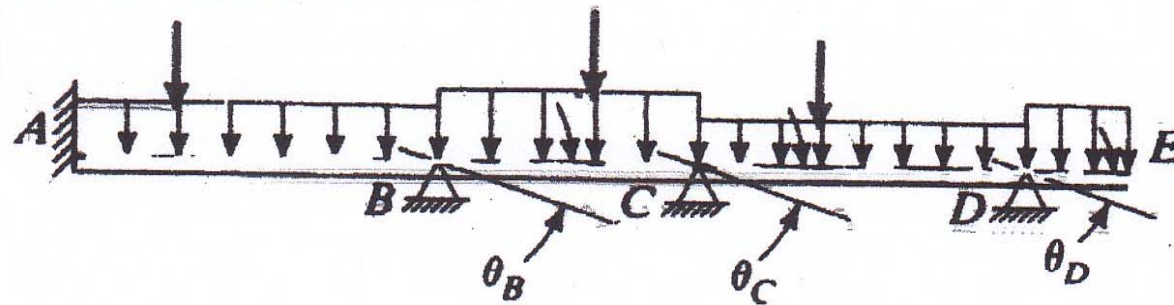


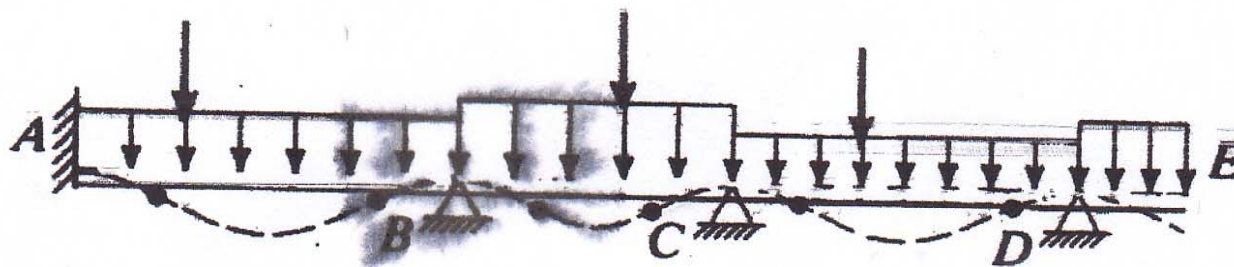
Metode Distribusi Momen

- Metode distribusi momen pada mulanya dikemukakan oleh Prof. Hardy Cross
- Metode distribusi momen dapat digunakan untuk menganalisa semua jenis balok dan kerangka kaku statis takentu.
- Metode ini merupakan suatu cara untuk menyelesaikan persamaan-persamaan serempak di dalam metode defleksi kemiringan dengan pendekatan berturut-turut.
- Di dalam pendesainan dan penganalisaan awal suatu struktur kecil atau bagian-bagian dari suatu struktur besar, metode distribusi momen tetap unggul karena kesederhanaan.

Konsep Dasar Metode Distribusi Momen



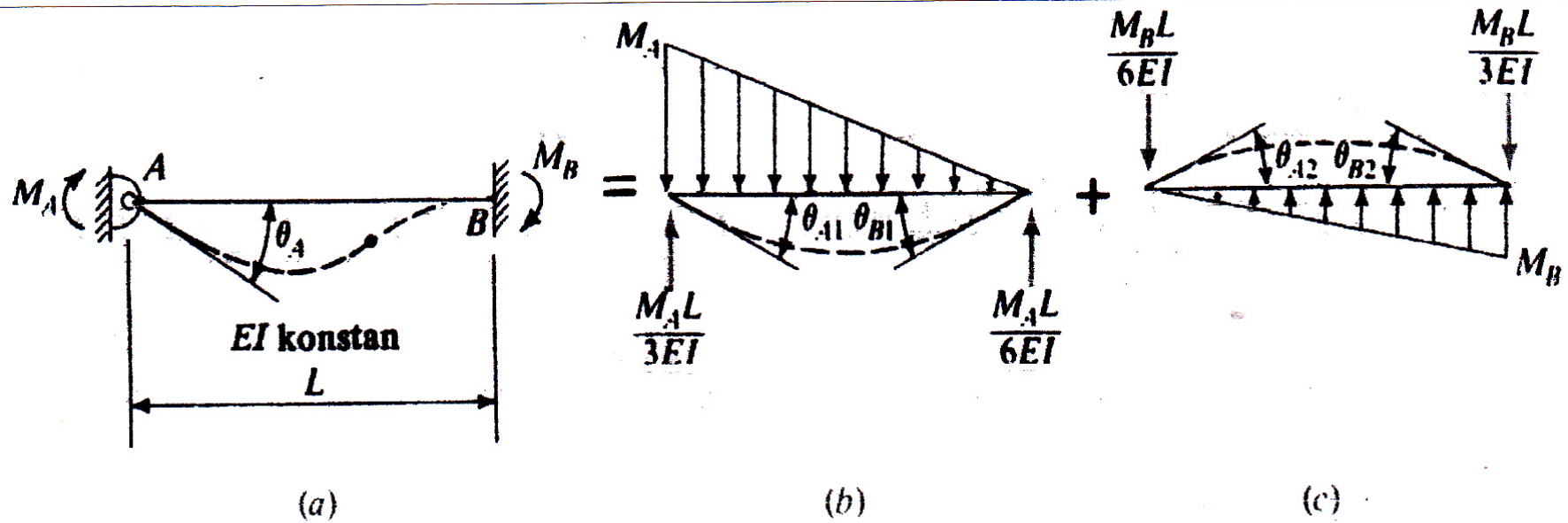
(a) Kondisi yang ditinjau, beban-beban yang bekerja



