persamaan tiga momen, apabila digunakan untuk bentangan yang banyak, akan berupa peng-invers-an matriks dengan elemen-elemen tridiagonal saja, suatu subrutin umum dalam pemrograman komputer.

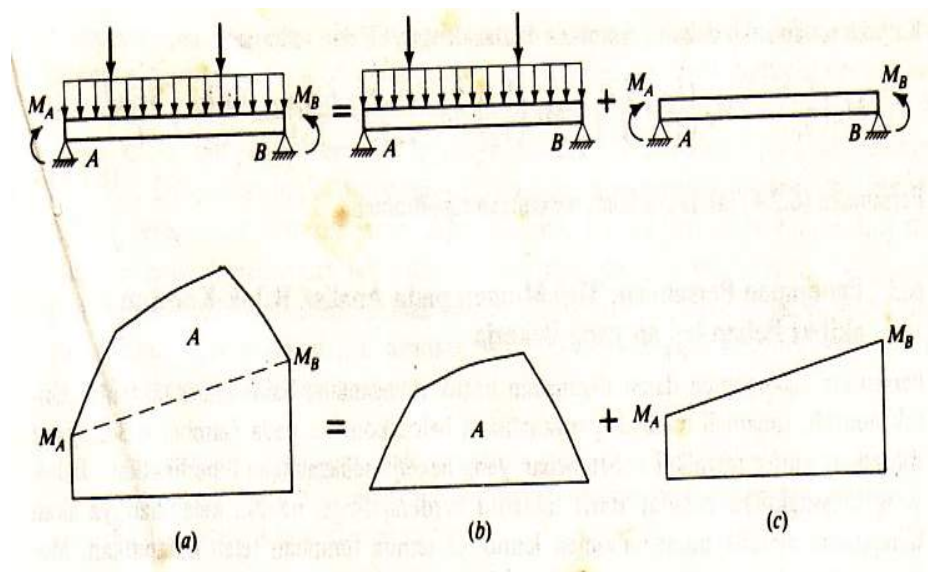
II.2 Penurunan Persamaan Tiga Momen

Persamaan tiga momen menyatakan hubungan antara momen lentur di tiga tumpuan yang berurutan pada suatu balok kontinu yang memikul beban-beban yang bekerja pada kedua bentangan yang bersebelahan, dengan atau tanpa penurunan-penurunan tumpuan yang tak sama. Hubungan ini dapat diturunkan berdasarkan *kontinuitas* kurva elastik di atas tumpuan tengah, yakni kemiringan garis singgung di ujung kanan bentangan sebelah kiri harus sama dengan kemiringan garis singgung di ujung kiri bentangan sebelah kanan.



Gambar 2.1 Diagram Momen Pada Dua Bentangan Yang Bersebelahan Pada Balok Menerus

Pada Gambar 2.1a bentangan AB dan BC sebagai dua bentangan yang bersebelahan pada suatu balok yang semula horisontal. Karena penuruna yang tak sama, tumpuan A dan tumpuan C lebih tinggi dari tumpuan B , masing-masing sebesar h_A dan h_C , dengan demikian kurva elastisnya melalui titik-titik A' , B' , dan C' . Misalnya M_A , M_B , dan M_C sebagai mkomen lentur di A , B , dan C , dimana momen-momen ini positif jika menyebabkan tekanan di bagian atas balok tersebut.



Gambar 2.2 Superposisi Diagram Momen Pada Suatu Bentangan Tipikal

Pada Gambar 2.2 di atas, dimana diagram momen pada bentangan AB dibagi menjadi dua bagian. Gambar 2.2b menyatakan diagram momen akibat beban-beban yang bekerja pada AB apabila dianggap sebagai suatu balok sederhana, dan Gambar 2.2c menyatakan diagram momen yang dihasilkan dari momen-momen M_A dan M_B di masing-masing tumpuan. Gambar 2.2a menyatakan diagram momen keseluruhan, atau jumlah dari Gambar 2.2b dan Gambar 2.2c.

