BAHAN AJAR TERSELEKSI

MATEMATIKA DISKRIT
TIS3233

HARISON, S.Pd,M.Kom
NIDN:1020098602

JURUSAN TEKNIK INFORMATIKA
FAKULTAS TEKNOLOGI INDUSTRI

INSTITUT TEKNOLOGI PADANG
AGUSTUS 2013

HALAMAN PENGESAHAN
BAHAN AJAR TERSELEKSI
TAHUN 2013

1. Mata Kuliah		: Matematika Diskrit
2. Pengusul		
	a. Nama	: Harison, S.Pd, M.Kom
	b. Jenis Kelamin	: Laki-laki
	c. NIDN	: 1020098602
	d. Pangkat/ golongan	: Staf Pengajar
	e. Jabatan Fungsional	: -
	f. Fakultas/Jurusan	: Teknologi Industri/ Teknik Informatika
	Alamat	: Gerry Permai Blok F No 23 Lubuk Buaya Padang
	Telepon/email	: 0852 7126 7422/ sonajo226@yahoo.co.id

Padang 18 September 2013

Mengetahui
Ketua Jurusan

Pengusul,

Busran, S.Pd, MT
NIDN: 1013087202

Harison, S.Pd, M.Kom
NIDN : 1020098602

DAFTAR ISI

RENCANA PROGRAM DAN KEGIATAN PEMBELAJARAN SEMESTER (RPKPS)

RENCANA PEMBELAJARAN

1.Nama Mata Kuliah : Matematika Diskrit
2. Kode/ SKS :TIS3233/ 3 SKS
3. Semester : 3
4. Sifat mata kuliah : Wajib
5. Prasyarat : Tidak ada
6. Deskripsi Singkat Mata Kuliah:

Mata kuliah ini akan memberikan pengetahuan tentang konsep dasar teori perkembangan ilmu computer.

Mata kuliah ini diberikan pada semester 3 dan bersifat wajib bagi seluruh mahasiswa jurusan Tekinik Informatika.

7. Tujuan pembelajaran:
   a. Memperkenalkan dasar-dasar logika, serta beberapa jenis materi matematika diskrit yang mendukung tentang teori ilmu computer.
   b. Menjelaskan keterkaitan mata kuliah matematika diskrit mata kuliah yang lainya antara lainnya, struktur data, kecerdasan buatan, database, pemograman.
   c. Memberikan motivasi dan kesempatan kepadamahasiswa untuk mempelajari matematika diskrit.
8. outcome pembelajaran
   a. Knowledge and understanding
      1) Mengerti dan memahami konsep dasar matematika diskrit yakni: dasar-dasar logika, kalimat berkuantor, metode pembuktian, himpunan, fungsi, kombinatorial
      2) Mahasiswa termotivasi dan mampu mengikuti perkuliahan dengan baik.
      3) Mahasiswa mengerti bidang-bidang penelitian yang berkaitan dengan matematika diskrit.
   b. Intellectual Skills
      1) Mahasiswa mampu menjelaskan konsep teori matematika diskrit.
      2) Mahasiswa mampu menganalisis dan mencari cara pemecahan terhadap berbagai persoalan yang ada dalam konsep dasar matematika diskrit.
   c. Practical Skills

      Practical skills akan didapatkan mahasiswa melalui pembuatan tugas-tugas latihan yang dikerjakan mahasiswa.
   d. *Managerial Skills and Attitude*

1) Mahasiswa dapat mempergunakan teori matematika diskrit dalam aplikasi dalam mata kuliah lain atau dalam persoalan ilmu computer.
2) Mahasiswa memdapatkan pengalaman bekerja dalam kelompok untuk tujuan yang sama
3) Mahasiswa memdapatkan pengalaman untuk maju kedepan menjelaskan pada mahasiswa lain serta memimpin kelas, berdiskursi mengemukan pendapat tentang materi perkuliahan.