(b) Kondisi terjepit, beban-beban yang bekerja

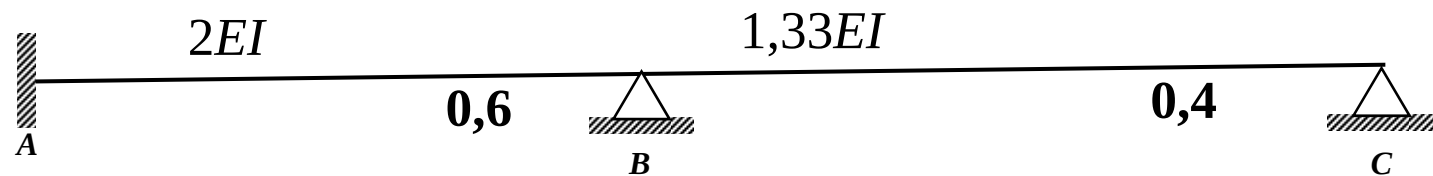
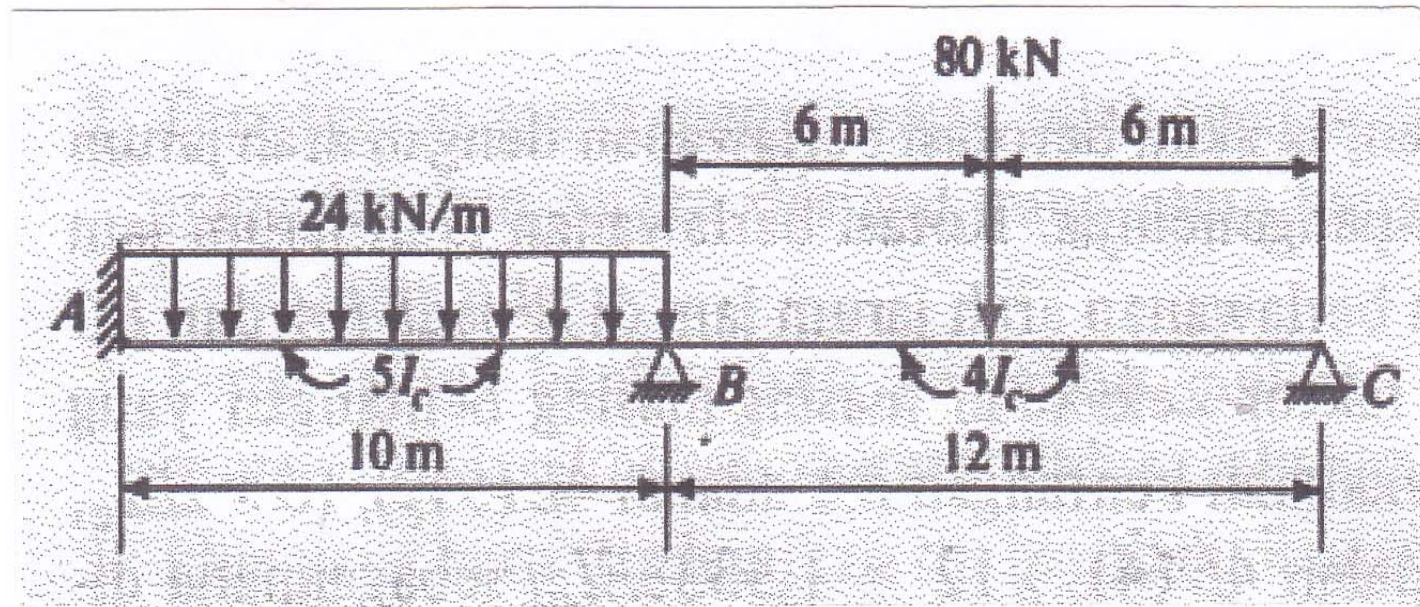
- Tanggapan gaya dari suatu balok menerus atau kerangka kaku tanpa translasi titik hubung yang tak diketahui telah secara lengkap didefinisikan oleh rotasi-rotasi titik hubung yang tak diketahui, seperti rotasi θ_B , θ_C , dan θ_D
- Secara fisik dapatlah dipahami bahwa momen-momen pengunci dapat dikerjakan di titik-titik hubung B , C , dan D untuk mempertahankan kemiringan nol di B , C , dan D
- Jika tiap-tiap titik hubung dibebaskan secara berturut-turut dan dikunci kembali, serta proses ini diulangi, suatu saat akan tercapailah keadaan bahwa setiap titik hubung telah mencapai nilai total yang diperlukannya pada tanggapan deformasi akhir, maka momen-momen penguncinya akan disebarkan atau didistribusikan ke seluruh struktur melalui penjumlahan berturut-turut rotasi-rotasi titik hubungnya, dari sinilah nama *distribusi momen* berasal.

Faktor Kekakuan,dan Faktor Pemindah



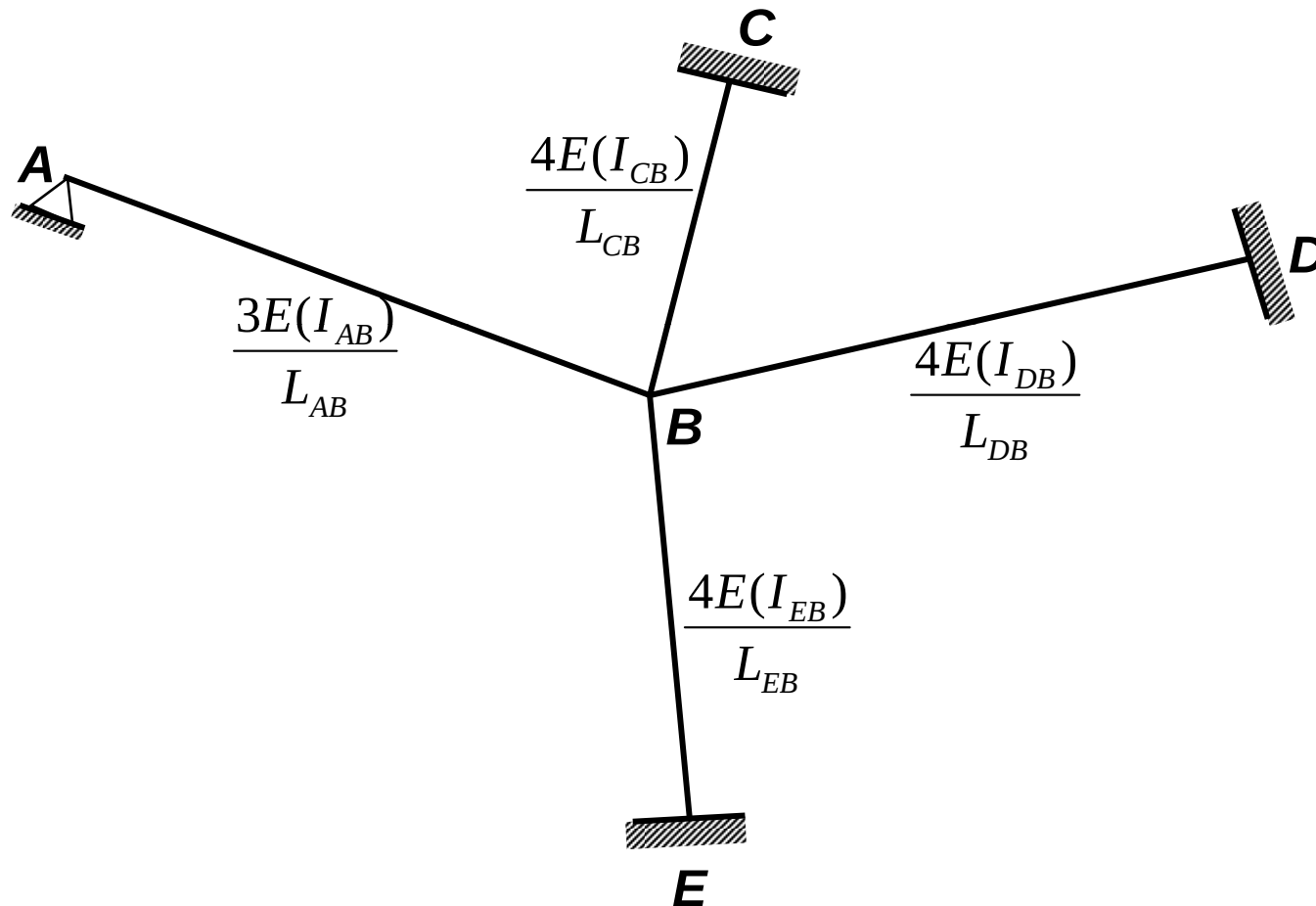
- Untuk bentangan AB yang bersendi di A dan terjepit di B , suatu rotasi searah jarum jam dapat ditimbulkan dengan mengerjakan momen searah jarum jam $M_A = (4EI/L) \theta_B$ di A , yang gilirannya akan menimbulkan momen searah jarum jam, $M_B = \frac{1}{2} M_A$ di B .
- Ekspresi $4EI/L$ tersebut disebut *faktor kekakuan*, yang didefinisikan sebagai momen di ujung dekat yang menyebabkan rotasi satuan di ujung dekat tersebut apabila ujung jauhnya terjepit.
- Bilangan $+\frac{1}{2}$ adalah *faktor pemindah* yang didefinisikan sebagai angka pembanding dari momen di ujung jauh terjepit terhadap momen di ujung dekat yang berotasi.

