SATUAN ACARA PERKULIAHAN
(SAP)

Mata Kuliah : Pengolahan Citra Digital
Kode : IES 6323
Semester : VI
Waktu : 2 x 3x 50 Menit
Pertemuan : 4 &5

A. Kompetensi

1. Utama

   Mahasiswa dapat memahami tentang sistem pengolahan citra digital dan hal yang terkait secara umum.

2. Pendukung

   Mahasiswa dapat mengetahui landasan matematis pengolahan citra digital

B. Pokok Bahasan

Landasan Matematis

C. Sub Pokok Bahasan

- Teori Konvolusi
- Transformasi Fourier

D. Kegiatan Belajar Mengajar

Tahapan Kegiatan	Kegiatan Pengajaran	Kegiatan Mahasiswa	Media & Alat Peraga
Pendahuluan	1. Mereview materi sebelumnya 2. Menjelaskan materi-materi perkuliahan yang akan dipelajari.	Mendengarkan dan memberikan komentar	Notebook, LCD, Papan Tulis
Penyajian	1. Menjelaskan teori konvolusi 2. Menjelaskan transformasi Fourier	Memperhatikan, mencatat dan memberikan komentar. Mengajukan pertanyaan.	Notebook, LCD, Papan Tulis
Penutup	1. Mengajukan pertanyaan kepada mahasiswa. 2. Memberikan kesimpulan. 3. Mengingatkan akan kewajiban mahasiswa untuk pertemuan selanjutnya.	Memberikan komentar. Mengajukan dan menjawab pertanyaan.	Notebook, LCD, Papan Tulis

E. Evaluasi

Evaluasi dilakukan dengan cara memberikan pertanyaan langsung dan tidak langsung kepada mahasiswa

RENCANA KEGIATAN BELAJAR MINGGUAN

(RKBM)

Mata Kuliah : Pengolahan Citra Digital
Kode : IES 6323
Semester : VI
Waktu : 2 x 3x 50 Menit
Pertemuan : 4 & 5

Minggu ke-	Topik (Pokok Bahasan)	Metode Pembelajaran	Estimasi Waktu (Menit)	Media
4	3.1 Teori Konvolusi	Ceramah, Diskusi Kelas	1 x 3 x 50'	Notebook, LCD, Papan Tulis
5	3.2 Transformasi Fourier	Ceramah, Diskusi Kelas	1 x 3 x 50'	Notebook, LCD, Papan Tulis

BAB 3

LANDASAN MATEMATIS

Bab ini berisi konsep matematis yang melandasi teori pengolahan citra. Dua operasi matematis penting yang perlu dipahami dalam mempelajari pengolahan citra digital adalah operasi konvolusi dan Transformasi Fourier Konvolusi terdapat pada operasi pengolahan citra yang mengalikan sebuah citra dengan sebuah mask atau kernel, sedangkan Transformasi Fourier dilakukan bila citra dimanipulasi dalam ranah (domain) frekuensi.

3.1 Teori Konvolusi

Operasi yang mendasar dalam pengolahan citra adalah operasi konvolusi. Konvolusi 2 buah fungsi f(x) dan g(x) didefinisikan sebagai berikut :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(a)g(x-a)da$$

h(x) = *f*(x)**g*(x) = (3.1)

yang dalam hal ini, tanda, * menyatakan operator konvolusi, dan peubah (variable) a adalah peubah bantu (*dummy variable*).

$$\sum_{a=-\infty}^{\infty} f(a)g(x-a)da$$

Untuk fungsi diskrit, konvolusi didefinisikan sebagai :

h(x) = f(x)*g(x) = (3.2)

Pada operasi konvolusi di atas, g(x) disebut kernel konvolusi atau kernel penapis (filter). Kernel g(x) merupakan suatu jendela yang dioperasikan secara bergeser pada sinyal masukan f(x), yang dalam hal ini, jumlah perkalian kcdua fungsi pada setiap titik merupakan hasil konvolusi yang dinyatakan dengan keluaran h(x).