9. Materi Pembelajaran

4. Pendahuluan
    1.11. Dasar-dasar Logika
    1.12. Kalimat deklaratif
    1.13. Penghubung kalimat
    1.14. Tautology dan kontradiksi
    1.15. Konver, invers dan kontraposisi
    1.16. Disjungsi exclusive
    1.17. Proposisi bersyarat
    1.18. Varian Proposisi bersyarat
    1.19. Bikondisional (Bi-Implikasi)
    1.20. Argument Valid dan tidak valid
5. Metode Pembuktian
    4.1. Petunjuk umum dalam pembuktian
    4.2. Metode pembuktian langsung
    4.3. Metode pembuktian tidak langsung
        4.3.1. Pembuktian dengan kontradiktif
        4.3.2. Pembuktian dengan kontraposisi
        4.3.3. Memilih metoda pembuktian
6. Teori Himpunan
    11.1. Dasar-dasar teori himpunan
        11.1.1. Menyatakan himpunan
        11.1.2. Diagram venn
        11.1.3. Himpunan bagian dan kesamaan himpunan
        11.1.4. Semesta pembicaraan dan himpunan kosong
    11.2. Operasi-operasi pada himpunan
    11.3. Pembuktian pembuktian himpunan

11.4. Himpunan kuasa

11.5. Prinsip dualitas

11.6. Prinsip insclusi dan exclusi

11.7. Partisi

11.8. Himpunan ganda

11.9. Pembuktian proposisi perihal himpunan

11.10. Konsep Fungsi

11.10.1. Jenis-jenis fungsi

11.10.2. Fungsi insver

11.10.3. Komposisi dua fungsi

12. Induksi matematik Rekursi

12.1. Konsep induksi matematik

12.1.1. Metode pembuktian dengan induksi matematik

12.1.2. Konsep induksi kuat

12.1.3. Metode pembuktian induksi kuat

12.1.4. Penggunaan induksi kuat pada komputasi geometri

12.1.5. Pembuktian dengan property well ordering

12.2. Fungsi Rekursi

12.2.1. Himpunan rekursi dan struktur

12.2.2. Struktur induksi

12.2.3. Generalisasi induksi

12.2.4. Algoritma induksi

12.2.5. Pembuktian kebenaran Algoritma induksi

12.2.6. Rekursi dan iterasi

13. Kombinasi

13.1. Dasar-dasar perhitungan

13.1.1. Aturan penjumlahan

13.1.2. Aturan perkalian

13.1.3. Peerhitungan tak langsung

13.1.4. Korespondensi satu-satu

13.2. Kombinasi Dan Pemutasian

13.2.1. Factorial

13.2.2. Kombinasi

13.2.3. Permutasi

13.2.4. Kombinasi dan pemutasi dengan elemen berulang

13.3. Koefesien Binomial

13.3.1. Indentitas-identitas dalam kombinasi dan permutasi

14. Relasi

14.1. Defenisi relasi dan notasi

14.2. Relasi pada himpunan

14.3. Sifat-sifat relasi

14.4. Operasi pada relasi

14.4.1. Irisan dan gabungan

14.4.2. Komposisi dua relasi

14.5. Jenis-jenis relasi

14.6. Relasi ekivalen

15. Teory Graf

15.1. Dasar-dasar Graf

15.2. Graf tak berarah

15.3. Graf bipartite

15.4. Komplemen Graf

15.5. Sub Graf

15.6. Sirkuit

15.7. Graf berararh

10. jadual Kegiatan mIngguan

Tabel kegiatan Mingguan

Minggu Ke	Topic (Pokok Bahasan)	Metode pembelajaran	Waktu (menit)	media
1	1. Pendahuluan 1.1. Dasar-dasar Logika 1.2. Kalimat deklaratif 1.3. Penghubung kalimat	Ceramah, Diskusi kelas	1x3x50	Laptop, LCD,Papan Tulis, spidol, modul

2	4. Tautology dan kontradiksi 5. Konver, invers dan kontraposisi 6. Disjungsi exclusive 7. Proposisi bersyarat	Ceramah, Diskusi kelas	1x3x50	Laptop, LCD,Papan Tulis, spidol, modul
3	1.8. Varian Proposisi bersyarat 1.9. Bikondisional (Bi-Implikasi) 1.10. Argument Valid dan tidak valid	Ceramah, Diskusi kelas	1x3x50	Laptop, LCD,Papan Tulis, spidol, modul
4	Metode Pembuktian 2.1. Petunjuk umum dalam pembuktian 2.2. Metode pembuktian langsung 2.3. Metode pembuktian tidak langsung 2.4. Pembuktian dengan kontradiktif 2.5. Pembuktian dengan kontraposisi 2.6. Memilih metoda pembuktian	Ceramah, Diskusi kelas	1x3x50	Laptop, LCD,Papan Tulis, spidol, modul
5	3Teori Himpunan 3.1 Dasar-dasar teori himpunan 3.2 Menyatakan himpunan 3.3 Diagram venn 3.4Himpunan bagian dan kesamaan himpunan 3.5Semesta pembicaraan dan himpunan kosong	Ceramah, Diskusi kelas	1x3x50	Laptop, LCD,Papan Tulis, spidol, modul
6	3.6. Operasi-operasi pada himpunan 3.7. Pembuktian pembuktian	Ceramah, Diskusi kelas	1x3x50	Laptop, LCD,Papan Tulis, spidol, modul