Faktor Distribusi



- Faktor kekakuan bentangan BA adalah $4E(5I)/10 = 2EI$, dan faktor kekakuan bentangan BC adalah $4E(4I)/12 = 1,33EI$.
- Faktor distribusi : $2EI/(2EI + 1,33EI) = 0,6$ bekerja pada BA , dan $1,33EI/(2EI + 1,33EI) = 0,4$ bekerja pada BC .
- *Faktor distribusi*, didefinisikan sebagai angka pembanding yang mendistribusikan ketidakseimbangan total di titik hubung yang bersangkutan ke ujung-ujung batang yang bertemu di titik hubung tersebut, atau dengan kata lain perbandingan kekakuan batang yang ditinjau terhadap jumlah kekakuan batang pada suatu titik hubung.

Faktor kekakuan yang diselaraskan



- Diperlihatkan empat batang **AB**, **CB**, **DB**, dan **EB** yang bertemu di titik hubung kaku **B**. Tumpuan sendi di **A** dan jepit di **C**, **D**, dan **E**.

- *Faktor kekakuan* $3EI/L$ apabila ujung-ujung jauhnya sendi dan $4EI/L$ apabila ujung-ujung jauhnya jepit. Untuk sembarang ujung batang yang ujung-ujungnya sendi, *faktor kekakuan* bernilai $\frac{3}{4}$ kali faktor kekakuan batang yang ujung-ujung jauhnya jepit.
- Untuk empat batang AB , CB , DB , dan EB yang bertemu di titik hubung kaku B , *faktor distribusi* batang :

$$FD.BA = \frac{K_{BA}}{K_{BA} + K_{BC} + K_{BD} + K_{BE}}$$

$$FD.BD = \frac{K_{BD}}{K_{BA} + K_{BC} + K_{BD} + K_{BE}}$$

$$FD.BC = \frac{K_{BC}}{K_{BA} + K_{BC} + K_{BD} + K_{BE}}$$

$$FD.BE = \frac{K_{BE}}{K_{BA} + K_{BC} + K_{BD} + K_{BE}}$$

Penerapan Metode Distribusi Momen Pada Balok Statis Tak Tentu

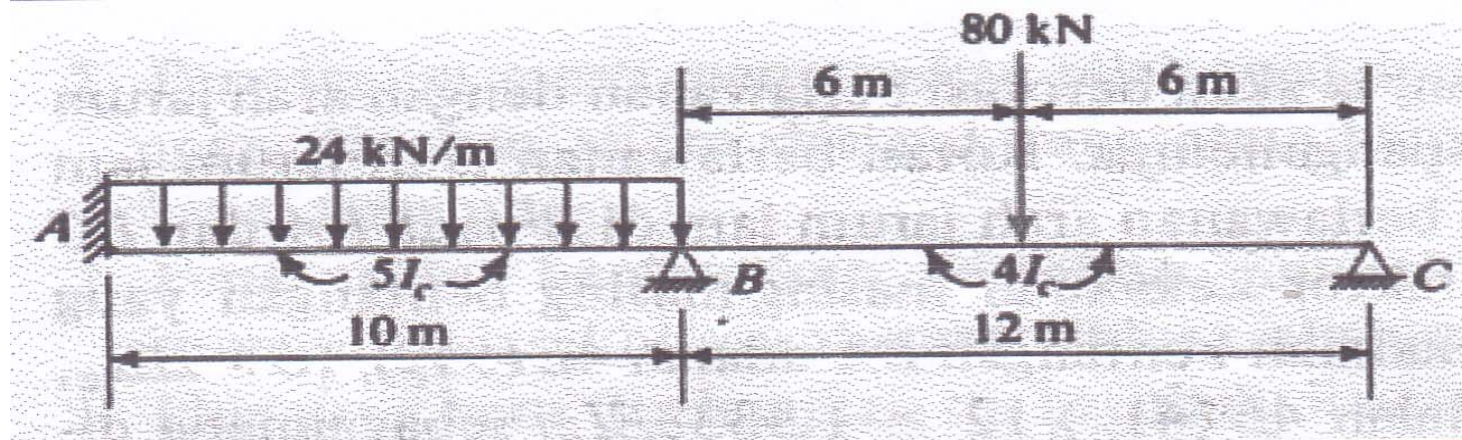
Dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Nyatakan momen-momen ujung terjepit di ujung-ujung setiap bentangan dengan menggunakan persamaan-persamaan untuk beban terbagi rata dan beban terpusat.
2. Tentukan kekakuan dan faktor distribusi masing-masing batang.
3. Buat tabel distribusi momen, dan lakukan pendistribusian momen sehingga diperoleh momen di ujung-ujungnya.
4. Untuk menghentikan pendistribusian momen, lakukan pengecekan bahwa jumlah momen di setiap sambungan sudah sama dengan nol.
5. Tentukan semua reaksi, gambarkan diagram gaya geser dan momen.

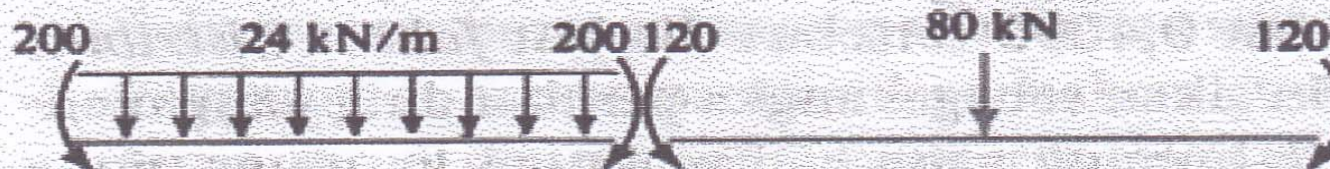
Beberapa hal tambahan yang harus diperhatikan dalam penerapan metode distribusi momen adalah :

1. Sejak awal tentukan derajat ketelitian yang dikehendaki dan gunakan angka desimal yang sama banyaknya untuk semua bilangan di dalam tabel.
2. Berdasarkan pertimbangan boleh menghentikan pendistribusian momen pada akhir sembarang siklus, sebelum digit terakhir di setiap kolom pada siklus yang baru diselesaikan itu berubah dengan selisih yang lebih kecil dari satu.
3. Tanda momen pengimbang di setiap titik hubung berlawanan dengan tanda ketidakseimbangannya, yaitu jumlah momen-momen ujung jepit pada siklus pertama dan jumlah momen pindahan pada semua siklus lainnya.
4. Pastikan bahwa jumlah numerik momen-momen pengimbang tepat sama dengan nilai numerik ketidakseimbangan pada setiap penyeimbangan.
5. Dalam pemindahan, apabila suatu bilangan ganjil dibagi dua, kebiasaan yang lazim adalah menggunakan bilangan genap yang terdekat.

