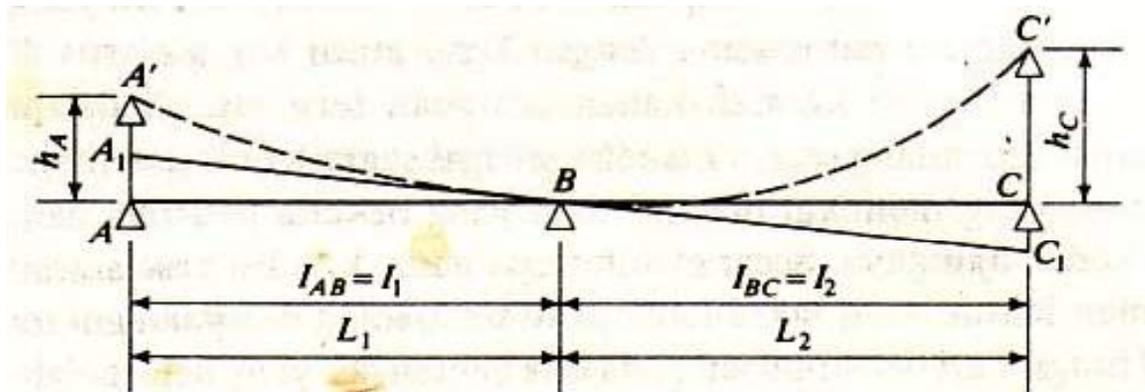


# Persamaan Tiga Momen

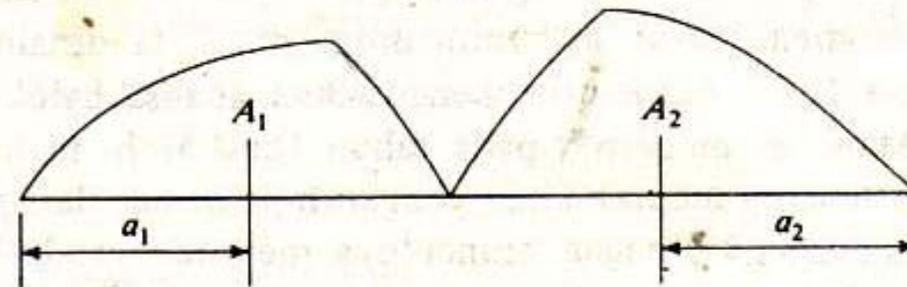
- Persamaan tiga momen menyatakan hubungan antara momen lentur di tiga tumpuan yang berurutan pada suatu balok menerus yang memikul beban-beban yang bekerja pada kedua bentangan yang bersebelahan, dengan atau tanpa penurunan-penurunan tumpuan yang tak sama.
- Hubungan ini dapat diturunkan berdasarkan *kontinuitas* kurva elastis di atas tumpuan tengah, yakni kemiringan garis singgung diujung kanan bentangan sebelah kiri harus sama dengan kemiringan garis singgung di ujung kiri bentangan sebelah kanan.

# Penurunan persamaan tiga momen

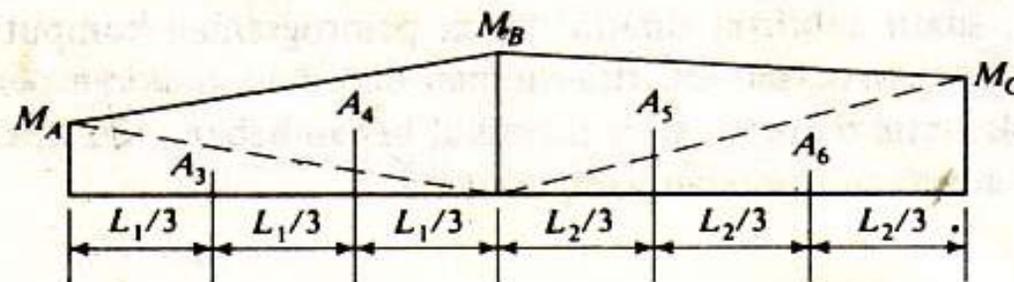
a. Diagram momen pada dua bentangan yang bersebelahan



(a).



(b)



(c)