	himpunan 3.8. Himpunan kuasa 3.9. Prinsip dualitas 3.10. Prinsip insclusi dan exclusi 3.11. Partisi			
7	3.12. Himpunan ganda 3.13. Pembuktian proposisi perihal himpunan 3.14. Konsep Fungsi 3.14.1. Jenis-jenis fungsi 3.14.2. Fungsi insver 3.14.3. Komposisi dua fungsi	Ceramah, Diskusi kelas	1x3x50	Laptop, LCD,Papan Tulis, spidol, modul
8	UTS			
9	4. Induksi matematik Rekursi 4.1. Konsep induksi matematik 4.1.1. Metode pembuktian dengan induksi matematik 4.1.2. Konsep induksi kuat 4.1.3. Metode pembuktian induksi kuat 4.1.4. Penggunaan induksi kuat pada komputasi geometri 4.1.5. Pembuktian dengan property well ordering	Ceramah, Diskusi kelas	1x3x50	Laptop, LCD,Papan Tulis, spidol, modul
10	4.2. Fungsi Rekursi 4.2.1. Himpunan rekursi dan struktur 4.2.2. Struktur induksi 4.2.3. Generalisasi induksi	Ceramah, Diskusi kelas	1x3x50	Laptop, LCD,Papan Tulis, spidol, modul

	4.2.4. Algoritma induksi 4.2.5. Pembuktian kebenaran Algoritma induksi 4.2.6. Rekursi dan iterasi			
11	5. Kombinasi 5.1. Dasar-dasar perhitungan 5.1.1. Aturan penjumlahan 5.1.2. Aturan perkalian 5.1.3. Peerhitungan tak langsung 5.1.4. Korespondensi satu-satu	Ceramah, Diskusi kelas	1x3x50	Laptop, LCD,Papan Tulis, spidol, modul
12	5.2. Kombinasi Dan Pemutasian 5.2.1. Factorial 5.2.2. Kombinasi 5.2.3. Permutasi 5.2.4. Kombinasi dan pemutasi dengan elemen berulang 5.3. Koefesien Binomial 5.3.1. Indentitas-identitas dalam kombinasi dan permutasi	Ceramah, Diskusi kelas	1x3x50	Laptop, LCD,Papan Tulis, spidol, modul
13	6. Relasi 6.1. Defenisi relasi dan notasi 6.2. Relasi pada himpunan 6.3. Sifat-sifat relasi 6.4. Operasi pada relasi	Ceramah, Diskusi kelas	1x3x50	Laptop, LCD,Papan Tulis, spidol, modul
14	6.5. Irisan dan gabungan 6.6. Komposisi dua relasi 6.7. Jenis-jenis relasi	Ceramah, Diskusi kelas	1x3x50	Laptop, LCD,Papan Tulis, spidol, modul

	6.8. Relasi ekivalen			
15	7. Teory Graf 7.1. Dasar-dasar Graf 7.2. Graf tak berarah 7.3. Graf bipartite 7.4. Komplemen Graf 7.5. Sub Graf 7.6. Sirkuit 7.7. Graf berararh	Ceramah, Diskusi kelas	1x3x50	Laptop, LCD,Papan Tulis, spidol, modul
16	UJIAN AKHIR SEMESTER			

11. Evaluasi hasil pembelajaran

Evaluasi hasil pembelajaran pada matakuliah matematika diskrit dilakukan dengan berbagai macam cara sebagai berikut:

1) Penilaian terhadap tugas dan kuis
2) Penilaian terhadap interaksi mahasiswa dikelas
3) Ujian tengah semester
4) Ujian akhir semester

Pembobotan komponen penilaian

Komponen	Bobot
Tugas & kuis	30
Interaksi dikelas	10
UTS	30
UAS	30

Ketentuan skor untuk penilaian akhir

No	Nilai Mahasiswa	Rentang skor
1	A	80-100
2	B	65-79
3	C	55-64

4	D	45-64
5	E	< 45

12. Bahan, sumber informasi dan referensi

Sumber informasi

1) Konsultasi langsung/ emai
2) Buku cetak, internet

Referensi

1) Jong jek siang, Matemtika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer,andi offset, Yogyakarta.2009
2) Rinaldi Munirm, Matematika diskrit, Informatika Bandung.2003