Analisa Balok Menerus Dengan Metode Distribusi Momen



(a) Balok yang ditinjau



(b) Momen ujung terjepit

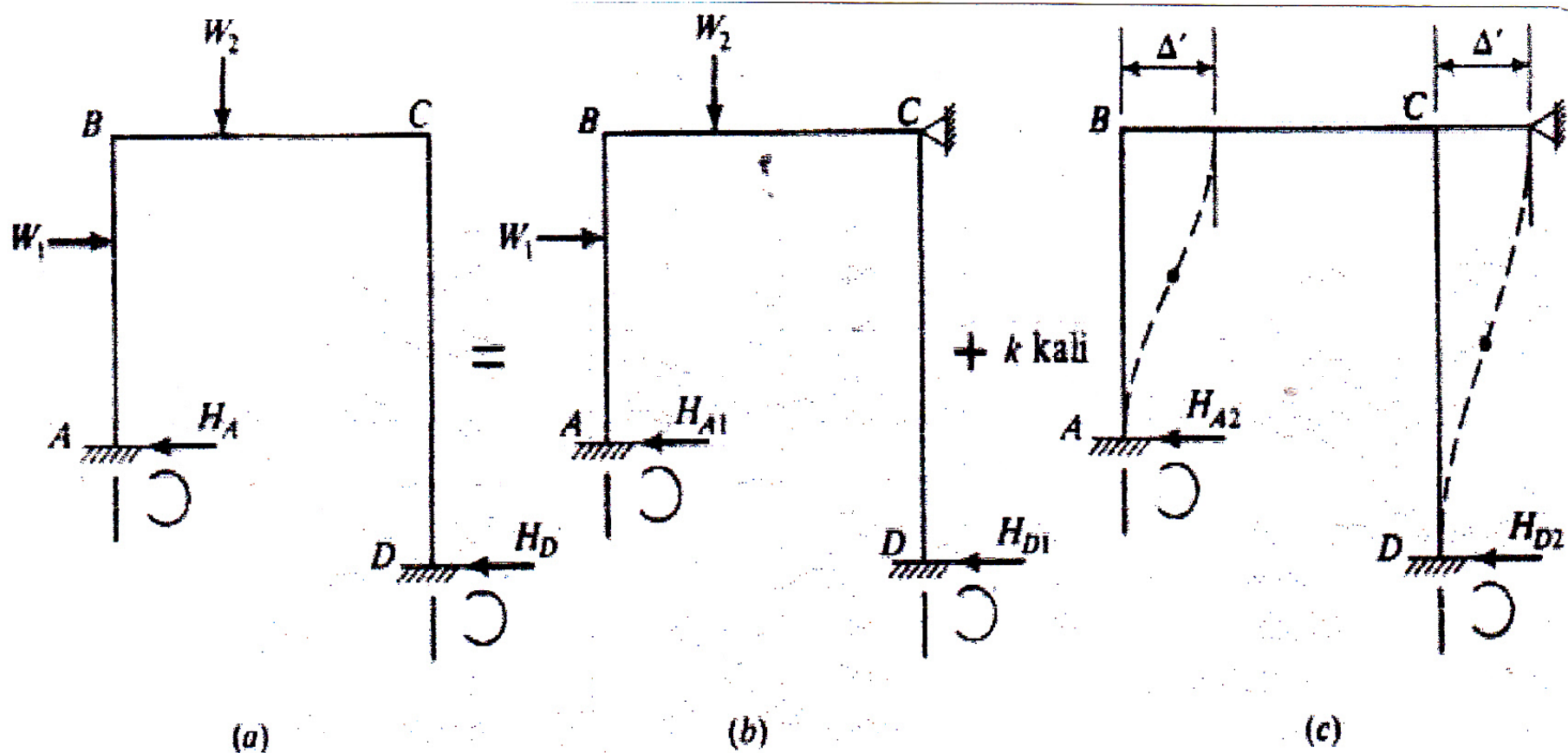
Distribusi Momen Untuk Balok Menerus

Titik Hubung		<i>A</i>	<i>B</i>		<i>C</i>
Batang		<i>AB</i>	<i>BA</i>	<i>BC</i>	<i>CB</i>
Faktor Distribusi		...	0,6	0,4	1,0
Siklus 1	FEM	-200	+200	-120	+120
	BAL	0	-48	-32	-120
Siklus 2	FEM	-24	0	-60	-16
	BAL	0	+36	+24	+16
Siklus 3	FEM	+18	0	+8	+12
	BAL	0	-4,8	-3,2	-12
Siklus 4	FEM	-2,4	0	-6	-1,6
	BAL	0	+3,6	+2,4	+1,6
Siklus 5	FEM	+1,8	0	+0,8	+1,2
	BAL	0	-0,48	-0,32	-1,2
Jumlah		-206,6	+186,32	-186,32	0

Penerapan Metode Distribusi Momen Pada Kerangka Kaku Statis Tak Tentu Tanpa Goyangan

- Penerapan metode distribusi momen pada analisa kerangka kaku statis tak tentu tanpa goyangan, sama dengan penerapan untuk balok menerus, kecuali bahwa di dalam kasus kerangka kaku tersebut seringkali terdapat lebih dari dua batang yang bertemu di sebuah titik hubungunya.
- ketidakseimbangan pada awal setiap siklus adalah jumlah Fem-FEM (untuk siklus pertama) atau momen-momen pindahan yang ada pada titik hubung tersebut, yang kemudian didistribusikan kepada beberapa ujung batang sebanding dengan faktor-faktor distribusinya.

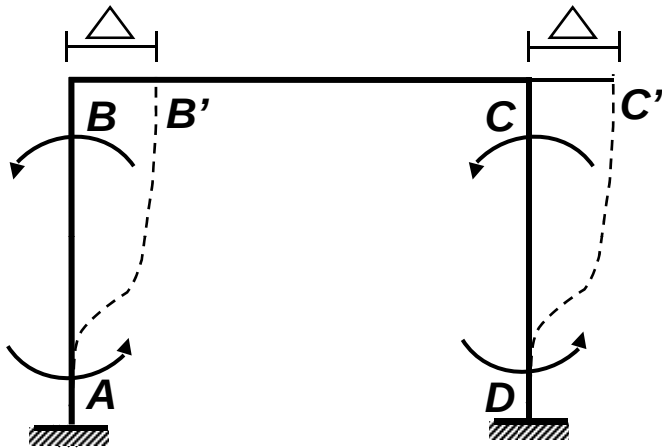
Penerapan Metode Distribusi Momen Pada Kerangka Kaku Statis Tak Tentu Dengan Goyangan Ke Samping



Langkah-langkah penganalisaan kerangka kaku dengan goyangan adalah :

- Cegahlah goyangan ke samping batang BC dengan menambahkan sebuah tumpuan di C .
- Kunci titik-titik hubung B dan C untuk melawan rotasi, tapi biarkan beralih sejauh Δ' ke kanan, sehingga timbulah himpunan momen ujung terjepit pada kolom AB dan CD .
- Goyangan ke samping Δ yang sesungguhnya pada kerangka kaku sama dengan $k\Delta'$, dimana nilai k harus sedemikian rupa, sehingga memenuhi kondisi gaya geser.

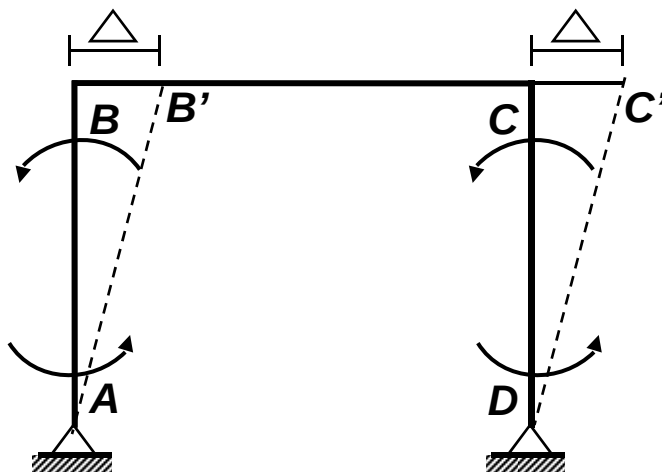
Momen ujung jepit akibat goyangan ke samping



