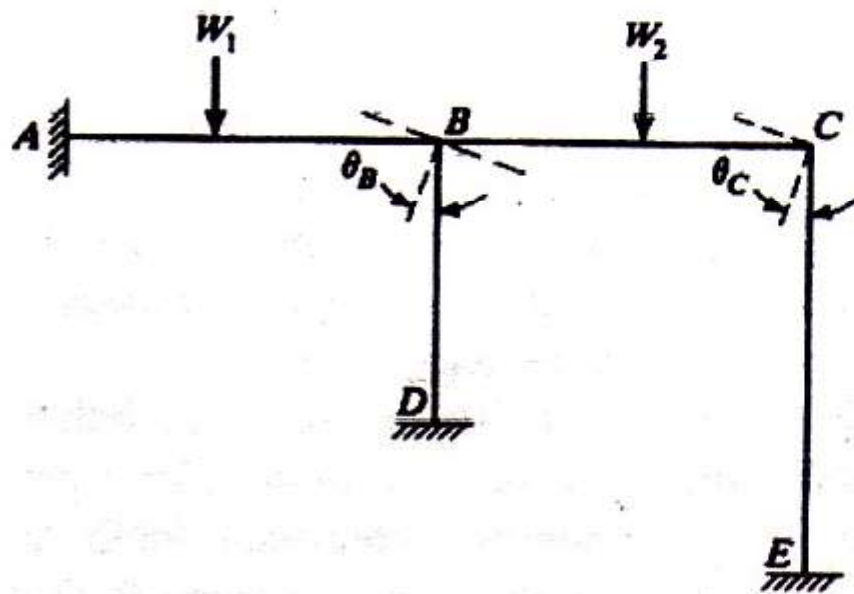


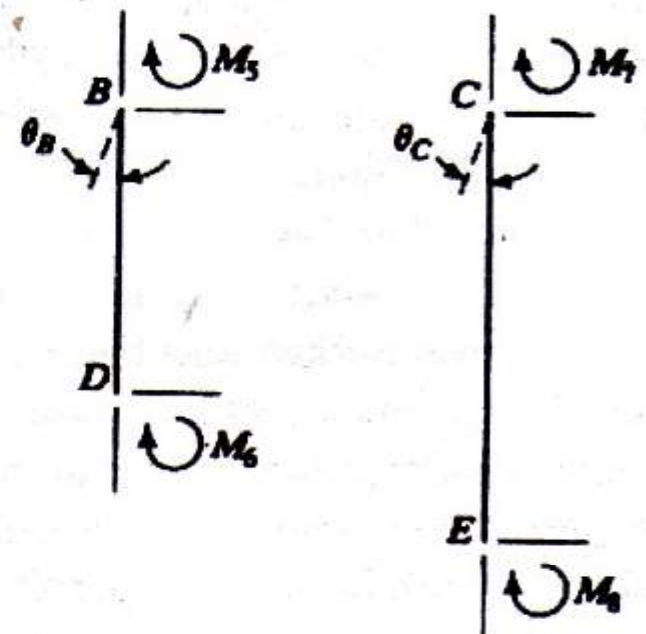
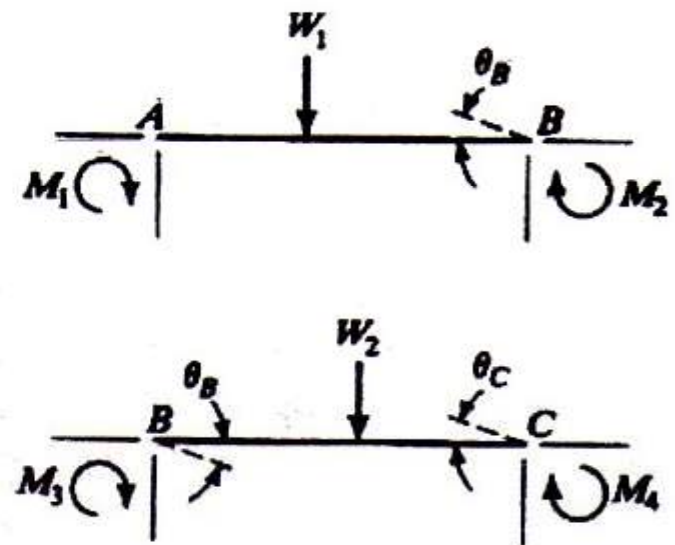
Metode Defleksi Kemiringan