SATUAN ACARA PENGAJARAN
(SAP)

Mata Kuliah	: Matematika Diskrit
Kode	: TIS 4223
Semester	: III
Waktu	: 3 x 50 Menit
Pertemuan	: 1, 2 dan 3

A. Kompetensi
   1. Utama
      Mahasiswa dapat memahami tentang konsep dasar logika dan penentuan kesimpulan.
   2. Pendukung
      Mahasiswa dapat mengetahui tentang jenis-jenis konsep logika

B. Pokok Bahasan
   Pengantar Konsep dasar logika

C. Sub Pokok Bahasan
   1. Logika proposional dan ekuvalen
   2. Konsep predikat dan quantifier pada proposisi
   3. Konsep aturan penentuan kesimpulan
   4. Konsep aturan penentuan kesimpulan untuk pernyataan quantified dan penggunaanya
   5. Kesalahan dalam penentuan kesimpulan

D. Kegiatan Belajar Mengajar

Tahapan Kegiatan	Kegiatan Pengajaran	Kegiatan mahasiswa	Media & Alat Peraga
Pendahuluan	1. Menjelaskan perkuliahan yang akan dijalani satu semester. 2. Menjelaskan materi-materi perkuliahan dan	Memdengarkan dan memberikan komentar	Laptop, LCD, Papan tulis, Spidol

	buku-buku acuan yang akan digunakan dalam satu semester ini.		
Penyajian	1. Menjelaskan tentang Konsep dasar logika 2. Logika proposional dan ekuvalen 3. Konsep predikat dan quantifier pada proposisi 4. Konsep aturan penentuan kesimpulan 5. Konsep aturan penentuan kesimpulan untuk pernyataan quantified dan penggunaanya 6. Kesalahan dalam penentuan kesimpulan	Memperthatikan, merespon, memcatat dan memberikan komentar, mengajukan pertanyaan	Laptop, LCD, Papan tulis, Spidol, modul mingguan
Penutup	1. Mengajukan pertanyaan pada mahasiswa 2. Memberikan kesimpulan 3. Memberikan latihan tertulis dan diperiksa	Memperthatikan, memcatat dan memberikan komentar, mengajukan pertanyaan, mengerjakan latihan	Laptop, LCD, Papan tulis, Spidol, buku tulis, buku cetak

dikelas

4. Mengingatkan akan

kewajiban untuk

pertemuan selanjutnya

E. Evaluasi

Evaluasi dilakukan dengan cara memberikan pertanyaan langsung dan memberikan latihan tertulis pada satu jam terakhir

F. Daftar Pustaka

Referensi

3) Jong jek siang, Matemtika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer,andi offset, Yogyakarta.2009

4) Rinaldi Munirm, Matematika diskrit, Informatika Bandung.2003

RENCANA KEGIATAN BELAJAR MINGGUAN

(RKBM)

Mata Kuliah	: Matematika Diskrit
Kode	: TIS 4223
Semester	: III
Waktu	: 3 x 50 Menit
Pertemuan	: 1,2&3

Minggu Ke-	TOPIK	METODE PEMBELAJARAN	Estmasi Waktu (menit)	Media & Alat Peraga
1	Pengertian dan pemahaman 1. Kontrak perkuliahan 2. kegunaan Matematika Diskrit dalam kuliah ilmu komputer, 3. materi yg digunakan dalam matematika Diskrit 4. matematika Diskrit dan perbedaannya dengan kontinyu 5. tujuan kuliah matematika diskrit 6. Dasar-dasar Logika 7. Kalimat deklaratif 8. Penghubung kalimat	Ceramah/ Orasi, penjelasan dengan papan tulis dan diskusi kelas	1 x 3 x 50	Laptop, LCD, Papan tulis, Spidol, modul
2	8. Tautology dan			