Untuk tumpuan jepit :

$$M_{0AB} = M_{0BA} = -\frac{6.E(I_{AB})\Delta}{L_{AB}^2}$$

$$M_{0CD} = M_{0DC} = -\frac{6.E(I_{CD})\Delta}{L_{CD}^2}$$

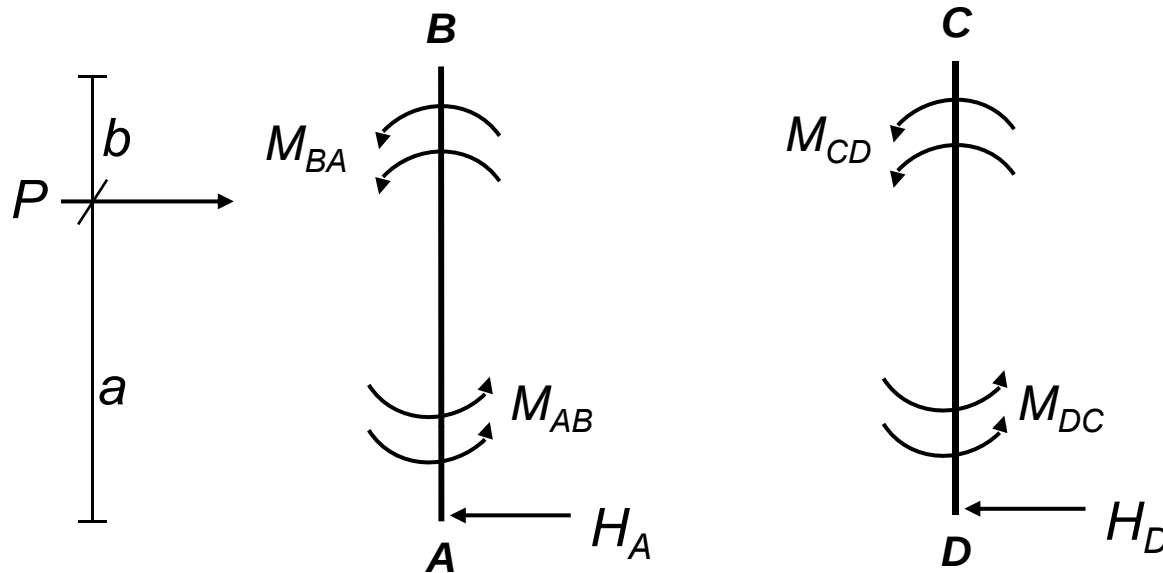


Untuk tumpuan sendi / rol :

$$M_{0AB} = M_{0BA} = -\frac{3.E(I_{AB})\Delta}{L_{AB}^2}$$

$$M_{0CD} = M_{0DC} = -\frac{3.E(I_{CD})\Delta}{L_{CD}^2}$$

Komponen gaya horizontal

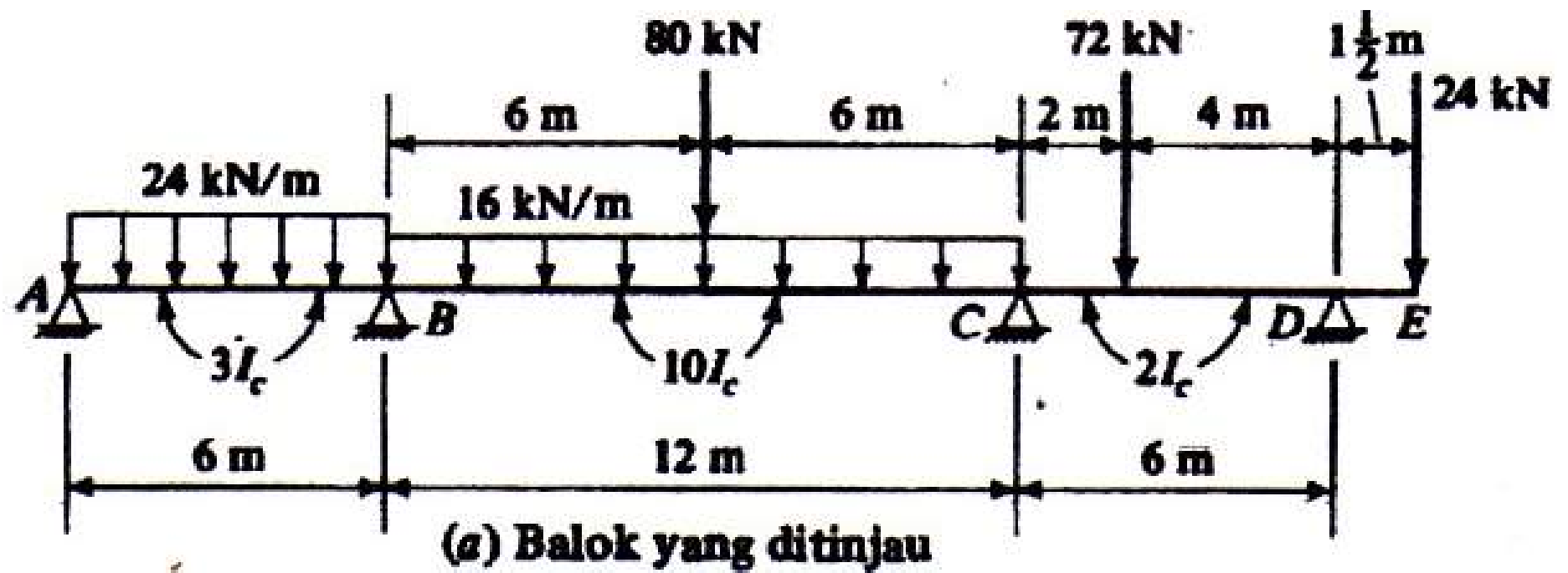


$$H_A + H_D = P$$

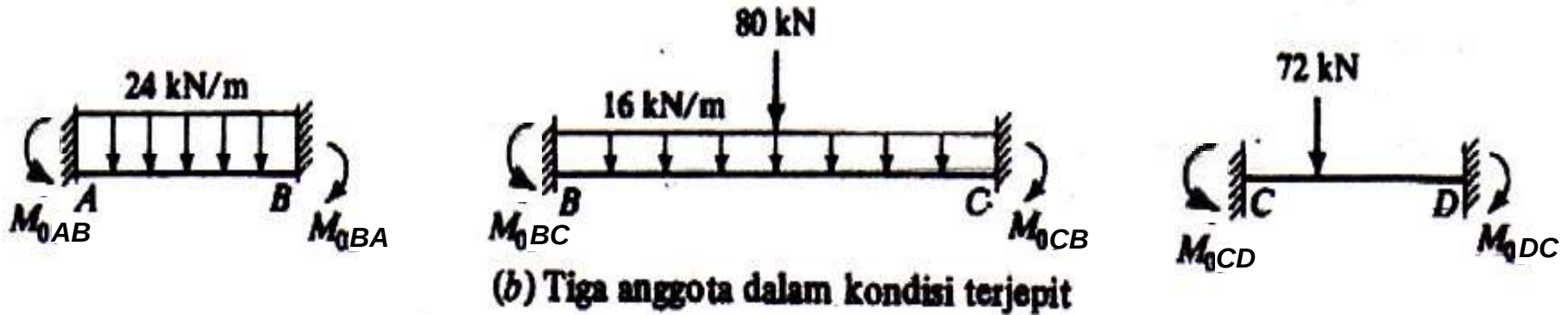
$$\frac{P \cdot b}{L_{AB}} + \frac{M_{AB} + M_{BA}}{L_{AB}} + \frac{M_{CD} + M_{DC}}{L_{CD}} = P$$

Sehingga diperoleh nilai E/Δ , selanjutnya dapat ditentukan momen akhir diujung-ujung tumpuan dengan menjumlahkan momen akibat beban dan momen akibat goyangan ke samping.

Contoh Soal 1.



a. Momen-momen ujung jepit.



$$M_{0AB} = -\frac{24(6)^2}{12} = -72 \text{ kNm}$$

$$M_{0BA} = +72 \text{ kNm}$$

$$M_{0BC} = -\frac{16(12)^2}{12} - \frac{80(6)(6)^2}{(12)^2} = -312 \text{ kNm}$$

$$M_{0CB} = +312 \text{ kNm}$$

$$M_{0CD} = -\frac{72(2)(4)^2}{(6)^2} = -64 \text{ kNm}$$

$$M_{0DC} = +\frac{72(4)(2)^2}{(6)^2} = +32 \text{ kNm}$$

b. Kekakuan batang dan faktor distribusi.