(The Slope – Deflection Method)

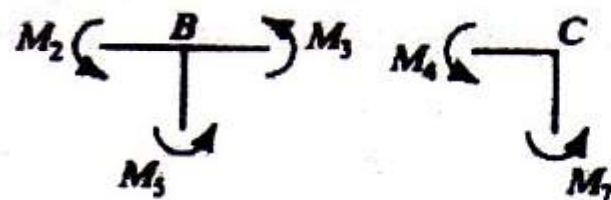
- Metode defleksi kemiringan dapat digunakan untuk menganalisa semua jenis balok dan kerangka kaku statis tak-tentu.
- Semua sambungan dianggap kaku, sudut di sambungan antara batang dianggap tidak berubah ketika beban diberikan.
- Rotasi sambungannya dianggap tidak diketahui, nantinya akan diperlihatkan bahwa untuk setiap satu batang yang dibatasi oleh dua sambungan, momen ujungnya dapat dinyatakan dalam suku-suku rotasi sambungan.
- Untuk memenuhi syarat keseimbangan, jumlah momen ujung setiap sambungan pada ujung pertemuan batang-batang harus sama dengan nol.



(a) Kerangka kaku



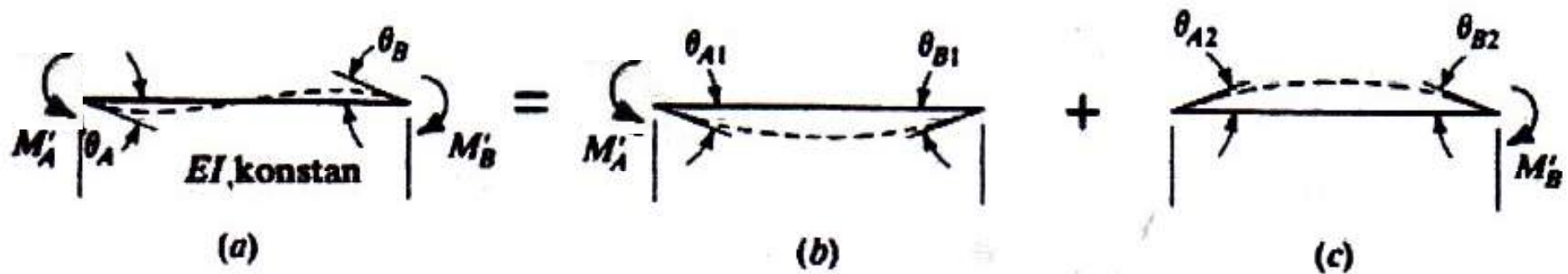
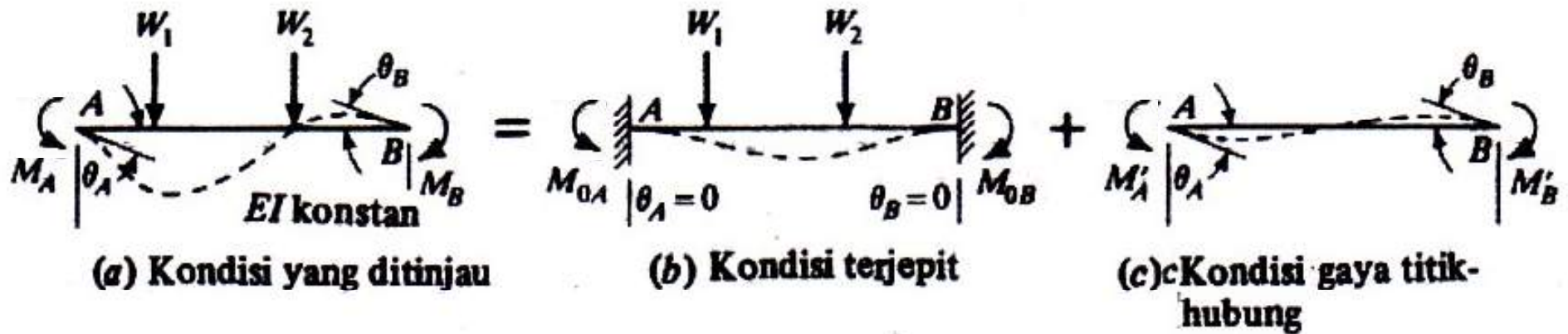
(b) Diagram benda-bebas anggota