## b. Diagram momen pada suatu bentangan

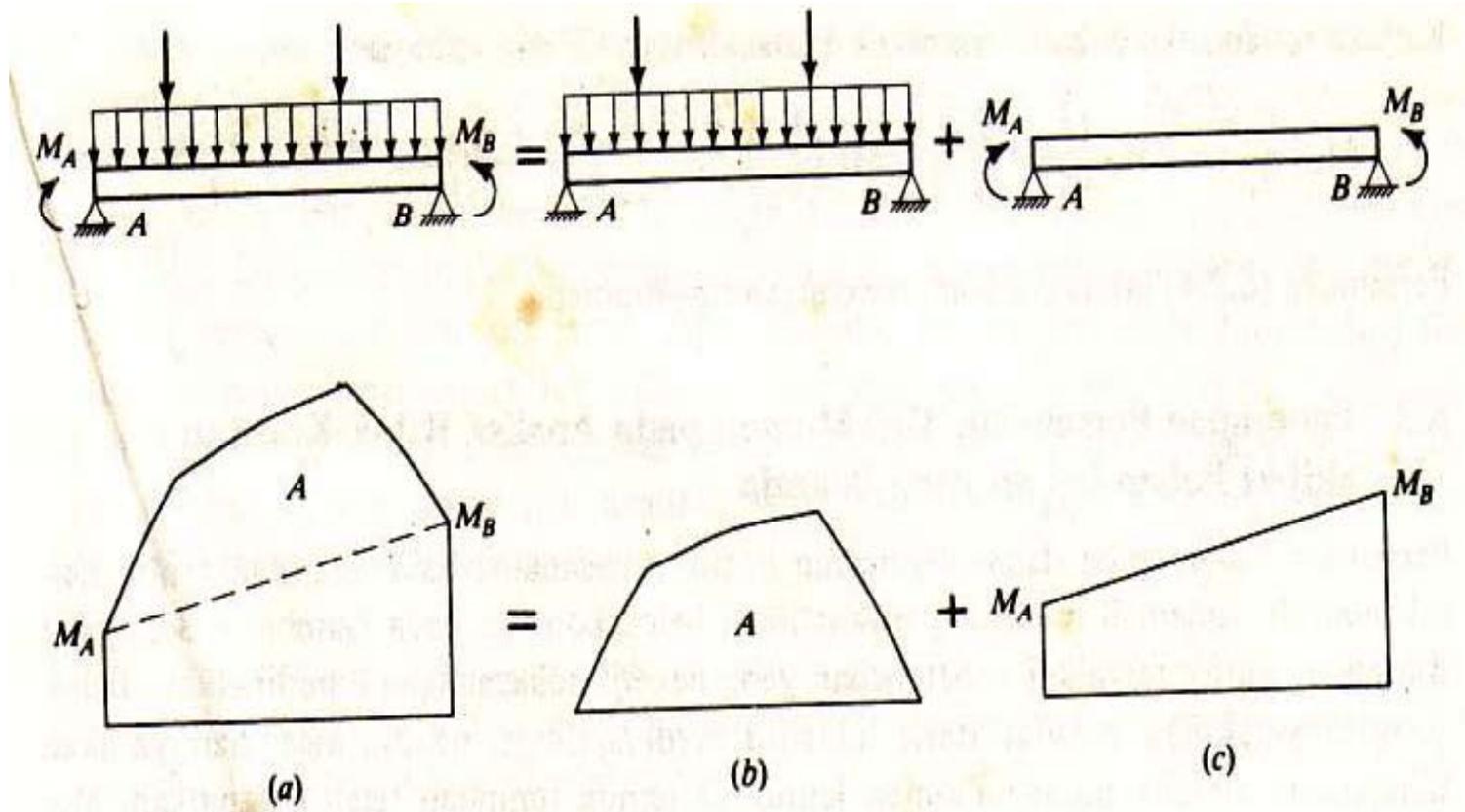


Diagram momen pada bentangan  $AB$  dibagi menjadi dua bagian, yaitu diagram momen akibat beban-beban yang bekerja pada  $AB$  apabila dianggap sebagai suatu balok sederhana, dan diagram momen yang dihasilkan dari momen-momen  $M_A$  dan  $M_B$  di masing-masing tumpuan

- Bentangan  $AB$  dan  $BC$  sebagai dua bentangan yang bersebelahan pada suatu balok yang semula horisontal.
- Karena penurunan yang taksama, tumpuan  $A$  dan tumpuan  $C$  lebih tinggi dari tumpuan  $B$ , masing-masing sebesar  $h_A$  dan  $h_C$ , dengan demikian kurva elastisnya melalui titik-titik  $A'$ ,  $B'$ , dan  $C'$ .
- $M_A$ ,  $M_B$ , dan  $M_C$  sebagai momen lentur di tumpuan  $A$ ,  $B$ , dan  $C$ .
- Diagram momen pada bentangan  $AB$  dan  $BC$  yang dibagi menjadi dua bagian. Diagram momen  $A_1$  dan  $A_2$  disebabkan oleh beban-beban pada masing-masing bentangan, dan diagram momen  $A_3$ ,  $A_4$  dan  $A_5$ ,  $A_6$ , disebabkan oleh masing-masing ujung  $M_A$ ,  $M_B$ , pada bentangan  $AB$  dan  $M_B$ ,  $M_C$  pada bentangan  $BC$
- Diagram-diagram momen balok sederhana akibat beban-beban yang bekerja pada bentangan-bentangannya telah diperoleh sebelumnya, dan tujuan analisa tersebut adalah memperoleh momen-momen lentur  $M_A$ ,  $M_B$ , dan  $M_C$  di tumpuan.

- Hubungan antara  $M_A$ ,  $M_B$ , dan  $M_C$  dapat diturunkan dari kondisi keselarasan untuk balok menerus di  $B$ , atau garis singgung kurva elastis  $BA'$  di  $B$  terletak pada garis lurus yang sama dengan garis singgung kurva elastis  $BC'$  di  $B$ .
- Titik hubung  $B$  dapat dianggap sebagai suatu sambungan kaku.
- Garis singgung  $A_1BC_1$  berupa garis lurus, dinyatakan dengan persamaan :

$$\frac{AA_1}{L_1} = \frac{CC_1}{L_2} \quad \dots \text{Pers. 1)}$$

Dimana :  $AA_1 = h_A - A_1A' = h_A -$  (lendutan di  $A'$  dari garis singgung di  $B$ )

$$= h_A - \frac{1}{EI_1} \left( A_1 a_1 + \frac{1}{3} A_3 L_1 + \frac{2}{3} A_4 L_1 \right)$$

$$= h_A - \frac{1}{EI_1} \left( A_1 a_1 + \frac{1}{6} M_A L_1^2 + \frac{2}{3} M_B L_1^2 \right) \quad \dots \text{Pers. 2)}$$

dan

$$CC_1 = C_1C' - h_C = (\text{lendutan di } C' \text{ dari garis singgung di } B) - h_C$$

$$= \frac{1}{EI_2} \left( A_2 a_2 + \frac{2}{3} A_5 L_2 + \frac{1}{3} A_6 L_2 \right) - h_C$$

$$= \frac{1}{EI_2} \left( A_2 a_2 + \frac{1}{3} M_B L_2^2 + \frac{1}{6} M_C L_2^2 \right) - h_C \quad \dots \text{ Pers. 3)}$$