- Kekakuan batang :

$$K_{BA} = \frac{3.E(3I)}{4.6} = 0,3750$$

$$K_{BC} = K_{CB} = \frac{4.E(10I)}{4.12} = 0,8333$$

$$K_{CD} = \frac{3.E(2I)}{4.6} = 0,2500$$

- **Faktor distribusi :**

$$F.D_{BA} = \frac{0,3750}{0,3750 + 0,8333} = 0,3104$$

$$F.D_{BC} = \frac{0,8333}{0,3750 + 0,8333} = 0,6896$$

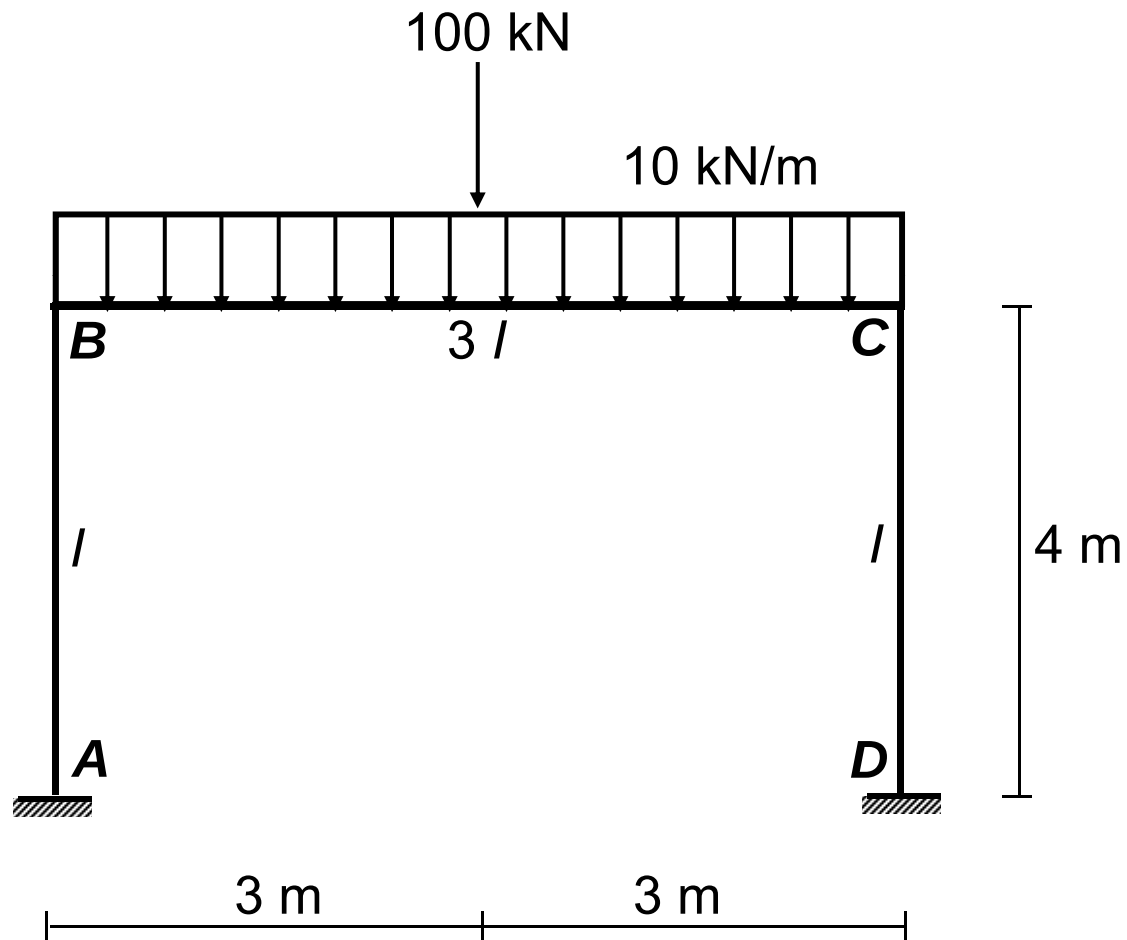
$$F.D_{CB} = \frac{0,8333}{0,8333 + 0,2500} = 0,7692$$

$$F.D_{CD} = \frac{0,2500}{0,8333 + 0,2500} = 0,2308$$

Tabel distribusi momen

<i>A</i>	<i>B</i>		<i>C</i>		<i>D</i>	
<i>AB</i>	<i>BA</i>	<i>BC</i>	<i>CB</i>	<i>CD</i>	<i>DC</i>	<i>DE</i>
...	0,3104	0,6896	0,7692	0,2308	...	
-72,00	+72,00	-312,00	+312,00	-64,00	+32,00	-36,00
+72,00	0,00			0,00	+4,00	
0,00	+36,00			+2,00	+36,00	
0,00	0,00			0,00		
↑	+108,00	-312,00	+312,00	-62,00	↑	
	+63,32	+140,68	-192,30	-57,70		
	0,00	-96,15	+70,34	0,00		
	+29,84	+66,31	-54,10	-16,24		
	0,00	-27,05	+33,16	0,00		
	+8,40	+18,65	-25,51	-7,65		
	0,00	-12,76	+9,32	0,00		
	+3,96	+8,80	-7,17	-2,15		
	0,00	-3,58	+4,40	0,00		
	+1,11	+2,47	3,38	-1,02		
	0,00	-1,67	+1,24	0,00		
	+0,52	+1,17	-0,95	-0,29		
	0,00	-0,48	+0,58	0,00		
	+0,15	+0,33	-0,45	-0,13		
	0,00	-0,22	+0,16	0,00		
	+0,07	+0,15	-0,12	-0,04		
	0,00	-0,06	+0,08	0,00		
	+0,02	+0,04	-0,06	-0,02		
↓	0,00	-0,03	+0,02	0,00	↓	
	+0,01	+0,02	-0,02	0,00		
0,00	+215,40	-215,40	+147,24	-147,24	+36,00	-36,00

Contoh Soal 2.



Momen-momen ujung jepit.

$$M_{0AB} = M_{0BA} = 0$$

$$M_{0BC} = -\frac{10(6)^2}{12} - \frac{100(3)(3)^2}{(6)^2} = -105 \text{ kNm}$$

$$M_{0CB} = +\frac{10(6)^2}{12} + \frac{100(3)^2(3)}{(6)^2} = +105 \text{ kNm}$$

$$M_{0CD} = M_{0DC} = 0$$

Kekakuan batang dan faktor distribusi.

- Kekakuan batang :