(c) Diagram benda-bebas titik-hubung
(hanya momen yang diperlihatkan)

- Dengan menggunakan persamaan-persamaan defleksi kemiringan, dapat dinyatakan momen ujung dari setiap sambungan yang tidak diketahui.
- Syarat sambungan di B dan di C , masing-masing adalah :
$$M_2 + M_3 + M_5 = 0$$
$$M_4 + M_7 = 0$$
- Kedua persamaan di atas diperlukan untuk menentukan nilai-nilai θ_B dan θ_C , momen ujungnya dapat diperoleh dengan memasukkan rotasi sambungan yang diketahui ke dalam persamaan defleksi kemiringan.
- Dengan menggunakan prinsip statika, diagram gaya aksial, gaya geser dan momen untuk setiap batang dapat ditentukan.

Penurunan persamaan defleksi kemiringan



- Pada bentangan AB , M_A dan M_B dinyatakan dalam suku-suku rotasi ujung θ_A dan θ_B dengan pembebanan yang diberikan W_1 dan W_2 .
- Dengan pembebanan yang diberikan pada batang tersebut, diperlukan momen-momen ujung terjepit M_{0A} dan M_{0B} untuk menahan garis-garis singgungnya tetap di ujung.
- Momen-momen ujung tambahan M'_A dan M'_B masing-masing harus sedemikian besarnya, sehingga menyebabkan rotasi θ_A dan θ_B .
- Jika θ_A dan θ_B merupakan rotasi ujung yang disebabkan oleh θ_A oleh M_A dan θ_B oleh M_B maka syarat-syarat bentuk yang diperlukan adalah :

$$\theta_A = + \theta_{A1} - \theta_{A2}$$

$$\theta_B = - \theta_{B1} + \theta_{B2}$$

... Pers. 1)

$$M_A = M_{0A} + M'_A$$

$$M_B = M_{0B} + M'_B$$

... Pers. 2)

$$\theta_{A1} = \frac{M'_A \cdot L}{3EI} \quad \theta_{B1} = \frac{M'_A \cdot L}{6EI}$$

$$\theta_{A2} = \frac{M'_B \cdot L}{6EI} \quad \theta_{B2} = \frac{M'_B \cdot L}{3EI}$$

... Pers. 3)

Dengan memasukkan persamaan 3) ke dalam persamaan 1), diperoleh :

$$\theta_A = + \frac{M'_A \cdot L}{3EI} - \frac{M'_B \cdot L}{6EI}$$

$$\theta_B = - \frac{M'_A \cdot L}{6EI} + \frac{M'_B \cdot L}{3EI}$$

... Pers. 4)

Selesaikan persamaan 4) untuk memperoleh M'_A dan M'_B

$$M'_A = + \frac{2EI}{L} (2\theta_A + \theta_B)$$

$$M'_B = + \frac{2EI}{L} (2\theta_B + \theta_A) \quad \dots \text{Pers. 5)}$$

Dengan memasukkan persamaan 5) ke dalam persamaan 2), diperoleh :