Gambar 2.1 menyatakan diagram momen pada bentangan AB dan BC yang dibagi menjadi dua bagian. Diagram momen A_1 dan A_2 disebabkan oleh beban-beban pada masing-masing bentangan, dan diagram momen A_3 ,

A_4 dan A_5 , A_6 disebabkan oleh momen-momen ujung M_A , M_B pada bentangan AB dan M_B , M_C pada bentangan BC . Diagram-diagram momen balok sederhana akibat beban-beban yang bekerja pada bentangan-bentangannya telah diperoleh sebelumnya, dan tujuan analisa tersebut adalah memperoleh momen-momen lentur M_A , M_B dan M_C di tumpuan.

Hubungan antara M_A , M_B dan M_C dapat diturunkan dari kondisi keselarasan untuk balok menerus di B , atau garis singgung kurva elastis BA' di B terletak pada garis lurus yang sama dengan garis singgung kurva elastic BC' di B , sebagaimana terlihat pada Gambar 2.1a. Dengan kata lain, titik hubung B dapat dianggap sebagai suatu sambungan kaku. Dengan demikian kedua garis singgung di B pada kurva-kurva elastis dikedua belah sisi B , satu terhadap yang lain harus tetap membentuk sudut 180° . karena garis singgung A_1BC_1 pada Gambar 2.1a berupa garis lurus yang dinyatakan dengan persamaan berikut;

$$\frac{AA_1}{L_1} = \frac{CC_1}{L_2} \dots\dots\dots (2.1)$$

dimana : $AA_1 = h_A - A_1A' = h_A - (\text{lendutan di } A' \text{ dari garis singgung di } B)$

$$\begin{aligned} &= h_A - \frac{1}{EI_1} \left(A_1 a_1 + \frac{1}{3} A_3 L_1 + \frac{2}{3} A_4 L_1 \right) \\ &= h_A - \frac{1}{EI_1} \left(A_1 a_1 + \frac{1}{6} M_A L_1^2 + \frac{2}{3} M_B L_1^2 \right) \dots\dots\dots (2.2) \end{aligned}$$

dan $CC_1 = C_1C' - h_C = (\text{lendutan di } C' \text{ dari garis singgung di } B) - h_C$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{EI_2} \left(A_2 a_2 + \frac{2}{3} A_5 L_2 + \frac{1}{3} A_6 L_2 \right) - h_C \\ &= \frac{1}{EI_2} \left(A_2 a_2 + \frac{1}{3} M_B L_2^2 + \frac{1}{6} M_C L_2^2 \right) - h_C \dots\dots\dots (2.3) \end{aligned}$$

Substitusi persamaan 2.2 dan persamaan 2.3 ke dalam persamaan 2.1, maka diperoleh persamaan 2.4, berikut :

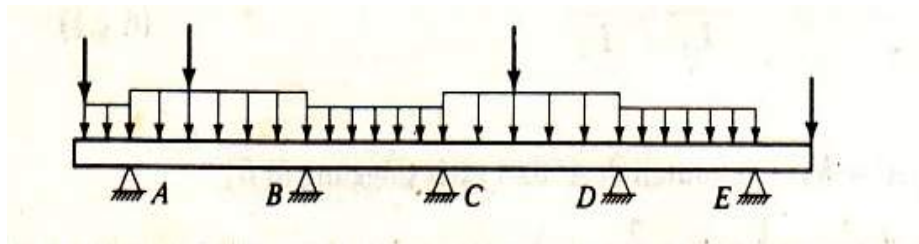
$$\frac{h_A}{L_1} - \frac{1}{L_1 EI_1} \left(A_1 a_1 + \frac{1}{6} M_A L_1^2 + \frac{1}{3} M_B L_1^2 \right) = \frac{1}{L_2 EI_2} \left(A_2 a_2 + \frac{1}{3} M_B L_2^2 + \frac{1}{6} M_C L_2^2 \right) - \frac{h_C}{L_2}$$