$$K_{BA} = \frac{4.E(I)}{4.4} = 0,25$$

$$K_{BC} = K_{CB} = \frac{4.E(3I)}{4.6} = 0,50$$

$$K_{CD} = \frac{4.E(I)}{4.4} = 0,25$$

- **Faktor distribusi :**

$$F.D_{BA} = \frac{0,25}{0,25 + 0,50} = 0,33$$

$$F.D_{BC} = \frac{0,50}{0,25 + 0,50} = 0,67$$

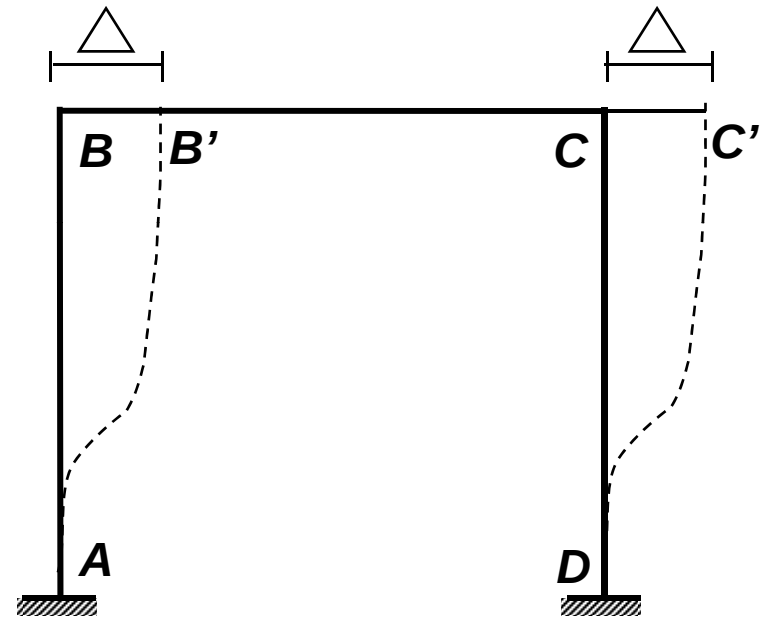
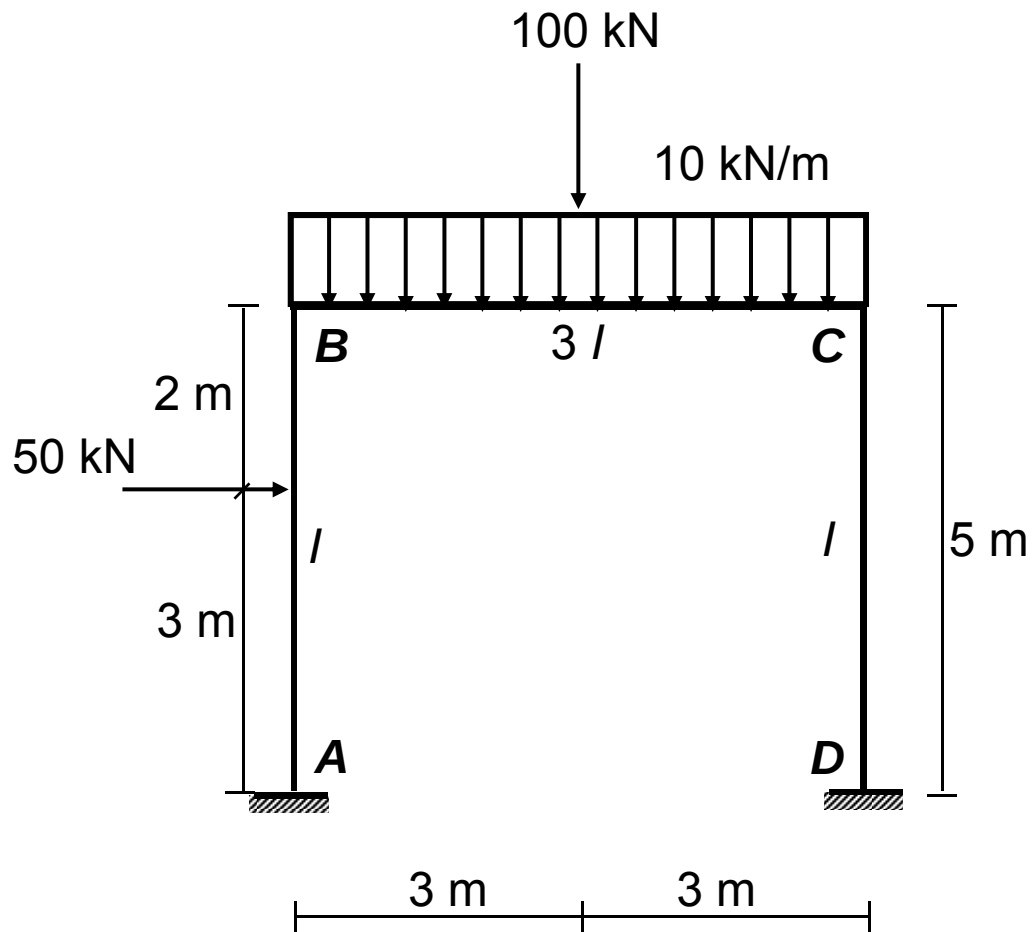
$$F.D_{CB} = \frac{0,50}{0,50 + 0,25} = 0,67$$

$$F.D_{CD} = \frac{0,25}{0,50 + 0,25} = 0,33$$

Tabel distribusi momen

<i>A</i>	<i>B</i>		<i>C</i>		<i>D</i>
<i>AB</i>	<i>BA</i>	<i>BC</i>	<i>CB</i>	<i>CD</i>	<i>DC</i>
...	0,33	0,67	0,67	0,33	...
	+34,65	-105,00 +70,35	+105,00 -70,35	-34,65	
+17,33	+11,61	-35,18 +23,57	+35,18 -23,57	-11,61	-17,33
+5,81	+3,89	-11,79 +7,90	+11,79 -7,90	-3,89	-5,81
+1,95	+1,30	-3,95 +2,65	+3,95 -2,65	-1,30	-1,95
+0,65	+0,44	-1,33 +0,89	+1,33 -0,89	-0,44	-0,65
+0,22	+0,15	-0,45 +0,30	+0,45 -0,30	-0,15	-0,22
+0,08	+0,05	-0,15 +0,10	+0,15 -0,10	-0,05	-0,08
+0,03	+0,02	-0,05 +0,03	+0,05 -0,03	-0,02	-0,03
+0,01	+0,01	-0,02 +0,01	+0,02 -0,01	-0,01	-0,01
+0,01	+0,00	-0,01 +0,01	+0,01 -0,01	-0,00	-0,01
+26,09	+52,12	-52,12	+52,12	-52,12	-26,09

Contoh Soal 3.



Momen-momen ujung jepit.

$$M_{0AB} = -\frac{50(3)(2)^2}{(5)^2} = -24 \text{ kNm}$$

$$M_{0BA} = \frac{50(3)^2(2)}{(5)^2} = +36 \text{ kNm}$$

$$M_{0BC} = -\frac{10(6)^2}{12} - \frac{100(3)(3)^2}{(6)^2} = -105 \text{ kNm}$$

$$M_{0CB} = +\frac{10(6)^2}{12} + \frac{100(3)^2(3)}{(6)^2} = +105 \text{ kNm}$$

$$M_{0CD} = M_{0DC} = 0$$

Kekakuan batang dan faktor distribusi.

- Kekakuan batang :

$$K_{BA} = \frac{4.E(I)}{4.5} = 0,20$$

$$K_{BC} = K_{CB} = \frac{4.E(3I)}{4.6} = 0,50$$

$$K_{CD} = \frac{4.E(I)}{4.5} = 0,20$$

- **Faktor distribusi :**

$$F.D_{BA} = \frac{0,20}{0,20 + 0,50} = 0,29$$

$$F.D_{BC} = \frac{0,50}{0,20 + 0,50} = 0,71$$

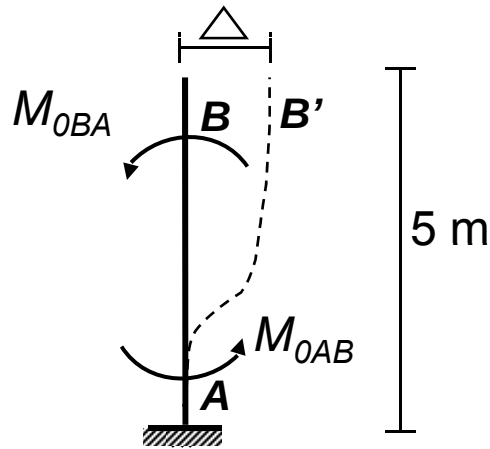
$$F.D_{CB} = \frac{0,50}{0,50 + 0,20} = 0,71$$