$$M_A = M_{0A} + \frac{2EI}{L} (2\theta_A + \theta_B)$$

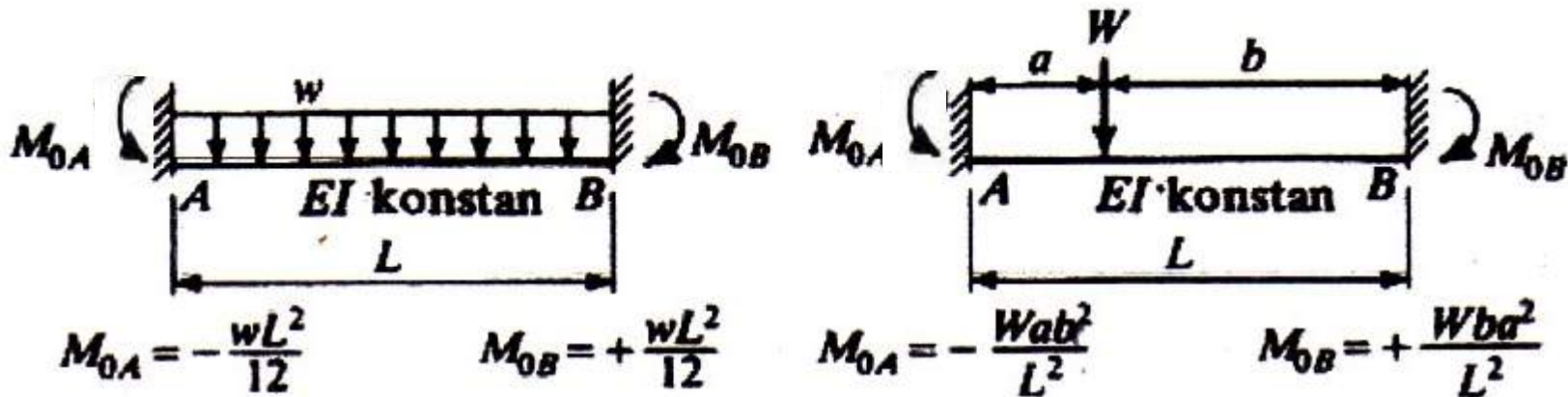
$$M_B = M_{0B} + \frac{2EI}{L} (2\theta_B + \theta_A) \quad \dots \text{Pers. 6)}$$

Persamaan 6) merupakan persamaan defleksi kemiringan untuk suatu batang yang mengalami lenturan.

Penerapan metode defleksi kemiringan pada balok statis tak-tentu

Dengan Langkah-Langkah Sebagai Berikut :

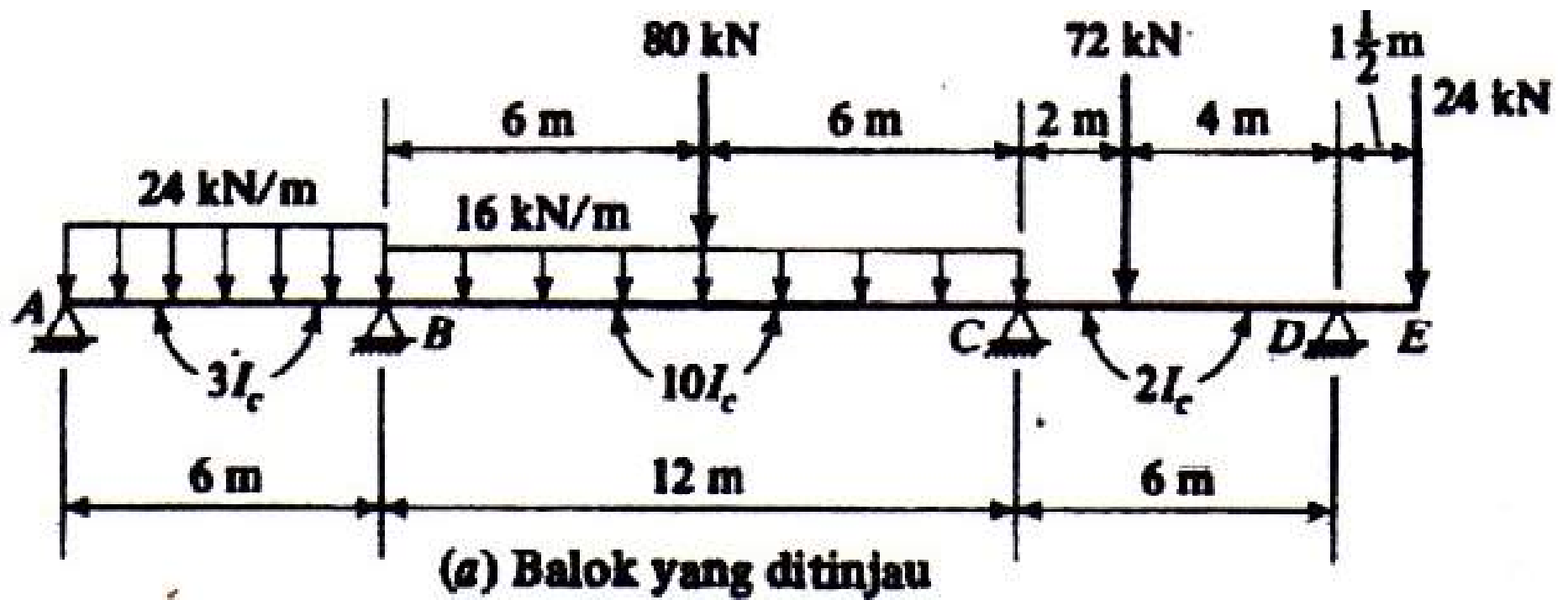
1. Tentukan momen-momen ujung terjepit di ujung-ujung setiap bentangan dengan menggunakan rumus-rumus untuk beban terbagi rata dan beban terpusat.