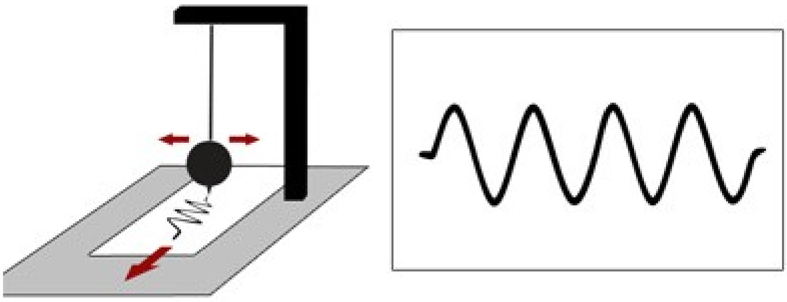
kontradiksi

9. Konver, invers dan kontraposisi
10. Disjungsi exclusive
11. Proposisi bersyarat

1. Varian Proposisi bersyarat
2. Bikondisional (Bi-Implikasi)
3. Argument Valid dan tidak valid

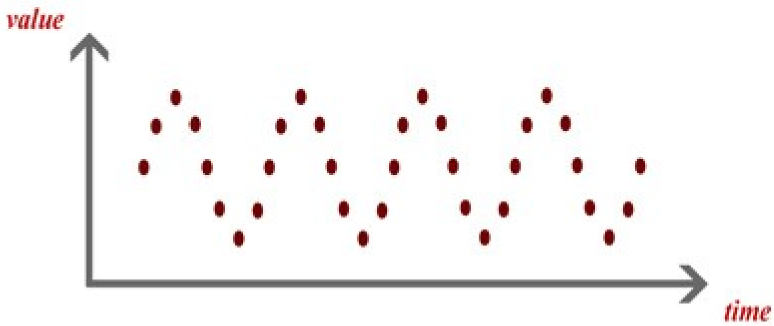
1. Pengantar Matematika diskrit

Matematika diskrit adalah cabang matematika yang mempelajari obyek diskrit. Diskrit adalah obyek yang berhingga yang berlainan. Konsep obyek diskrit berkebalikan dengan obyek kontinyu. Obyek kontinyu mengambil data secara terus menerus. Bila data yang diambil berupa grafik, akan diperoleh grafik yang cenderung halus dan berkelanjutan (*kontinyu*), seperti dihasilkan uji pendulum yang ditunjukkan pada gambar Matdis1-1.



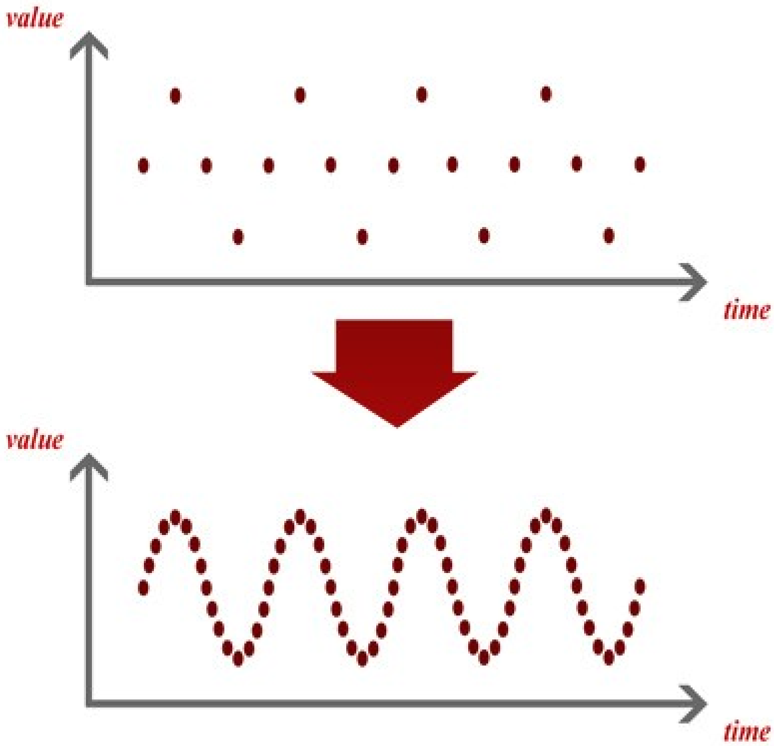
Gambar Matdis1-1. *Sinyal Kontinyu pada uji pendulum*
(Sumber: http://zenosphere.wordpress.com/2013/5/22/filosofi-kurva-diskrit/)

Bila pergerakan pendulum diukur dengan komputer secara diskrit, data diambil oleh sensor-sensor tiap satuan waktu tertentu dan selanjutnya dikonversi menjadi sinyal digital. Pergerakan pendulum dan waktunya dicacah (*sampling*) tergantung frekuensi prosesor dan besarnya memori. Pencacahan itu mengakibatkan data hasil konversi ikut menjadi diskrit (terputus-putus) seperti ditunjukkan pada gambar Matdis1-2. Sementara dalam pengukuran analog secara kontinyu, pembatasan oleh prosesor dan memori itu tidak terjadi. Dalam proses tersebut akan terjadi rugi-rugi (*corrupt*) pada data yang tak teramati.