$$F.D_{CD} = \frac{0,20}{0,50 + 0,20} = 0,29$$

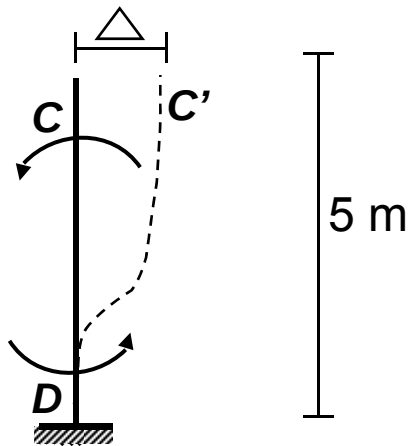
Tabel distribusi momen akibat beban

<i>A</i>	<i>B</i>		<i>C</i>		<i>D</i>
<i>AB</i>	<i>BA</i>	<i>BC</i>	<i>CB</i>	<i>CD</i>	<i>DC</i>
...	0,29	0,71	0,71	0,29	...
-24,00	+36,00 +20,01	-105,00 +48,99	+105,00 -74,55	-30,45	
+10,00	+10,81	-37,28 +26,47	+24,50 -17,40	-7,11	-15,23
+5,41	+2,52	-8,70 +6,18	+13,24 -9,40	-3,84	-3,56
+1,26	+1,36	-4,70 +3,34	+3,09 -2,19	-0,90	-1,92
+0,68	+0,32	-1,10 +0,78	+1,67 -1,19	-0,48	-0,45
+0,16	+0,17	-0,60 +0,43	+0,38 -0,28	-0,11	-0,24
+0,09	+0,04	-0,14 +0,10	+0,22 -0,16	-0,06	-0,06
+0,02	+0,02	-0,08 +0,06	+0,05 -0,04	-0,01	-0,03
+0,01	+0,01	-0,02 +0,01	+0,03 -0,02	-0,01	-0,01
+0,01	+0,00	-0,01 +0,01	+0,01 -0,01	-0,00	-0,01
-6,36	+71,26	-71,26	+42,96	-42,96	-21,51

Momen ujung jepi akibat goyangan ke samping



$$M_{0AB} = M_{0BA} = -\frac{6.E(I)\Delta}{(5)^2} = -0,24EI\Delta$$

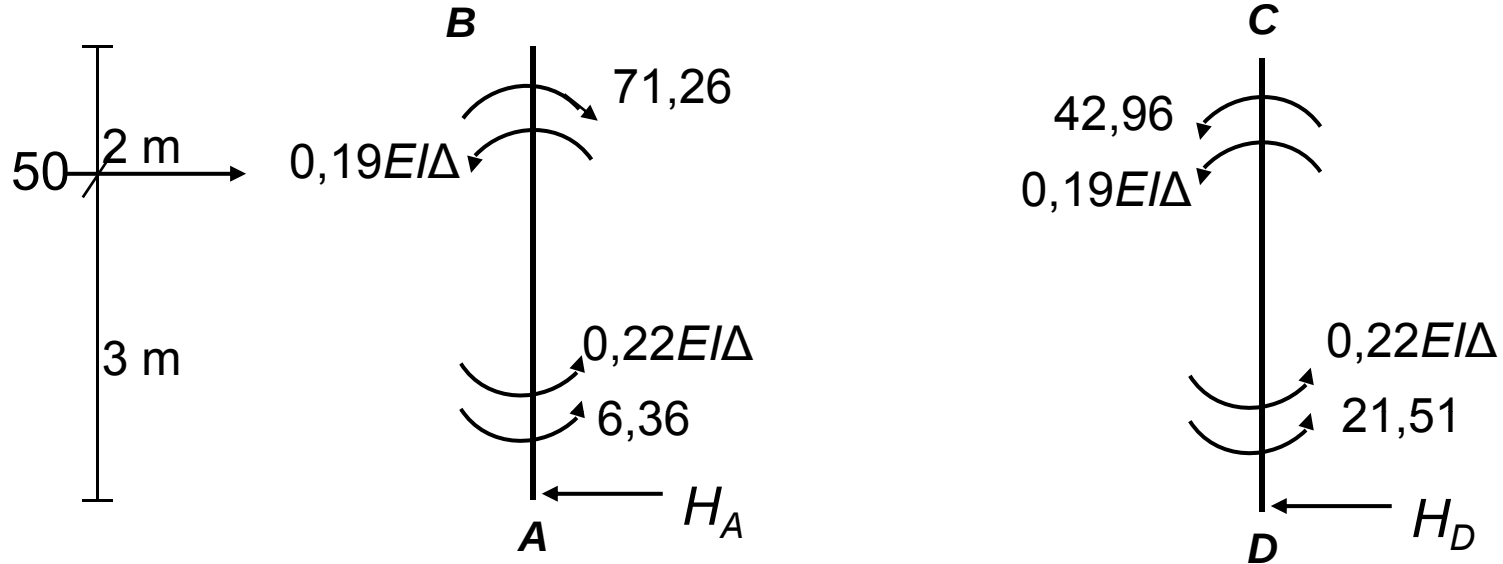


$$M_{0CD} = M_{0DC} = -\frac{6.E(I)\Delta}{(5)^2} = -0,24EI\Delta$$

Tabel distribusi momen akibat goyangan ke samping

<i>A</i>	<i>B</i>		<i>C</i>		<i>D</i>
<i>AB</i>	<i>BA</i>	<i>BC</i>	<i>CB</i>	<i>CD</i>	<i>DC</i>
...	0,29	0,71	0,71	0,29	...
-0,24 <i>E</i> Δ	-0,24 <i>E</i> Δ +0,07 <i>E</i> Δ	+0,17 <i>E</i> Δ	+0,17 <i>E</i> Δ	-0,24 <i>E</i> Δ +0,07 <i>E</i> Δ	-0,24 <i>E</i> Δ
+0,04 <i>E</i> Δ	-0,03 <i>E</i> Δ	+0,09 <i>E</i> Δ -0,06 <i>E</i> Δ	+0,09 <i>E</i> Δ -0,06 <i>E</i> Δ	-0,03 <i>E</i> Δ	+0,04 <i>E</i> Δ
-0,02 <i>E</i> Δ	+0,01 <i>E</i> Δ	-0,03 <i>E</i> Δ +0,02 <i>E</i> Δ	-0,03 <i>E</i> Δ +0,02 <i>E</i> Δ	+0,01 <i>E</i> Δ	-0,02 <i>E</i> Δ
-0,22<i>E</i>Δ	-0,19<i>E</i>Δ	+0,19<i>E</i>Δ	+0,19<i>E</i>Δ	-0,19<i>E</i>Δ	-0,22<i>E</i>Δ

Komponen gaya horisontal



$$H_A + H_D = 50$$

$$\frac{50 \cdot 2}{5} + \left[\left(\frac{6,36 - 71,26}{5} \right) + \left(\frac{0,22EI\Delta + 0,19EI\Delta}{5} \right) \right] + \left[\left(\frac{42,96 + 21,51}{5} \right) + \left(\frac{0,19EI\Delta + 0,22EI\Delta}{5} \right) \right] = 50$$

$$EI\Delta = 183,48$$

Tabel distribusi momen akhir

<i>A</i>	<i>B</i>		<i>C</i>		<i>D</i>
<i>AB</i>	<i>BA</i>	<i>BC</i>	<i>CB</i>	<i>CD</i>	<i>DC</i>
...	0,29	0,71	0,71	0,29	...
-6,36	+71,26	-71,26	+42,96	-42,96	-21,51
-40,37	-34,86	+34,86	+34,86	-34,86	-40,37
-46,73	+36,40	-36,40	+77,82	-77,82	-61,88

Reaksi-reaksi, diagram gaya geser dan momen sama dengan contoh soal yang sama pada metode defleksi kemiringan.