Substitusikan pers. 2) dan pers. 3) ke dalam pers. 1), maka diperoleh :

$$\frac{h_A}{L_1} - \frac{1}{L_1 EI_1} \left( A_1 a_1 + \frac{1}{6} M_A L_1^2 + \frac{1}{3} M_B L_1^2 \right) = \frac{1}{L_2 EI_2} \left( A_2 a_2 + \frac{1}{3} M_B L_2^2 + \frac{1}{6} M_C L_2^2 \right) - \frac{h_C}{L_2}$$

... Pers. 4)

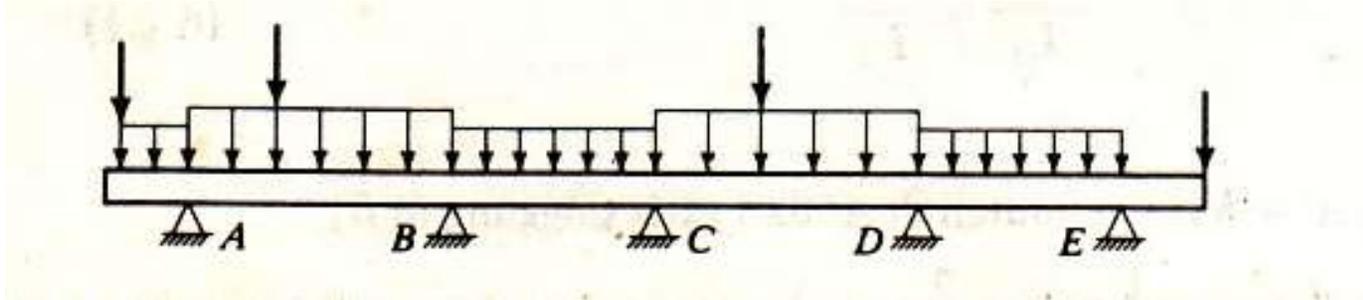
Dengan mengalikan setiap suku dalam pers. 4) dengan  $6E$ , sehingga :

$$M_A \left( \frac{L_1}{I_1} \right) + 2M_B \left( \frac{L_1}{I_1} + \frac{L_2}{I_2} \right) + M_C \left( \frac{L_2}{I_2} \right) = -\frac{6.A_1.a_1}{I_1.L_1} - \frac{6.A_2.a_2}{I_2.L_2} + \frac{6.Eh_C}{L_2}$$

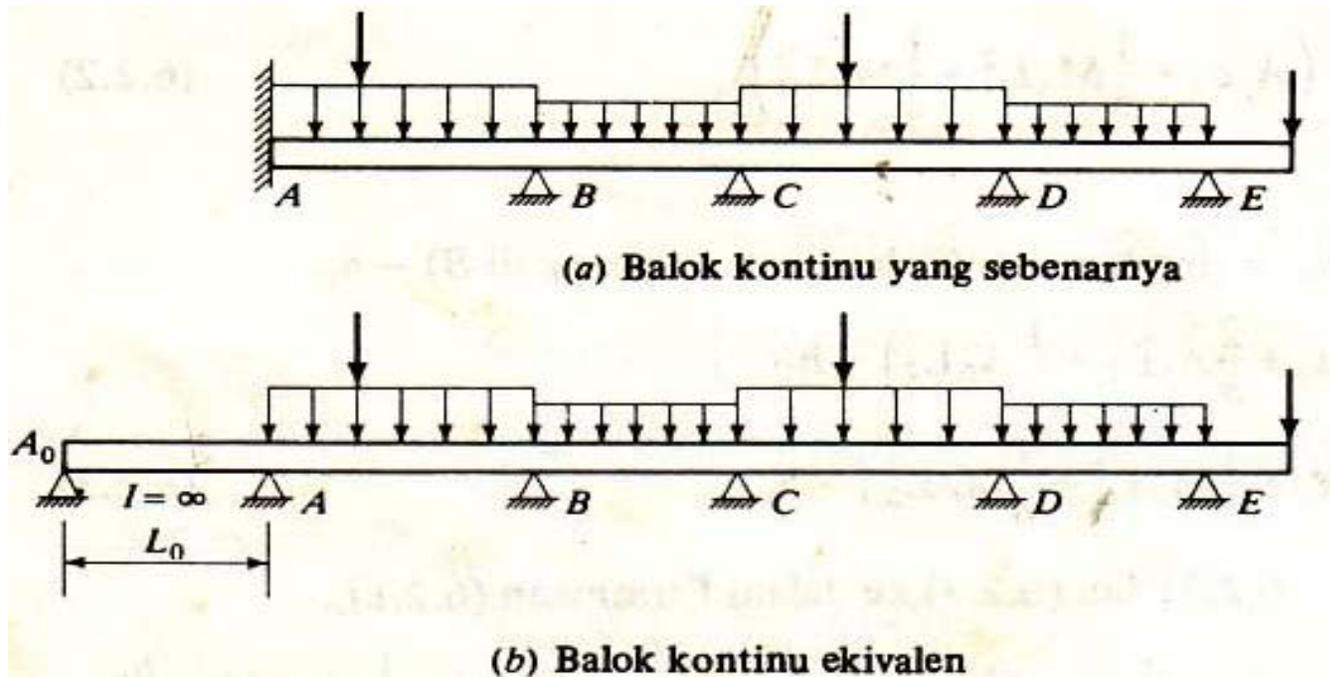
... Pers. 5)