Dengan mengalikan setiap suku dalam persamaan 2.4 dengan $6E$, sehingga diperoleh :

$$M_A \left(\frac{L_1}{I_1} \right) + 2M_B \left(\frac{L_1}{I_1} + \frac{L_2}{I_2} \right) + M_C \left(\frac{L_2}{I_2} \right) = - \frac{6.A_1.a_1}{I_1.L_1} - \frac{6.A_2.a_2}{I_2.L_2} + \frac{6.Eh_C}{L_2} \dots (2.5)$$

Persamaan 2.5 dikenal sebagai ***persamaan tiga momen***.

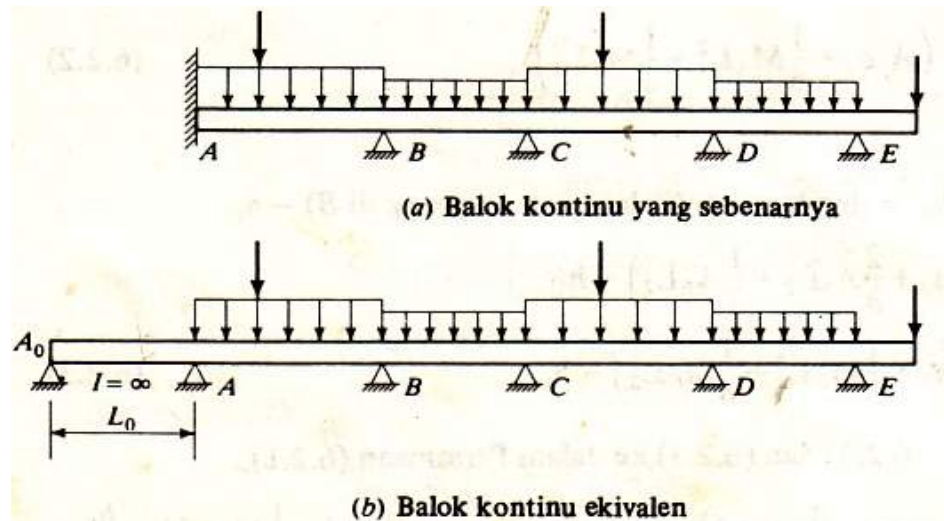
II.3 Penerapan Metode Persamaan Tiga Momen Pada Balok Statis Tak Tentu



Gambar 2.3 Balok Menerus Tipikal Dengan Momen Diketahui di Tumpuan-Tumpuan Ekstremnya

Persamaan tiga momen dapat digunakan untuk menganalisa balok statis tak tentu. Misalnya untuk menganalisa balok menerus pada Gambar 2.3 yang menerima pembebanan sebagaimana diperlihatkan. Balok tersebut berifat statis tak tentu berderajat tiga, namun kelebihan akan dihilangkan apabila momen-momen lentur di semua tumpuan telah diperoleh. Momen di tumpuan A dan E dapat ditentukan dengan mudah berdasarkan pemeriksaan mengikuti hukum-hukum statika, Untuk menentukan momen di tumpuan B, C dan D dapat dibuat tiga persamaan tiga momen berdasarkan kontinuitas di tumpuan B, C dan D. Dengan kata lain momen-momen lentur M_B , M_C , dan M_D dipilih sebagai kelebihan-kelebihannya dan syarat bentuk yang diperlukan adalah berasal dari kontinuitas yang sapat dinyatakan dengan persamaan tiga momen. Jadi selalu ada syarat kontinuitas sebanyak momen-momen lentur yang belum diketahui di tumpuan-tumpuan. Bila momen lentur di semua tumpuan diketahui, setiap bentangan dapat dianalisa terpisah yaitu sebagai akibat pembebanan yang diberikan dan momen-momen ujungnya. Reaksi-reaksi di ujung-ujung setiap bentangan dapat diperoleh

melalui hukum-hukum statika, sehingga diagram gaya geser serta diagram momennya dapat digambarkan.