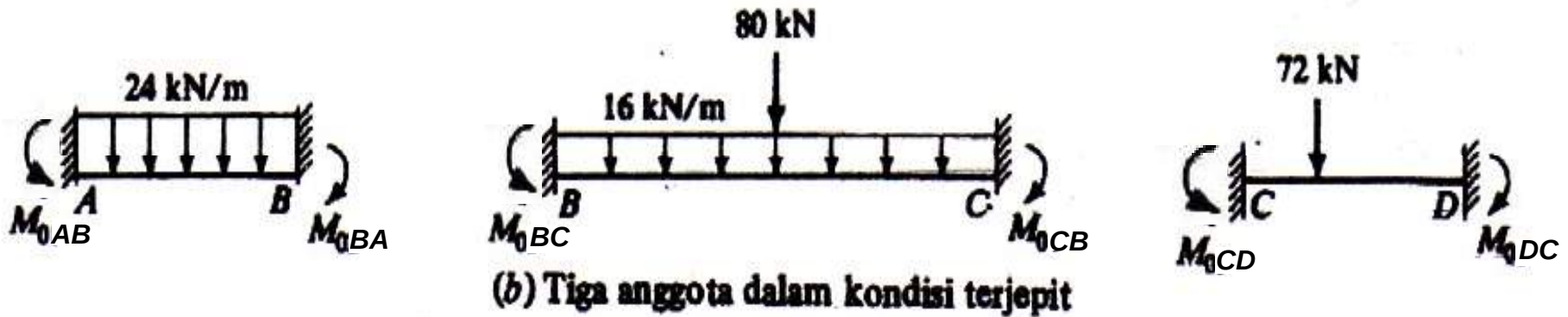
2. Nyatakan semua ujung sebagai suatu fungsi dari momen-momen ujung terjepit dan rotasi sambungannya dengan menggunakan persamaan-persamaan defleksi kemiringan.

3. Tetapkan suatu sistem persamaan-persamaan serempak dengan menggunakan kondisi keseimbangan, jumlah momen disetiap sambungan harus sama dengan nol.
4. Selesaikan persamaan-persamaan serempak untuk memperoleh rotasi-rotasi sambungan yang tak diketahui.
5. Masukkan nilai-nilai rotasi yang sudah diketahui ke dalam persamaan defleksi kemiringan dan hitung momen ujungnya.
6. Tentukan semua reaksi, gambarkan diagram gaya geser dan momen.