Pers. 5) dikenal sebagai *persamaan tiga momen*

# Penerapan persamaan tiga momen pada balok statis taktentu

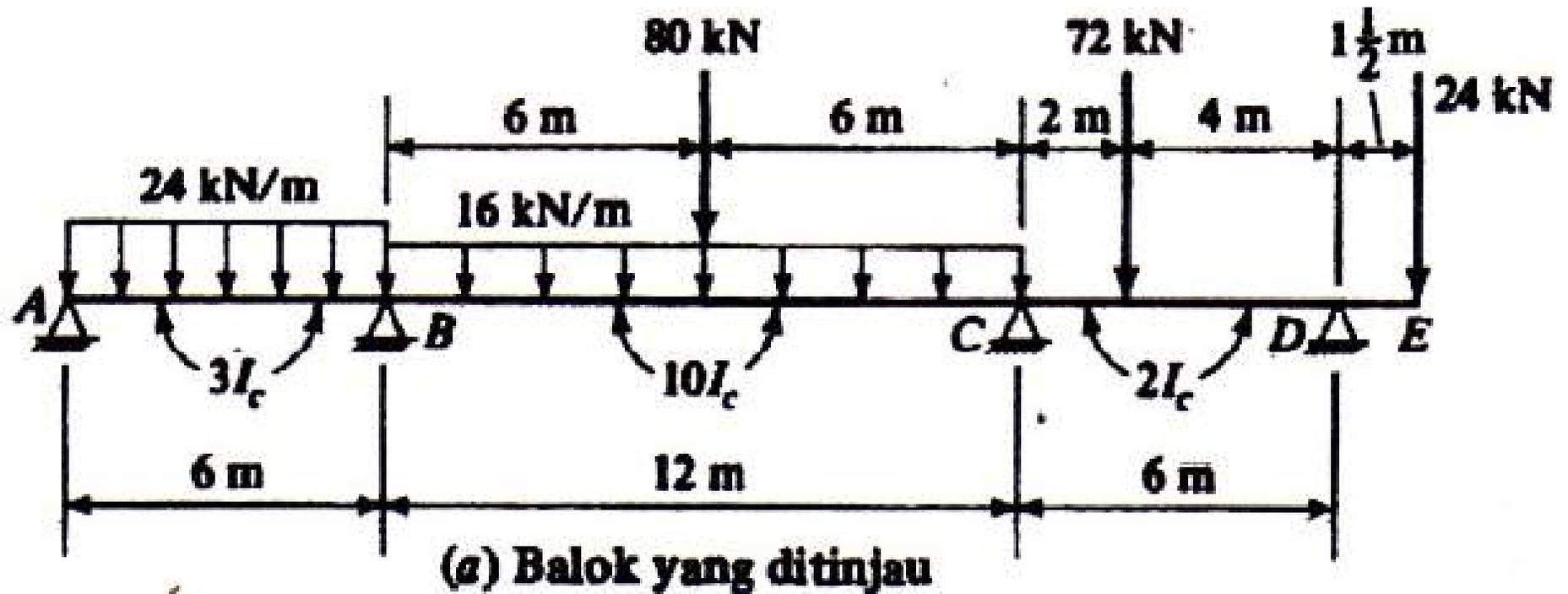


- Momen di tumpuan *A* dan *E* dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan-persamaan statika
- Untuk menentukan momen di tumpuan *B*, *C* dan *D* ditentukan dengan menggunakan persamaan tiga momen.
- Bila momen lentur di semua tumpuan telah diketahui, setiap bentangan dapat dianalisa terpisah yaitu sebagai akibat pembebanan yang diberikan dan momen-momen ujungnya.
- Reaksi-reaksi di tumpuan dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan statika, sehingga diagram gaya geser dan momen dapat digambarkan.



- Jika salah satu ujung balok terjepit, momen lentur di tumpuan terjepit tidak diketahui.
- Untuk itu ditambahkan suatu bentangan khayal  $A_0A$  dengan panjang  $L_0$  yang hanya ditumpu di  $A_0$  dan memiliki momen inersia yang tak terhingga besarnya