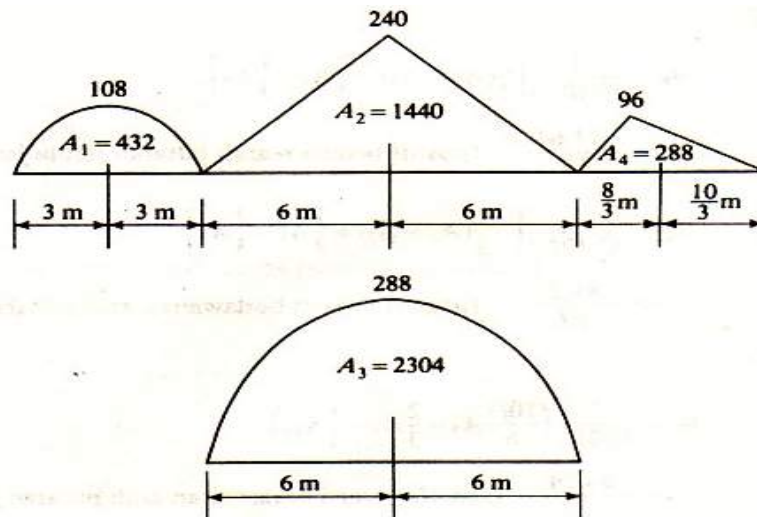
Gambar 2.4 Balok Menerus Tipikal Dengan Momen Yang Tak Diketahui Di Ujung Terjepitnya

Jika salah satu ujung balok menerus itu terjepit, sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 2.4, momen lentur di tumpuan terjepit merupakan salah satu kelebihan yang tak diketahui. Syarat bentuk yang diperlukan yang berhubungan dengan momen ujung terjepit yang diketahui itu adalah bahwa kemiringan garis singgung di A besarnya nol. Syarat ini dapat dipenuhi dengan menambahkan suatu bentangan khayal A_0A dengan sembarang panjang L_0 yang hanya ditumpu di A_0 dan memiliki momen inersia yang tak terhingga besarnya. Suatu persamaan tiga momen yang menggunakan tumpuan terjepit di A, yang dalam hal ini sebagai tumpuan antaranya dapat disusun, karena bentangan khayal A_0A memiliki momen inersia yang terhingga besarnya, diagram momennya tidak dapat menghasilkan luas bidang M/EI , karenanya tak terdapat kurva elastik. Selama A_0A masih dalam keadaan tak terdeformasi, garis singgung yang umum di A akan berupa garis lurus horisontal.

II.4 Contoh-Contoh Soal dan Pembahasan

Sola 1. Analisalah balok menerus pada Gambar 2.5a dengan menggunakan persamaan tiga momen. Gambarkan diagram gaya geser dan momennya.

Penyelesaian :



Gambar 2.5 Balok Menerus Contoh Soal II.1

Diagram-diagram momen pada AB , BC , dan CD yang diperoleh dengan memandang setiap bentangan sebagai suatu balok sederhana yang memikul beban-beban yang bekerja, diperlihatkan pada Gambar 2.5b. Untuk bentangan BC , diagram-diagram momen digambarkan secara terpisah, masing-masing untuk beban terpusat dan beban terbagi rata.