3.2 Konvolusi Pada Fungsi Dwimatra

Untuk fungsi dengan dua peubah (fungsi dua dimensi atau dwimatra), operasi konvolusi didefinisikan sebagai berikut :

Untuk fungsi malar (kontinyu)

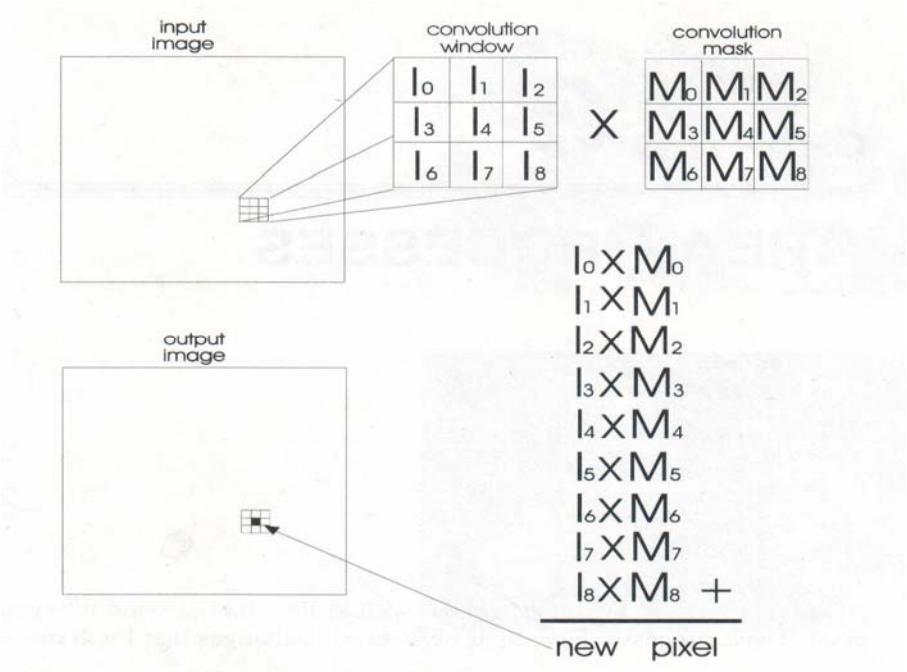
$$h(x,y) = f(x,y) * g(x,y) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(a,b) g(x-a, y-b) da db \tag{3.3}$$

untuk fungsi diskrit

$$h(x,y) = f(x,y) * g(x,y) \sum_{b=-\infty}^{\infty} \sum_{b=-\infty}^{\infty} f(a,b) g(x-a, y-b) \tag{3.4}$$

Fungsi penapis g(xy) disebut juga convolution filter, convolution mask, convolution kernel, atau template. Dalam ranah diskrit kernel konvolusi dinyatakan dalam bentuk matriks (umumnya 3 x 3, namun ada juga yang berukuran 2 x 2 atau 2 x 1 atau 1 x 2). Ukuran matriks ini biasanya lebih kecil dari ukuran citra. Setiap elemen matriks disebut koefisien konvolusi.

Ilustrasi konvolusi ditunjukkan pada Gambar 3.1



Gambar 3.1 ilustrasi konvolusi

Operasi konvolusi dilakukan dengan menggeser kernel konvulasi pixel per pixel. Hasil konvolusi disimpan di dalam matriks yang baru.

Contoh 3.1. misalkan citra f(x,y) yang berukuran 5 x 5 dan sebuah kernel atau mask yang berukuran 3 x 3 masing-masing adalah sebagai berikut :

$$f(x,y)=\begin{bmatrix}4 & 4 & 3 & 5 & 4\\ 6 & 6 & 5 & 5 & 2\\ 5 & 6 & 6 & 6 & 2\\ 6 & 7 & 5 & 5 & 3\\ 3 & 5 & 2 & 4 & 4\end{bmatrix} \quad g(x,y)=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & \bullet 4 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

(keterangan Tanda • menyatakan posisi (0,0) dari kernel)

Operasi konvulasi antara citra f(x,y) dengan kernel g(x,y),

f(x,y) * g(x,y)

dapat diilustrasikan sebagai berikut :

1. Tempatkan kernel pada sudut kiri atas, kemudian hitung nilai pixel pada posisi (0,0) dari kernel :

4	4	3	5	4
6	6	5	5	2
5	6	6	6	2
6	7	5	5	3
3	5	2	4	4

Gambar 3.2 Ilustrasi Konvolusi (lanjutan)

Hasil konvulasi = 3.