## Contoh 1.

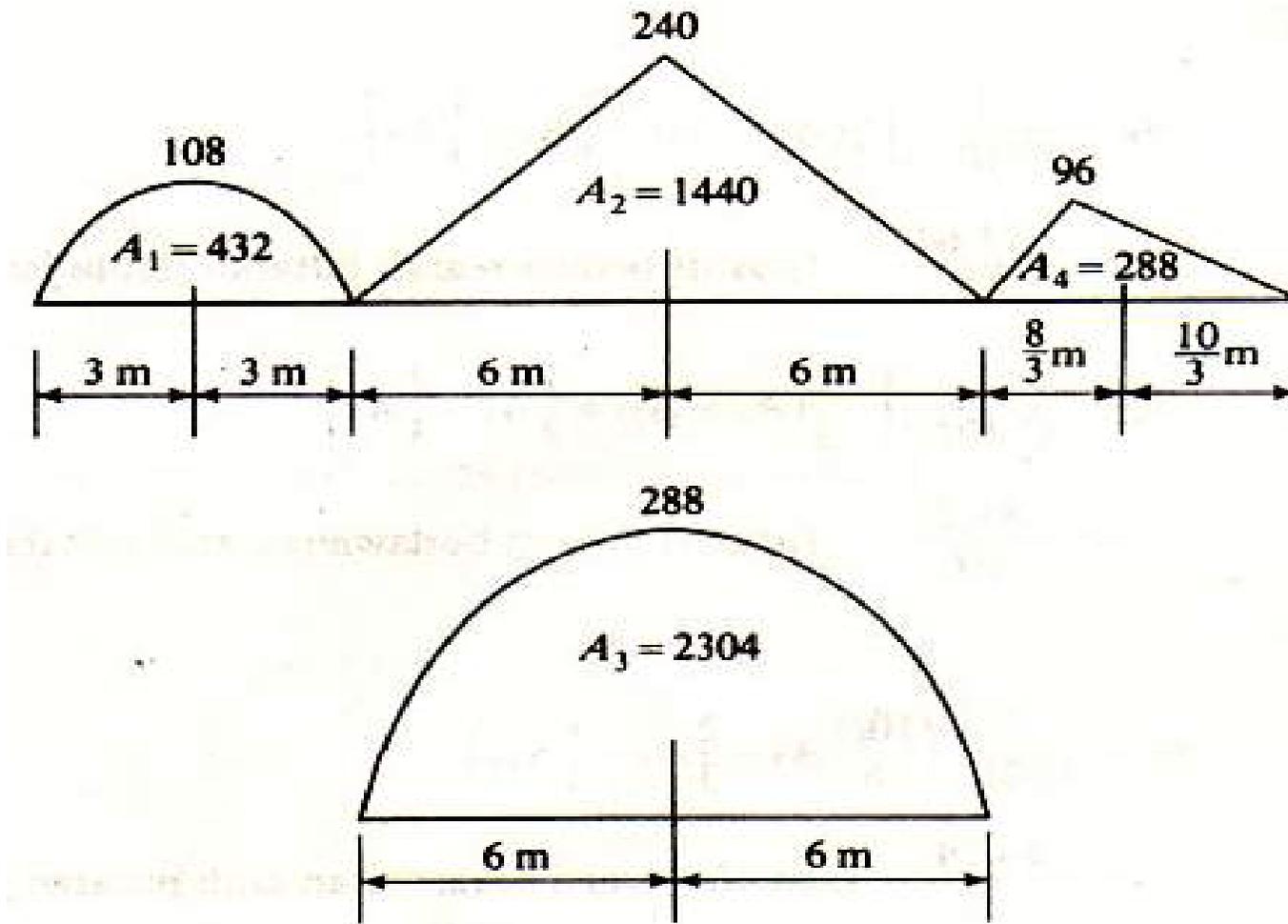


a. Momen-momen di tumpuan yang dapat diketahui :

$$M_A = 0$$

$$M_D = -24 \cdot 1,5 = -36 \text{ kNm (negatif karena mengakibatkan tekanan di tumpuan } D \text{ pada bagian bawah balok)}$$

b. Diagram momen pada bentangan sederhana akibat beban yang bekerja



**c. Persamaan tiga momen :**

*Bentangan AB dan BC*

$$M_A \left( \frac{6}{3I} \right) + 2M_B \left( \frac{6}{3I} + \frac{12}{10I} \right) + M_C \left( \frac{12}{10I} \right) = -\frac{6(432)(3)}{6(3I)} - \frac{6(1440)(6)}{12(10I)} - \frac{6(2304)(6)}{12(10I)}$$

*Bentangan BC dan CD*

$$M_B \left( \frac{12}{10I} \right) + 2M_C \left( \frac{12}{10I} + \frac{6}{2I} \right) + M_D \left( \frac{6}{2I} \right) = -\frac{6(1440)(6)}{12(10I)} - \frac{6(2304)(6)}{12(10I)} - \frac{6(288)\left(\frac{10}{3}\right)}{6(2I)}$$

Disederhanakan ,

$$6,4 M_B + 1,2 M_C = - 1555,2 \quad \dots \text{Pers. a)}$$

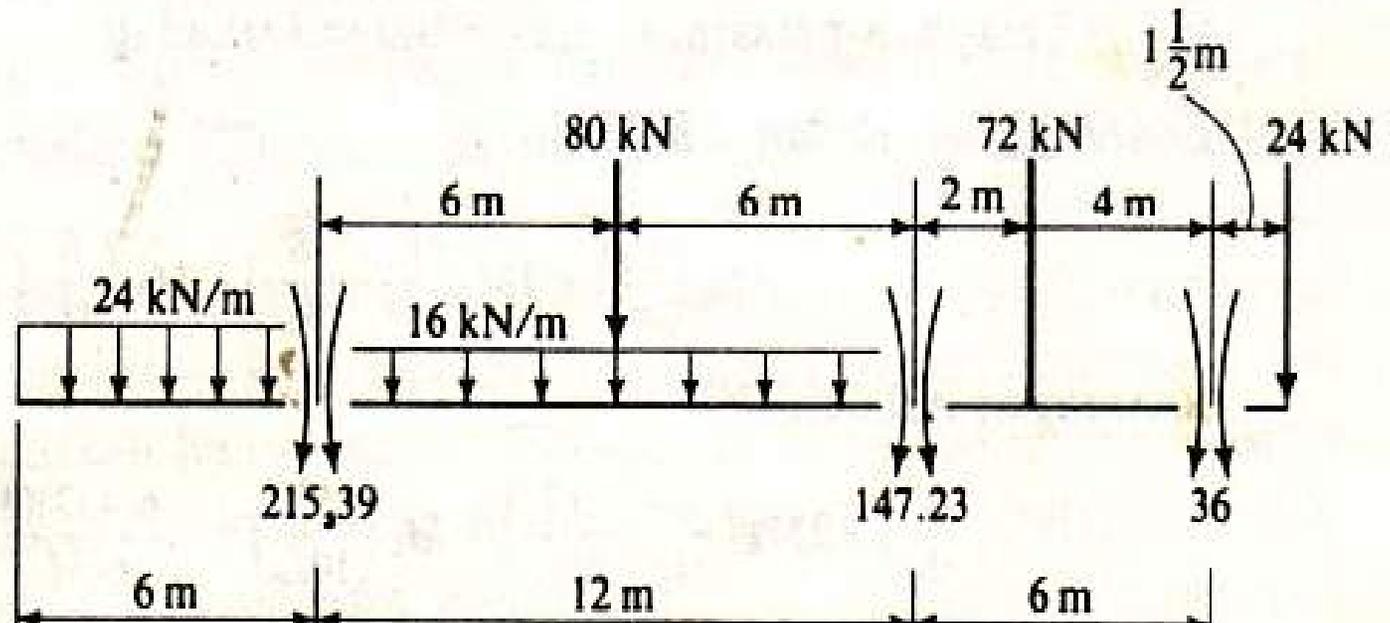
$$1,2 M_B + 8,4 M_C = - 1495,2 \quad \dots \text{Pers. b)}$$