Dari pemeriksaan, $M_A = 0$ dan $M_D = -36$ kNm (negatif karena mengakibatkan tekanan di D pada bagian bawah balok). Dengan menerapkan persamaan tiga momen terhadap bentangan berikut :

Bentangan BC dan BC :

$$M_A \left(\frac{6}{3I} \right) + 2M_B \left(\frac{6}{3I} + \frac{12}{10I} \right) + M_C \left(\frac{12}{10I} \right) = -\frac{6(432)(3)}{6(3I)} - \frac{6(1440)(6)}{12(10I)} - \frac{6(2304)(6)}{12(10I)}$$

Bentangan BC dan CD :

$$M_B \left(\frac{12}{10I} \right) + 2M_C \left(\frac{12}{10I} + \frac{6}{2I} \right) + M_D \left(\frac{6}{2I} \right) = -\frac{6(1440)(6)}{12(10I)} - \frac{6(2304)(6)}{12(10I)} - \frac{6(288)(\frac{10}{3})}{6(2I)}$$

Disederhanakan, sehingga diperoleh :

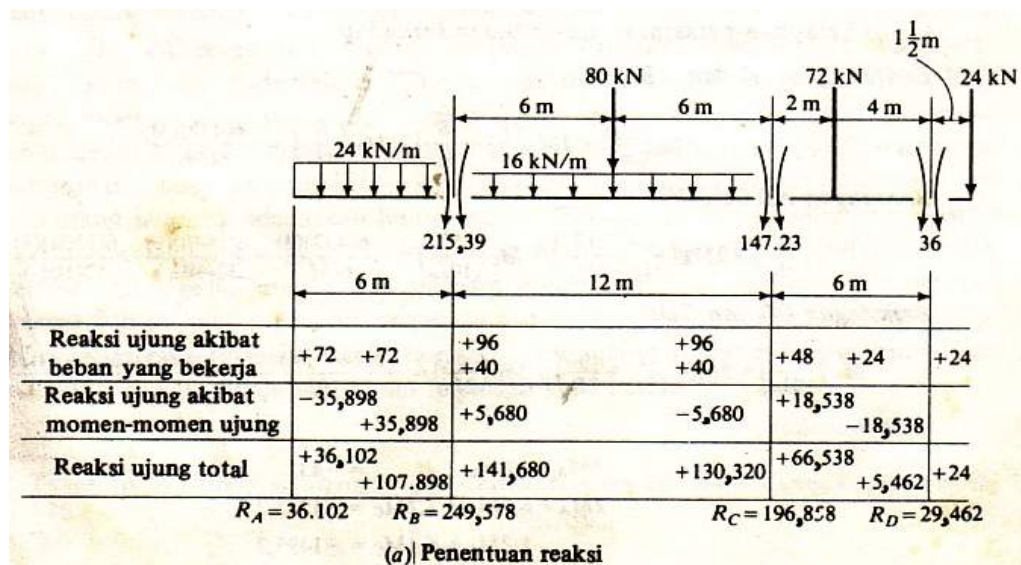
$$6,4 M_B + 1,2 M_C = - 1555,2$$

$$1,2 M_B + 8,4 M_C = - 1495,2$$

Diselesaikan dengan cara eliminasi dan substitusi, maka diperoleh :