Nilai ini dihitung dengan cara berikut :

(0 x 4) + (-1 x 4) + (0 x 3) + (-1 x 6) + (4 x 6) + (-1 x 5) + (0 x 5) + (-1 x 6) + (0 x 6) = 3

2. Geser kernel satu pixel ke kanan, kemudian hitung nilai pixel pada posisi (0,0) dari kernel. Hasil konvulasi = 0. nilai ini dihitung dengan cara berikut :

(0 x 4) + (-1 x 3) + (0 x 5) + (-1 x 6) + (4 x 5) + (-1 x 5) + (0 x 6) + (-1 x 6) + (0 x 6) = 0

3. Geser kernel satu pixel ke kanan, kemudian hitung nilai pixel pada posisi (0,0) dari

kernel. Hasil konvulasi = 2. nilai ini dihitung dengan cara berikut :

(0 x 3) + (-1 x 5) + (0 x 4) + (-1 x 5) + (4 x 5) + (-1 x 2) + (0 x 6) + (-1 x 6) + (0 x 2) = 2

Selanjutnya geser kernel satu pixel ke bawah, lalu mulai lagi melakukan konvolusi dari sisi kiri citra. Setiap kali konvolusi, geser kernel satu pixel ke kanan.

Dengan cara yang sama seperti tadi, maka pixel-pixel pada baris ketiga dikonvolusi sehingga menghasilkan :

	3	0	2	
	0	2	6	
	6	0	2	

Gambar 3.3 Hasil Konvolusi

Sebagai catatan, jika hasil konvolusi menghasilkan nilai pixel negatif, maka nilai tersebut dijadikan 0, sebaliknya jika hasil konvolusi menghasilkan nilai pixel lebih besar dari nilai keabuan maksimum, maka nilai tersebut dijadikan ke nilai keabuan maksimum.

Masalah timbul bila pixel yang dikonvolusi adalah pixel pinggir (borders, karena beberapa koefisien konvolusi tidak dapat diposisikan pada pixel-pixel citra (efek "menggantung").

Konvolusi berguna pada proses pengolahan citra seperti:

1. perbaikan kualitas citra (image enhancement)
2. penghilangan derau
3. mengurangi erotan
4. penghalusan/pelembutan citra
5. deteksi tepi, penajaman tepi
6. dll

Karena konvolusi dilakukan per pixel dan untuk setiap pixel dilakukan operasi perkalian dan penjumlahan, maka jelas konvolusi mengkonsumsi banyak waktu. Jika citra berukuran N x N dan kernel berukuran m x m, maka jumlah perkalian adalah dalam orde N2m2. Sebagai contoh jika citra berukuran 512 x 512 dan kernel berukuran 16 x 16, maka ada sekitar 32 juta perkalian yang dibutuhkan. Ini jelas tidak cocok untuk proses yang real time tanpa perangkat keras yang dedicated.

Satu cara mengurangi waktu komputasi adalah mentransformasi citra dan kernel ke dalam ranah frekuensi (dengan menggunakan Transformasi Fourier).K euntungan utama dari penggunaan ranah frekuensi adalah proses konvolusi dapat diterapkan dalam bentuk perkalian langsung.

Proses perubahan fungsi dan ranah ranah spesial ke ranah frekuensi dilakukan melalui Transformasi Fourier. Sedangkan perubahan fungsi dari ranah frekuensi ke ranah spasial dilakukan melalui Transformasi Fourier Balikan (invers).

3.2 Transformasi Fourier

Transformasi Fourier merupakan transformasi paling penting di dalam bidang pengolahan sinyal (*signal processing*), khususnya pads bidang pengolahan citra.

Umumnya sinyal dinyatakan sebagai bentuk plot amplitudo versus waktu (pada fungsi satu matra) atau plot amplitudo versus posisi spasial (pads fungsi dwimatra). Pada beberapa aplikasi pengolahan sinyal, terdapat kesukaran melakukan operasi karena fungsi dalam ranah waktu/spasial, misalnya pada operasi konvolusi di atas. Operasi konvolusi dapat diterapkan sebagai bentuk perkalian langsung bila fungsi berada dalam ranah frekunsi.