Diselesaikan dengan cara eliminasi dan substitusi, maka diperoleh :

$$M_B = -215,39 \text{ kNm}$$

$$M_C = -147,25 \text{ kNm}$$

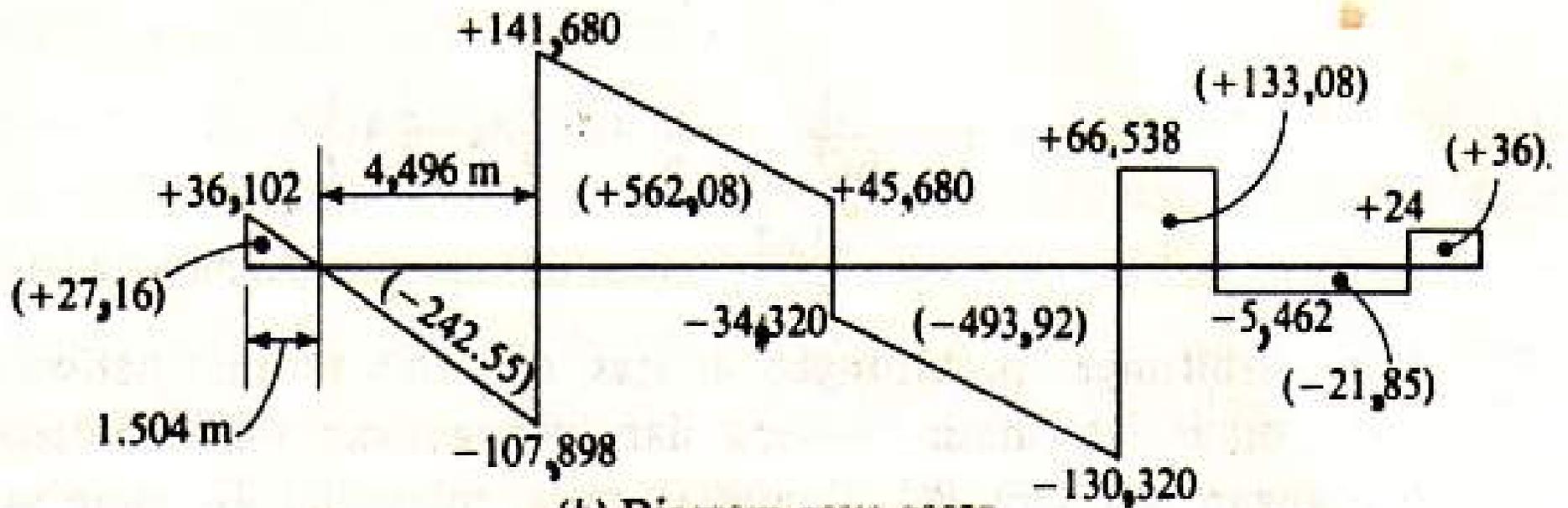
d. Reaksi Perletakan :



Reaksi ujung akibat beban yang bekerja	+72	+72	+96	+96	+48	+24	+24
Reaksi ujung akibat momen-momen ujung	-35,898	+35,898	+5,680	-5,680	+18,538	-18,538	
Reaksi ujung total	+36,102	+107,898	+141,680	+130,320	+66,538	+5,462	+24
	$R_A = 36,102$	$R_B = 249,578$		$R_C = 196,858$	$R_D = 29,462$		