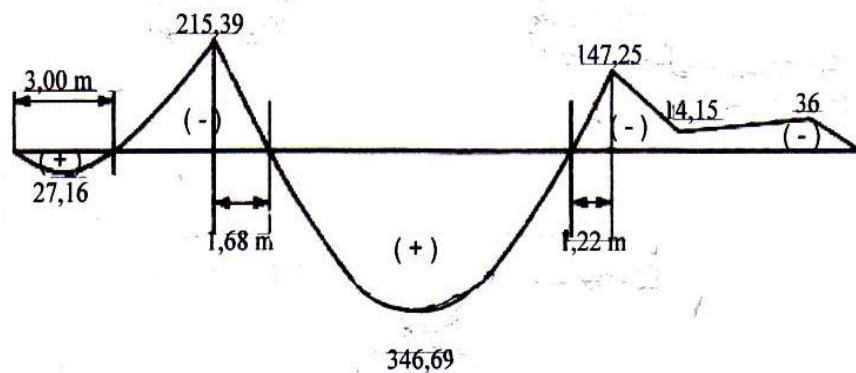
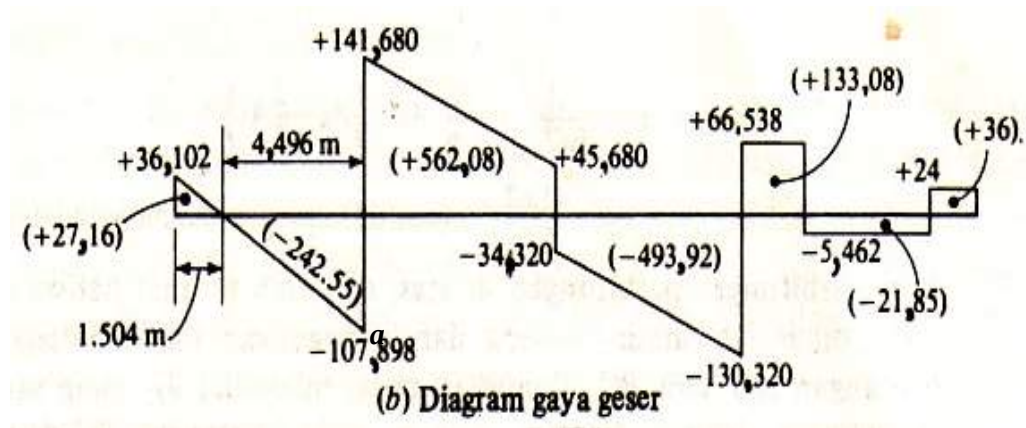
$$M_B = -215,39 \text{ kNm}$$

$$M_C = -147,25 \text{ kNm}$$



Gambar 2.6 Reaksi Perletakan Contoh Soal II.1

Reaksi-reaksi perletakan ditentukan sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 2.6. Reaksi total di ujung setiap bentangan sama dengan jumlah reaksi yang disebabkan oleh beban-beban yang bekerja pada bentangannya dan disebabkan oleh momen-momen di ujung-ujung bentangan tersebut. Sebagai contoh, jumlah momen ujung yang bekerja pada bentangan *BC* sama dengan $215,39 - 147,23 = 68,16$ kNm. *Berlawanan arah jarum jam*, yang memerlukan suatu kopel reaksi searah jarum jam, atau sebuah reaksi ke atas sebesar $68,16/12 = 5,680$ kN di *B* dan sebuah reaksi ke bawah sebesar $5,680$ kN di *C*. Reaksi total terhadap balok menerus di tumpuan *B* sama dengan jumlah reaksi-reaksi di ujung *B* terhadap bentangan *BA* dan *BC*, atau $R_B = 107,898 + 141,680 = 249,578$ kN.