Transformasi Fourier adalah kakas (tool) untuk mengubah fungsi dari ranah waktu/spasial ke ranah frekuensi. Untuk perubahan sebaliknya digunakan Transformasi Fourier Balikan. Intisari dari Transformasi Fourier adalah menguraikan sinyal atau gelombang menjadi sejumlah sinusoida dari berbagai frekuensi, yang jumlahnya ekivalen dengan gelombang awal.

Di dalam pengolahan citra, transformasi Fourier digunakan, untuk menganalisis frekuensi pada operasi seperti perekaman citra, perbaikan kualitas citra, restorasi citra, pengkodean, dan lain-lain. Dari analisis frekuensi, kita dapat melakukan perubahan frekuensi pada gambar. Perubahan frekuensi berhubungan dengan spektrum antara gambar yang kabus kontrasnya sampai gambar yang kaya akan rincian visualnya. Sebagai contoh, pada proses perekaman citra mungkin terjadi pengaburan kontras gambar. Pada gambar yang mengalami kekaburan kontras terjadi perubahan intensitas secara perlahan yang berarti kebilangan informasi frekuensi tinggi. Untuk meningkatkan kualitas gambar, kita menggunakan penapis frekuensi tinggi sehingga pixel yang berkontras kabur dapat dinaikkan intensitasnya.

3.2.1 Transformasi Fourier Kontinyu

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp[-2j\pi ux]dx$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \exp[2j\pi ux]du$$

$$\text{Euler's formula} : \exp[-2j\pi ux] = \cos 2\pi ux - j \sin 2\pi ux$$

Yang dalam hal ini,

j = imaginer = $\sqrt{-1}$

u adalah peubah frekuensi

Baik transformasi Fourier maupun Transformasi Fourier Balikan keduanya dinamakan pasangan transformasi Fourier.

Untuk f(x) real, F(u) adalah fungsi komplek dan dapat dituliskan sebagai :

F(u) = R(u) + il(u) = $|F(u)|e^{i\phi(u)}$ (3.5)

Amplitudo atau $|F(u)|$ spectrum fourier dari f(x) dan didefinisikan sebagai :

$$|F(u)| = \sqrt{\mathrm{R}^2(\mathrm{u}) + \mathrm{I}^2(\mathrm{u})} \quad (3.6)$$

Sudut fase spectrum,

$$\Theta(u) = \tan^{-1}\left[\frac{i(u)}{R(u)}\right] \quad (3.7)$$

Menyatakan pergeseran fase atau sudut fase dari setiap frekuensi u.

Dengan mengingat kesamaan Euler,

$e^{\pm ix} = \cos(x) \pm i \sin(x)$ (3.8)

maka pasangan transformasi euler dapat juga ditulis sebagai

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi ux}\,\mathrm{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos(2\pi ux) - \mathrm{i}\sin(2\pi ux'))\,dx \quad (3.9)$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{-i2\pi ux}\,\mathrm{du} = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)(\cos(2\pi ux) - \mathrm{i}\sin(2\pi ux'))\,du \quad (3.10)$$

Transformasi fourier untuk fungsi dengan dua peubah adalah

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)e^{-i2\pi(ux+uy)}\,dudv \quad (3.11)$$

Sedangkan transformasi fourier balikannya adalah

$$f(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)e^{i2\pi(ux+uy)}\,dudv \qquad (3.12))$$

Yang dalam hal ini, x dan y adalah peubah spesial, sedangkan u dan v adalah peubah frekuensi.

Spektrum fourier dari fungsi dua peubah :

$$|F(u,v)| = \sqrt{\mathrm{R}^2(\mathrm{u},\mathrm{v}) + \mathrm{I}^2(\mathrm{u},\mathrm{v})} \qquad (3.13)$$

Sedangkan sudut fasenya :

$$\Theta(u) = \tan^{-1}\left[\frac{i(u,v)}{R(u,v)}\right] \qquad (3.14)$$

Sifat-sifat transformasi Fourier

Jika f(t) ↔ F(u) dan g(t) ↔ G(u), maka sifat-sifat transformasi Fourier dirumuskan didalam tabel 3.1

3.2.2 Transformasi Fourier Diskrit

Pada pengolahan sinyal dengan komputer digital, fungsi dinyatakan oleh himpunan berhingga nilai diskrit. Transformasi Fourier Diskrit (TFD) ditujukan bagi persoalan yang tidak menghasilkan solusi transformasi Fourier dalam bentuk fungsi malar.