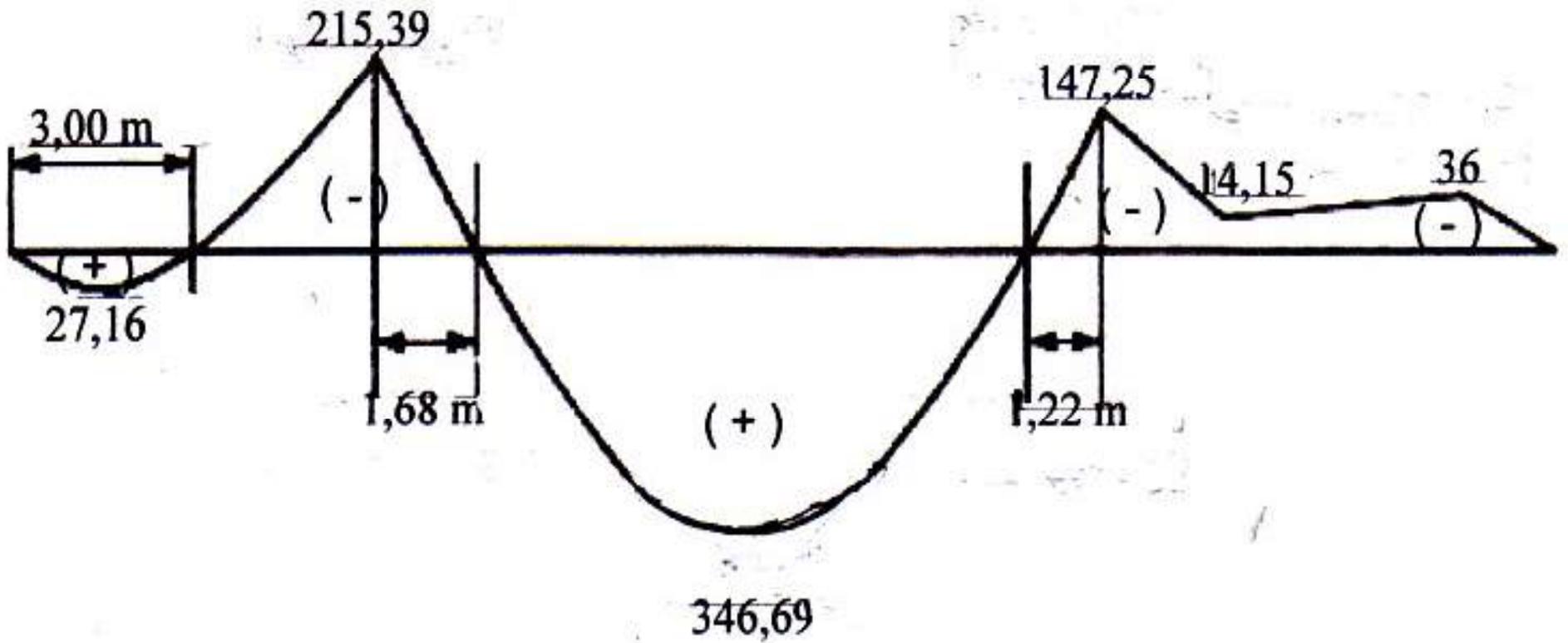
(a) Penentuan reaksi

e. Diagram gaya geser :