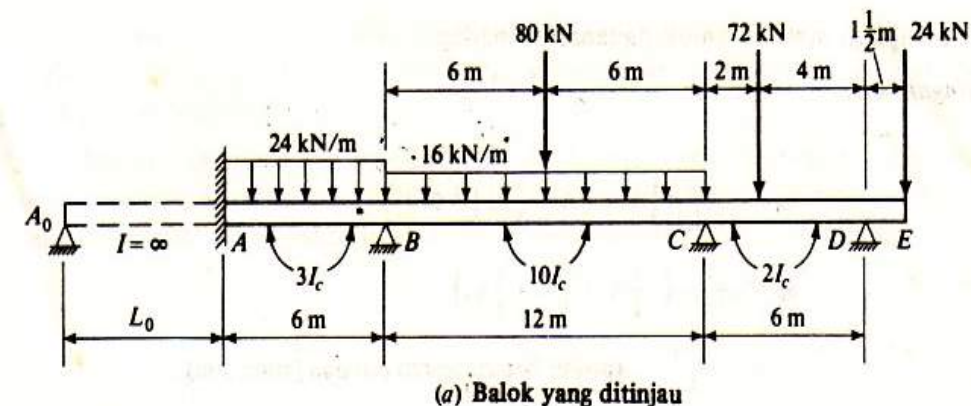


Gambar 2.7 Diagram Gaya Geser dan Momen Contoh Soal II.1

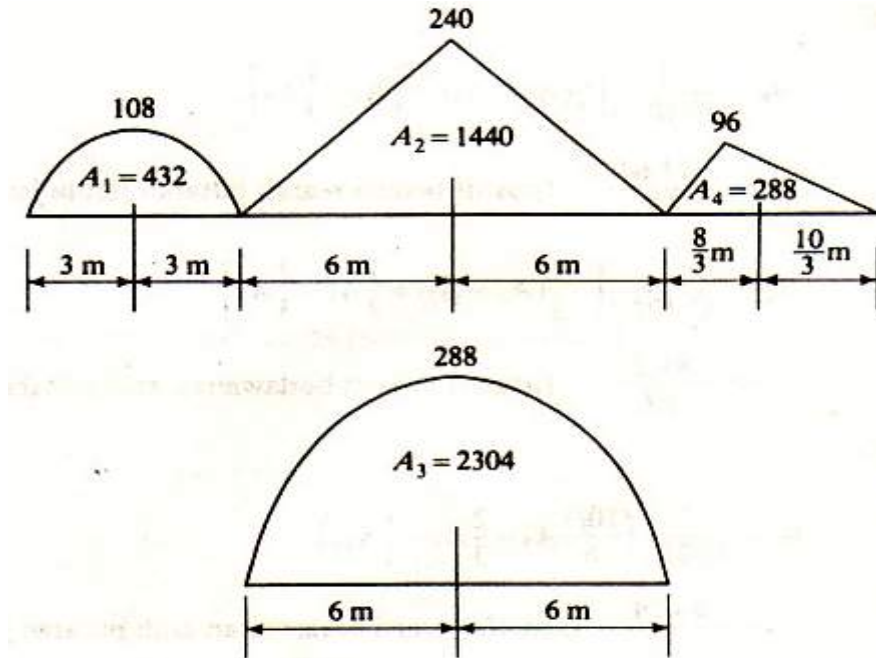
Setelah semua reaksi diperoleh diagram gaya geser digambarkan sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 2.7a. Titik gaya geser nol pada bentangan AB terletak pada jarak $36,102/24 = 1,504$ m dari tumpuan A . Luas setiap bagian dari diagram gaya geser dihitung dan ditunjukkan pada diagram gaya gesernya. Diagram momen diperlihatkan pada Gambar 2.7b, hubungan yang menyatakan bahwa beda momen antara dua titik sembarang sama dengan luas diagram gaya gesernya diantara kedua titiknya, digunakan secara berturut-turut diantara titik yang penting. Dengan cara yang sama M_B dan M_C dicek kembali sama dengan $-215,39$ dan $-147,23$. Jadi menunjukkan bahwa reaksi-reaksi yang diperoleh sebelumnya adalah benar. Perhatikan juga bahwa diagram momen akan bersifat linier apabila gaya gesernya tetap dan kemiringan kurva momen di sembarang titik sama dengan gaya geser di titiknya.

Sola 2. Analisalah balok menerus pada Gambar 2.8a dengan menggunakan persamaan tiga momen. Gambarkan diagram gaya geser dan momennya.

Penyelesaian :



Gambar 2.8a Balok Menerus Contoh Soal II.2



Gambar 2.8b Diagram Momen Pada Bentangan Sederhana Akibat Beban Yang Bekerja Contoh Soal II.2

Diagram-diagram momen pada AB , BC , dan CD yang diperoleh melalui peninjauan setiap bentangan sebagai suatu balok sederhana yang memikul beban-beban yang bekerja, diperlihatkan pada Gambar 2.8b. karena tumpuan A terjepit, suatu balok khayal A_0A , sepanjang L_0 dan dengan $I = \infty$ ditambahkan. Melalui pemeriksaan, $M_{A0} = 0$ dan $M_D = -36$ kNm. Dengan menerapkan persamaan tiga momen terhadap bentangan berikut :