Contoh Soal 1.



a. Momen-momen ujung jepit :



$$M_{0AB} = -\frac{24(6)^2}{12} = -72 \text{ kNm}$$

$$M_{0BA} = +72 \text{ kNm}$$

$$M_{0BC} = -\frac{16(12)^2}{12} - \frac{80(6)(6)^2}{12^2} = -312 \text{ kNm} \quad M_{0CB} = +312 \text{ kNm}$$

$$M_{0CD} = -\frac{72(2)(4)^2}{6^2} = -64 \text{ kNm}$$

$$M_{0DC} = +\frac{72(4)(2)^2}{6^2} = +32 \text{ kNm}$$

b. Persamaan-persamaan defleksi kemiringan :

$$M_{AB} = M_{0AB} + \frac{2E(3I)}{6}(2\theta_A + \theta_B) = -72 + 2EI\theta_A + EI\theta_B$$

$$M_{BA} = M_{0BA} + \frac{2E(3I)}{6}(2\theta_B + \theta_A) = +72 + 2EI\theta_B + EI\theta_A$$

$$M_{BC} = M_{0BC} + \frac{2E(10I)}{12}(2\theta_B + \theta_C) = -312 + 3,333EI\theta_B + 1,667EI\theta_C$$

$$M_{CB} = M_{0CB} + \frac{2E(10I)}{12}(2\theta_C + \theta_B) = +312 + 3,333EI\theta_C + 1,667EI\theta_B$$

$$M_{CD} = M_{0CD} + \frac{2E(2I)}{6}(2\theta_C + \theta_D) = -64 + 1,333EI\theta_C + 0,667EI\theta_D$$

$$M_{DC} = M_{0DC} + \frac{2E(2I)}{6}(2\theta_D + \theta_C) = +32 + 1,333EI\theta_D + 0,667EI\theta_C$$

c. Persamaan-persamaan serempak, memenuhi syarat sambungan :

- sambungan di $A : M_{AB} = 0$
- sambungan di $B : M_{BA} + M_{BC} = 0$
- sambungan di $C : M_{CB} + M_{CD} = 0$
- sambungan di $D : M_{DC} - 36 = 0$

Dengan memasukkan persamaan-persamaan defleksi kemiringan kedalam syarat-syarat sambungan, maka ditetapkan persamaan berikut :

$$+2,000EI\theta_A + 1,000EI\theta_B = + 72,0$$

$$+1,000EI\theta_A + 5,333EI\theta_B + 1,667EI\theta_C = +240,0$$

$$+ 1,667EI\theta_B + 4,667EI\theta_C + 0,667EI\theta_D = -248,0$$

$$+ 0,667EI\theta_C + 1,333EI\theta_D = + 4,0$$

Penyelesaian persamaan serempak dengan cara eliminasi dan substitusi, hasilnya adalah :

$$EI\theta_A = + 0,20$$

$$EI\theta_B = +71,60$$

$$EI\theta_C = -85,23$$

$$EI\theta_D = +45,62$$

d. Momen-momen ujung :