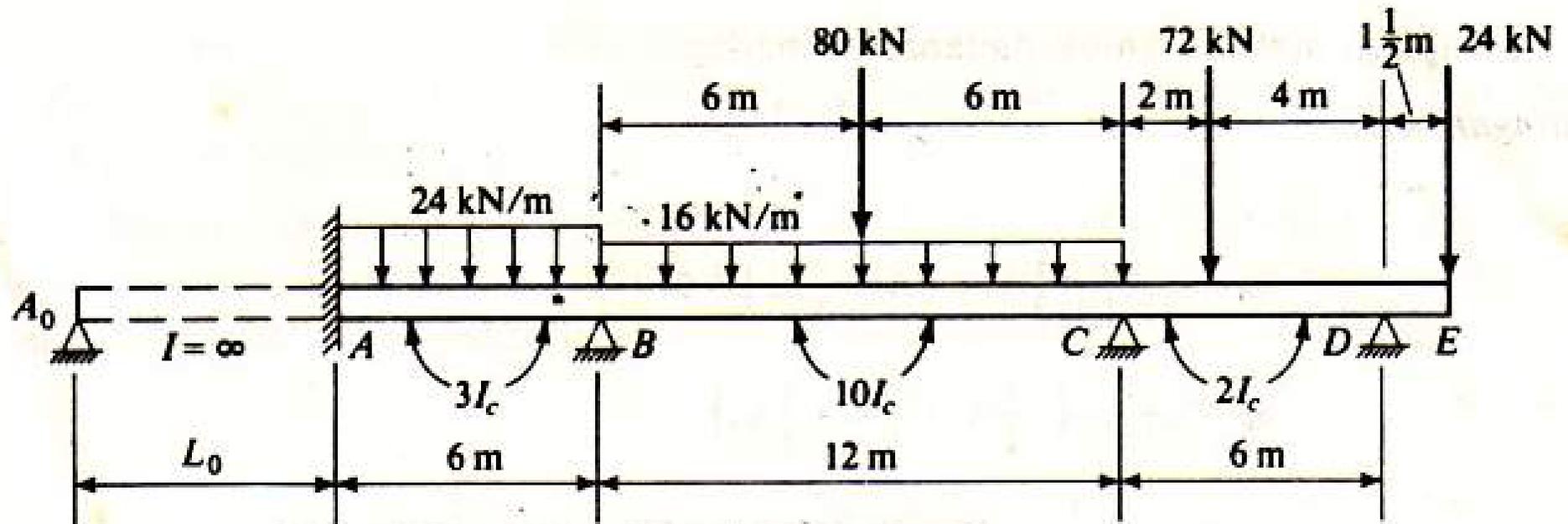


(b) Diagram gaya geser

f. Diagram momen



## Contoh 2.



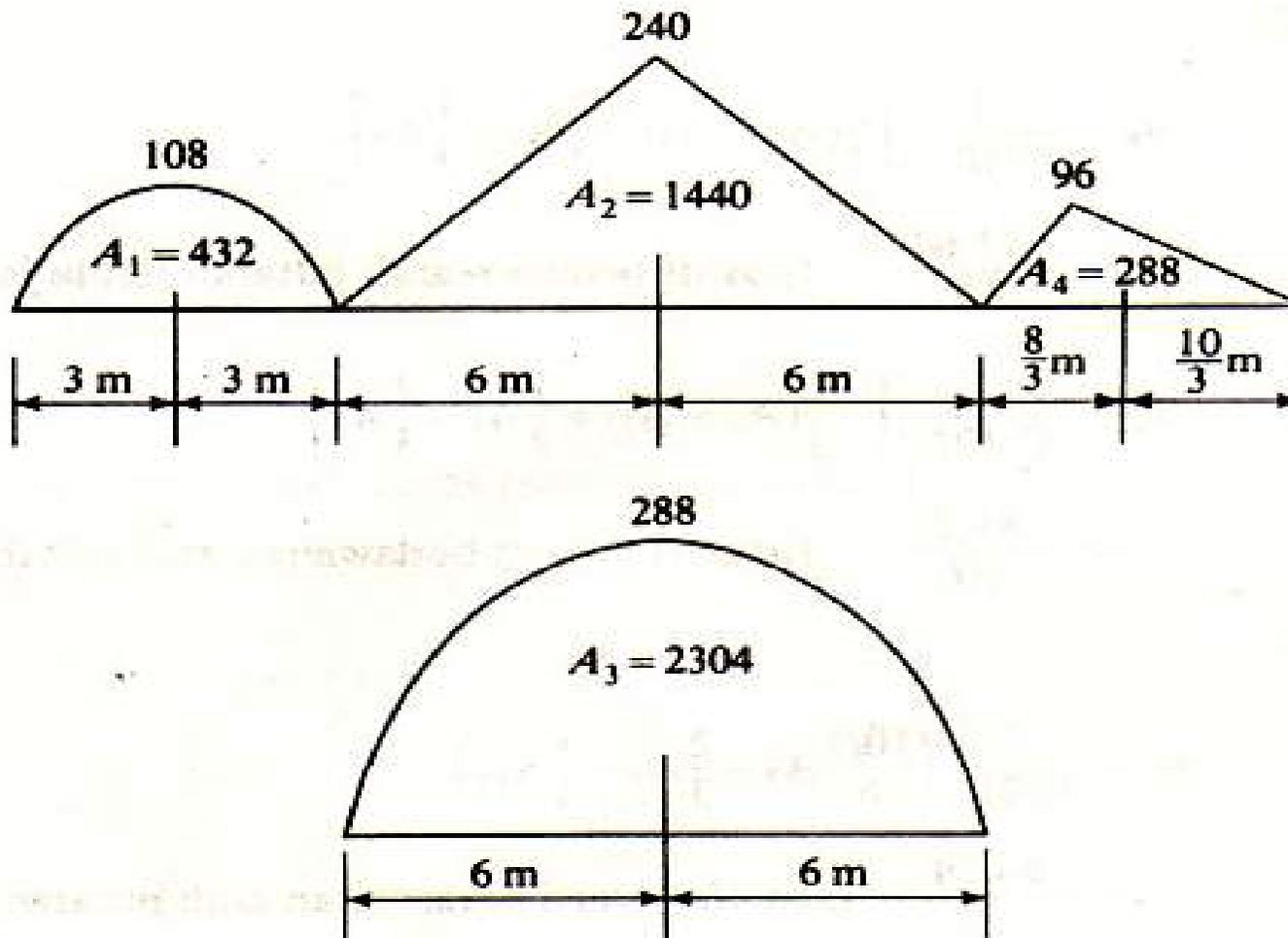
(a) Balok yang ditinjau

a. Momen-momen di tumpuan yang dapat diketahui :

$$M_{A_0} = 0$$

$$M_D = -24 \cdot 1,5 = -36 \text{ kNm}$$

b. Diagram momen pada bentangan sederhana akibat beban yang bekerja



**c. Persamaan tiga momen :**

*Bentangan A<sub>o</sub>A dan AB*

$$M_{A_0} \left( \frac{L_0}{\infty} \right) + 2M_A \left( \frac{L_0}{\infty} + \frac{6}{3I} \right) + M_B \left( \frac{6}{3I} \right) = -\frac{6(432)(3)}{6(3I)}$$

*Bentangan AB dan BC*

$$M_A \left( \frac{6}{3I} \right) + 2M_B \left( \frac{6}{3I} + \frac{12}{10I} \right) + M_C \left( \frac{12}{10I} \right) = -\frac{6(432)(3)}{6(3I)} - \frac{6(1440)(6)}{12(10I)} - \frac{6(2304)(6)}{12(10I)}$$

*Bentangan BC dan CD*

$$M_B \left( \frac{12}{10I} \right) + 2M_C \left( \frac{12}{10I} + \frac{6}{2I} \right) + M_D \left( \frac{6}{2I} \right) = -\frac{6(1440)(6)}{12(10I)} - \frac{6(2304)(6)}{12(10I)} - \frac{6(288)\left(\frac{10}{3}\right)}{6(2I)}$$

Disederhanakan ,

$$4,0 M_A + 2,0 M_B = - 432 \quad \dots \text{Pers. a)}$$

$$2,0 M_A + 6,4 M_B + 1,2 M_C = - 1555,2 \quad \dots \text{Pers. b)}$$

$$1,2 M_B + 8,4 M_C = - 1495,2 \quad \dots \text{Pers. c)}$$

Diselesaikan dengan cara eliminasi dan substitusi, maka diperoleh :

$$M_A = -0,36 \text{ kNm}$$

$$M_B = -215,28 \text{ kNm}$$

$$M_C = -147,24 \text{ kNm}$$

- d. Reaksi-reaksi perletakan, diagram gaya geser dan momen, kemudian diperoleh melalui cara yang sama seperti pada contoh 1.**