Bentangan A_0A dan AB :

$$M_{A0} \left(\frac{L_0}{\infty} \right) + 2M_A \left(\frac{L_0}{\infty} + \frac{6}{3I} \right) + M_B \left(\frac{6}{3I} \right) = - \frac{6(432)(3)}{6(3I)}$$

Bentangan AB dan BC :

$$M_A \left(\frac{6}{3I} \right) + 2M_B \left(\frac{6}{3I} + \frac{12}{10I} \right) + M_C \left(\frac{12}{10I} \right) = - \frac{6(432)(3)}{6(3I)} - \frac{6(1440)(6)}{12(10I)} - \frac{6(2304)(6)}{12(10I)}$$

Bentangan BC dan CD :

$$M_B \left(\frac{12}{10I} \right) + 2M_C \left(\frac{12}{10I} + \frac{6}{2I} \right) + M_D \left(\frac{6}{2I} \right) = - \frac{6(1440)(6)}{12(10I)} - \frac{6(2304)(6)}{12(10I)} - \frac{6(288)(\frac{10}{3})}{6(2I)}$$

Disederhanakan, sehingga diperoleh :

$$4,0 M_A + 2,0 M_B = - 432$$

$$2,0 M_A + 6,4 M_B + 1,2 M_C = - 1555,2$$

$$1,2 M_B + 8,4 M_C = - 1495,2$$

Diselesaikan dengan cara eliminasi dan substitusi, maka diperoleh :

$$M_A = -0,36 \text{ kNm}$$

$$M_B = -215,28 \text{ kNm}$$

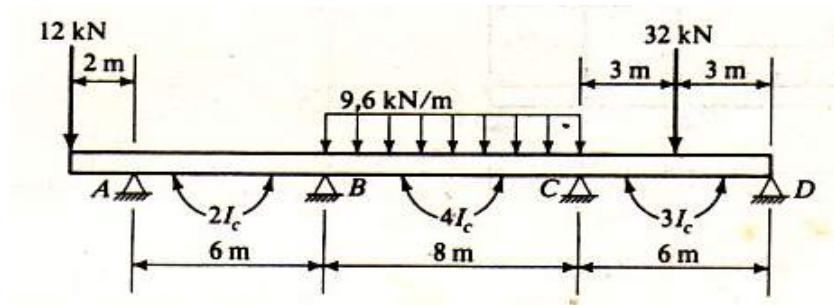
$$M_C = -147,24 \text{ kNm}$$

Reaksi-reaksi, diagram gaya geser dan momen dapatlah kemudian diperoleh melalui cara yang sama seperti pada sebelumnya (contoh soal II.1).

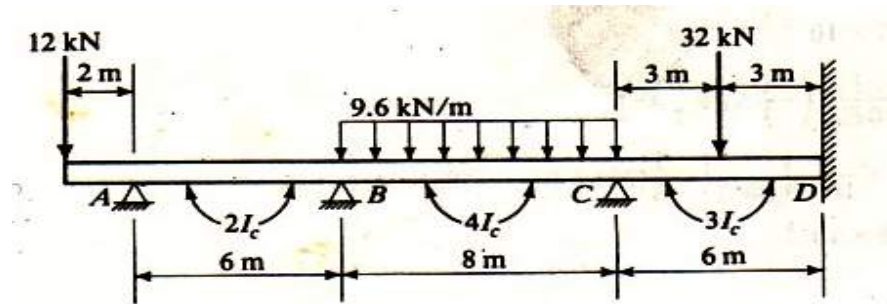
II.5 Soal-Soal Latihan

Analisalah balok menerus di bawah ini dengan menggunakan persamaan tiga momen, gambar diagram gaya geser dan momen.

1.



2.



3.