$$M_{AB} = -72 + 2(+0,20) + (+71,60) = 0$$

$$M_{BA} = +72 + 2(+71,60) + (+0,20) = +215,4 \text{ kNm}$$

$$M_{BC} = -312 + 3,333(+71,60) + 1,667(-85,23) = -215,4 \text{ kNm}$$

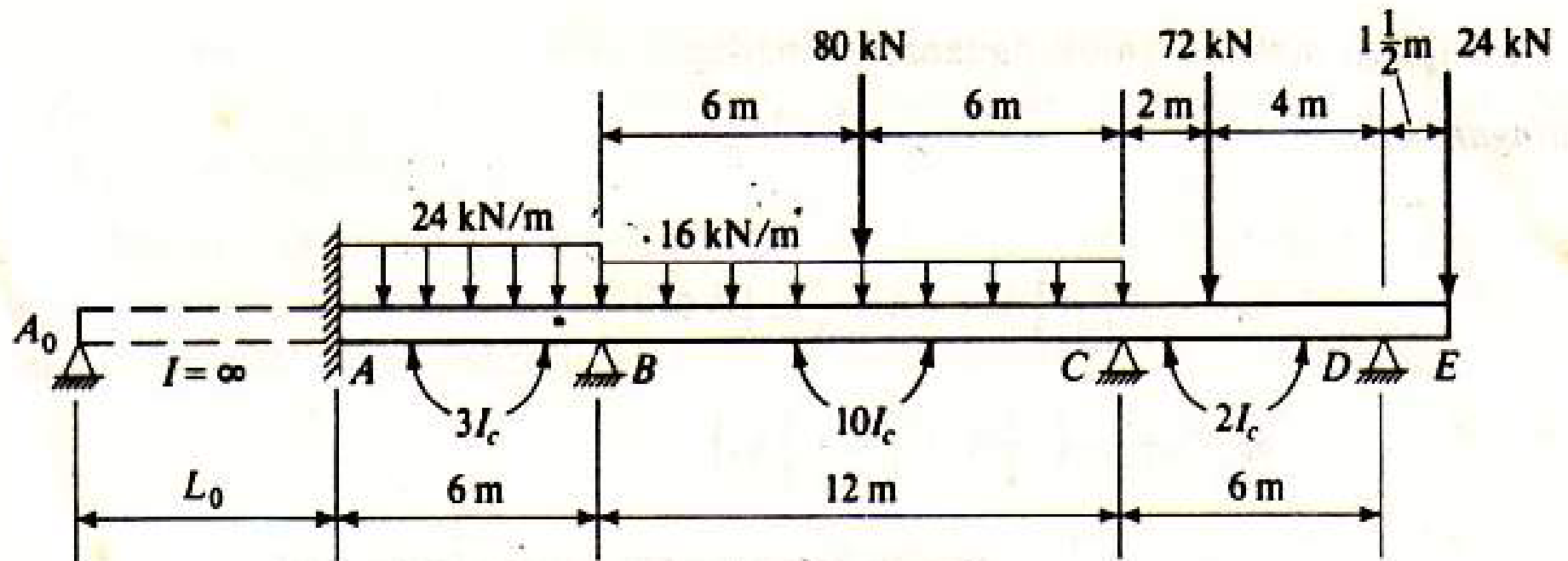
$$M_{CB} = +312 + 3,333(-85,23) + 1,667(+71,60) = +147,3 \text{ kNm}$$

$$M_{CD} = -64 + 1,333(-85,23) + 0,667(+45,62) = -147,3 \text{ kNm}$$

$$M_{DC} = +32 + 1,333(+45,62) + 0,667(-85,23) = +36,0 \text{ kNm}$$

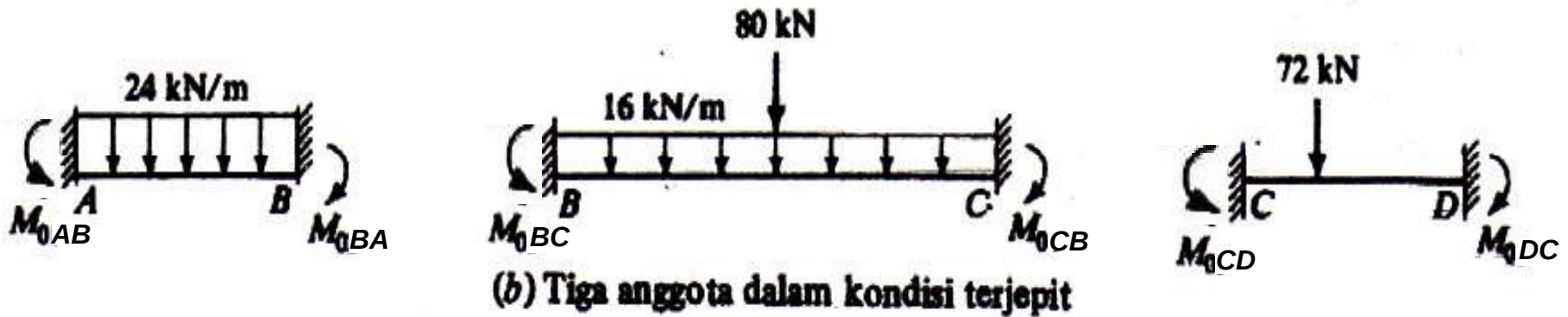
e. Reaksi-reaksi, diagram gaya geser dan momen sama dengan contoh soal yang sama pada metode persamaan tiga momen.