Tabel 3.1 Sifat-sifat Transformasi Fourier

1. Kelanjaran	af (t) + bg (t)	aF(u) + bG(u)
2. Penskalaan	f (at	$\frac{1}{\lvert a\rvert}$ F(u/a)
3. Pergeseran	f (t - a)	F(u-a)
4. Modulasi	ei2πutf(t)	F(u)e-i2πua
5. Konyugasi	f *(t)	F*(-u)
6. Konvolusi	h(t) = f (t)* g(t)	H(u) = F(u)G(u)
7. Perkalian	h(t) = f (t)g(t)	H(u) = F(u) * G(u)
8. Diferensiasi	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	(i2πu)nF(u)
9. Simetri	F(t)	f (-u)
10. Hasil kali dalam	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g^*(t)dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} F(u)G^*(u)du$

Bila f(x) yang menerus dibuat diskrit dengan mengambil N buah terokan (sampling) sejarak Δx, yaitu himpunan nilai {f(xo), f(xo + Δx), f(xo + 2Δx), ... , f(xo + (N – 1)Δx)}.

Jadi,

fs = f(xo + xΔx), x = 0, 1, 2, ..., N – 1

Pasangan transformasi Fourier Diskrit untuk fungsi dengan satu peubah :

$$Fu = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{x=0}^{N-1} f_x e^{-i 2\pi u x i N} \quad , \text{u = 0, 1, 2, ..., N – 1} \qquad (3.15)$$

$$F_x = \sum_{u=0}^{N-1} F_u e^{i 2\pi u x i N} \quad , \text{x = 0, 1, 2, ..., N – 1} \qquad (3.16)$$

$$F_u = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{x=0}^{N-1} [F_u \cos(2\pi u x / N) - i f_x \sin(2\pi u x / N)] \qquad (3.17)$$

$$F_x = \sum_{u=0}^{N-1} [F_u \cos(2\pi u x / N) - i F_u \sin(2\pi u x / N)] \qquad (3.18)$$

Interpretasi dari TFD adalah sebagai berikut: TFD mengkonversi data diskrit menjadi sejumlah sinusoida diskrit yang frekuensinya dinomori dengan u= 0,1,2,..., N – 1, dan amplitudonya diberikan oleh F(u).

Faktor 1/N pada persamaan F(u) adalah faltor skala yang dapat disertakan dalam persamaan *F(u)* atau dalam persamaan *f(x)*, tetapi tidak kedua-duanya.

Contoh:

Diketahui fungsi sinyal *f(t)* dengan hasil penerokan ke dalam nilai-nilai diskrit sebagai berikut (*N = 4*):

$x_0 = 0.5$, $f_0 = 2$

$x_1 = 0.75$, $f_1 = 3$

$x_2 = 1.0$, $f_2 = 4$

$x_3 = 1.25$, $f_3 = 4$

Transformasi Fourier Diskrit adalah sebagai berikut:

$$F_0 = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^{3} f_x e^{-i.0.2\pi x / 4} = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^{3} f_x e^{0} = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^{3} f_0 + f_1 + f_2 + f_3 = 3.25$$

$$F_1 = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^{3} f_x e^{-i.0.2\pi x / 4} = \frac{1}{4} (f_0 e^{0} + f_1 e^{-i\pi/2} + f_2 e^{-i\pi} + f_3 e^{-i3\pi/2})$$

$$= \frac{1}{4} (2 + 3[\cos(\pi/2) - i\sin(\pi/2)] + 4[\cos(\pi) - i\sin(\pi)] + 4[\cos(3\pi/2) - i\sin(3\pi/2)])$$

$$= \frac{1}{4} (2 + 3[0 - i] + 4[-1 - 0] + 4[0 + i]) = \frac{1}{4} (-2 - i)$$

$$F_2 = \frac{1}{4}\sum_{x=0}^{3} f_x e^{-i.2.2\pi x/4} = \frac{1}{4}(2e^0 + 3e^{-i\pi} + 4e^{-i2\pi} + 4e^{-i3\pi})$$

$$= \frac{1}{4}(1 + 0i) = -\frac{1}{4}$$

$$F_3 = \frac{1}{4}(2 + i)$$

Spektrum fouriernya:

$|F_0| = 3.25$

$$|F_1| = \sqrt{(1/2)^2 + (1/4)^2} = \sqrt{1/4 + 1/6} = \sqrt{5/16} = \frac{1}{4}\sqrt{5}$$

$$|F_2| = \frac{1}{4}$$

$$|F_3| = \frac{1}{4}\sqrt{5}$$

Citra digital adalah fungsi diskrit ranah spasial, dengan dua peubah, *x* dan *y.* pada fungsi diskrit dengan dua peubah dan berukuran *N X M,* pasangan Transformasi Fourier Diskritnya adalah:

$$F_{u,v} = \frac{1}{\mathrm{NM}}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{y0}^{M-1} f_{x,y} e^{-i2\pi(ux/N + vy/M)}$$

, *u* dan *v* = 0, 1, 2, ..., *N* – 1

(5.29)

$$F_{x,y} = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{-0}^{M-1} F_{u,v} e^{-i2\pi(ux/N + vy/M)}$$

, *x* dan *y* = 0, 1, 2, ..., N – 1

(5.30)

atau

$$F_{u,v} = \frac{1}{\mathrm{NM}}\sum_{u=0}^{N-1} f_{x,y} e^{-2\pi ux/N} \frac{1}{M}\sum_{y=0}^{M-1} f_{x,y} e^{-i2\pi vy/M}$$

(5.31)

$$F_{x,y} = \sum_{u=0}^{N-1} F_{u,v} e^{i2\pi ux} \sum_{v=0}^{M-1} F_{u,v} e^{-i2\pi vy/M}$$

Untuk *u*, *x* = 0,1,…., N – *1* dan *v,y* = 0,1…., *M – 1.*

Algoritma TFD dan balikan dapat diterapkan untuk fungsi diskrit dwimatra. Mula-mula transformasi dilakukan dalam arah *x* (dengan nilai *y* tetap). Kemudian, hasilnya ditransformasikan lagi dalam arah *y*.

Algoritma TFD tidak bagus untuk *N* yang besar karena komputasinya memakan waktu yang lama. Kompleksitas waktu algoritmanya adalah $O(N^2)$. Algoritma yang dikenal cepat untuk menghitung transformasi Fourier diskrit adalah FFT(*Fast Fourier Transform*).

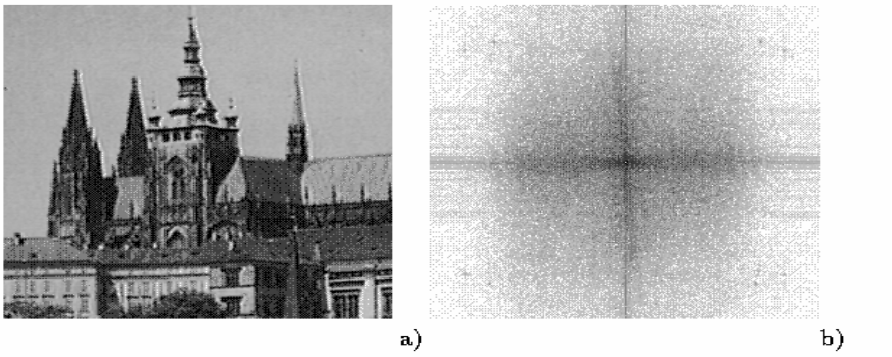


Figure 11.1 *Fourier spectrum: (a) Image, (b) frequency spectrum as an intensity function.*

Gambar 3.4 Contoh Transformasi Fourier 2 Dimensi
(*Sumber: http://www.icaen.uiowa.edu/~dip/LECTURE/LinTransforms.html*)

Latihan 3

1. Jelaskan tentang teori konvolusi !
2. Lakukanlah proses konvolusi untuk citra f(x,y) di bawah ini yang berukuran 5 x 5 dan sebuah kernel mask yang berukuran 3 x 3 yang masing-masing adalah sebagai berikut:

$$f(x,y)=\begin{bmatrix}4&4&3&5&4\\6&6&5&5&2\\5&6&6&6&2\\6&7&5&5&3\\3&5&2&4&4\end{bmatrix} \text{ dan } g(x,y)=\begin{bmatrix}0&-1&0\\-1&5&-1\\0&-1&0\end{bmatrix}$$

3. Jelaskan perbedaan teori konvolusi dengan transformasi Fourier!