Contoh Soal 2.



(a) Balok yang ditinjau

a. Momen-momen ujung jepit :



$$M_{0AB} = -\frac{24(6)^2}{12} = -72 \text{ kNm}$$

$$M_{0BA} = +72 \text{ kNm}$$

$$M_{0BC} = -\frac{16(12)^2}{12} - \frac{80(6)(6)^2}{12^2} = -312 \text{ kNm} \quad M_{0CB} = +312 \text{ kNm}$$

$$M_{0CD} = -\frac{72(2)(4)^2}{6^2} = -64 \text{ kNm}$$

$$M_{0DC} = +\frac{72(4)(2)^2}{6^2} = +32 \text{ kNm}$$

b. Persamaan-persamaan defleksi kemiringan :

$$M_{AB} = M_{0AB} + \frac{2E(3I)}{6}(2\theta_A + \theta_B) = -72 + EI\theta_B$$

$$M_{BA} = M_{0BA} + \frac{2E(3I)}{6}(2\theta_B + \theta_A) = +72 + 2EI\theta_B$$

$$M_{BC} = M_{0BC} + \frac{2E(10I)}{12}(2\theta_B + \theta_C) = -312 + 3,333EI\theta_B + 1,667EI\theta_C$$

$$M_{CB} = M_{0CB} + \frac{2E(10I)}{12}(2\theta_C + \theta_B) = +312 + 3,333EI\theta_C + 1,667EI\theta_B$$

$$M_{CD} = M_{0CD} + \frac{2E(2I)}{6}(2\theta_C + \theta_D) = -64 + 1,333EI\theta_C + 0,667EI\theta_D$$

$$M_{DC} = M_{0DC} + \frac{2E(2I)}{6}(2\theta_D + \theta_C) = +32 + 1,333EI\theta_D + 0,667EI\theta_C$$

c. Persamaan-persamaan serempak, memenuhi syarat sambungan :

- sambungan di B : $M_{BA} + M_{BC} = 0$
- sambungan di C : $M_{CB} + M_{CD} = 0$
- sambungan di D : $M_{DC} - 36 = 0$

Dengan memasukkan persamaan-persamaan defleksi kemiringan kedalam syarat-syarat sambungan, maka ditetapkan persamaan berikut :

$$5,333EI\theta_B + 1,667EI\theta_C = +240,0$$

$$1,667EI\theta_B + 4,667EI\theta_C + 0,667EI\theta_D = -248,0$$

$$0,667EI\theta_C + 1,333EI\theta_D = + 4,0$$

Penyelesaian persamaan serempak dengan cara eliminasi dan substitusi, hasilnya adalah :

$$EI\theta_B = +71,64$$

$$EI\theta_C = -85,25$$

$$EI\theta_D = +45,63$$

d. Momen-momen ujung :

$$M_{AB} = -72 + (+71,64) = 0,36$$

$$M_{BA} = +72 + 2(+71,64) = +215,3 \text{ kNm}$$

$$M_{BC} = -312 + 3,333(+71,64) + 1,667(-85,25) = -215,3 \text{ kNm}$$

$$M_{CB} = +312 + 3,333(-85,25) + 1,667(+71,64) = +147,2 \text{ kNm}$$

$$M_{CD} = -64 + 1,333(-85,25) + 0,667(+45,63) = -147,2 \text{ kNm}$$

$$M_{DC} = +32 + 1,333(+45,63) + 0,667(-85,25) = +36,0 \text{ kNm}$$

e. Reaksi-reaksi, diagram gaya geser dan momen sama dengan contoh soal yang sama pada metode persamaan tiga momen.