Gambar Matdis1-2. *Sinyal diskrit yang dihasilkan oleh pengolahan komputer digital*
(Sumber: http://zenosphere.wordpress.com/2013/5/22/filosofi-kurva-diskrit/)

Untuk mengatasi permasalahan rugi-rugi data dalam jumlah besar, serta meminimalkan kesalahan informasi yang ditampilkan pada perangkat *output*, pencacahan harus dilakukan dalam rentang waktu serapat mungkin. Pada kasus pengukuran melalui komputer, semakin tinggi spesifikasi prosesor dan memori, akan menghasilkan grafik yang lebih halus dengan kerapatan yang semakin tinggi pula. Perhatikan ilustrasi pada Gambar Matdis1-3.



Gambar Matdis1-3. *Sinyal diskrit dengan kerapatan* sampling *yang berbeda (Sumber: http://zenosphere.wordpress.com/2013/5/22/filosofi-kurva-diskrit/)*

Bila Komputer digital bekerja secara diskrit begitu pula informasi yang disimpan dan dimanipulasi oleh komputer-pun adalah dalam bentuk diskrit. Matematika diskrit merupakan ilmu dasar yang penting dalam pendidikan informatika atau ilmu komputer. Matematika diskrit memberikan landasan matematis untuk mata kuliah lain dibidang teknik informatika, misalnya: algoritma, struktur data, basis data, jaringan komputer, keamanan komputer, sistem operasi, teknik kompilasi, dsb. Matematika diskrit bertujuan untuk memberikan dasar-dasar dan konsep-konsep matematika yang mendukung sistem digital dan komputer.

Bahasan Mata Kuliah Matematika Diskrit antara lain:

1. Pendahuluan matematika diskrit
2. Logika

3. Teori Himpunan
4. Relasi dan Fungsi
5. Algoritma
6. Matriks (Matrix) dan Komputasi
7. Induksi Matematika
8. Barisan dan Deretan
9. Penalaran Matematika
10. Pencacahan (Counting)
11. Teori Peluang Diskrit
12. Graf
13. Diagram Pohon (Tree)

MATERI :

2.*Logika*

- Logika merupakan dasar dari semua penalaran (*reasoning*).
- Penalaran didasarkan pada hubungan antara pernyataan (*statements*).
- Definisi: Suatu pernyataan adalah suatu kalimat yang menyatakan sesuatu, yang dapat diberi satu dan dua kemungkinan nilai kebenaran, yaitu benar atau salah.
- Definisi: Kalimat terbuka adalah kalimat yang memuat variabel. Menjadi pernyataan apabila variabelnya diganti oleh suatu anggota semesta pembicaraan.
-

3. Proposisi

- Pernyataan atau kalimat deklaratif yang bernilai benar (*true*) atau salah (*false*), tetapi tidak keduanya.
- ***"kerbau lebih besar daripada keledai."***

  Apakah ini sebuah pernyataan? YA

  Apakah ini sebuah proposisi? YA

  Apakah nilai kebenaran dari proposisi ini?

  "w > 9"

  Apakah ini sebuah pernyataan? YA

  Apakah ini sebuah proposisi? TIDAK

Nilai kebenaran dari pernyataan tersebut bergantung pada W, tapi nilainya belum ditentukan. Pernyataan jenis ini kita sebut sebagai **fungsi proposisi** atau **kalimat terbuka**.

"Sekarang tahun 2013 dan 10 < 12."

Apakah ini sebuah pernyataan? YA

Apakah ini sebuah proposisi? YA

Apakah nilai kebenaran dari proposisi ini? YA

"Tolong untuk tidak Makan selama kuliah"

Apakah ini sebuah pernyataan? TIDAK

Ini adalah sebuah permintaan.

Apakah ini sebuah proposisi? TIDAK

Hanya pernyataanlah yang bisa menjadi proposisi.

"w < v jika dan hanya jika v > w."

Apakah ini pernyataan ? YA

Apakah ini proposisi ? YA

… karena nilai kebenarannya tidak bergantung harga spesifik x maupun y.

Apakah nilai kebenaran dari proposisi ini ? BENAR

Contoh 1. Semua pernyataan di bawah ini adalah proposisi:

(a) 15 adalah bilangan ganjil

(b) Obama pernah tinggal di jakarta

(c) $2 + 2 = 2$

(d) $4 \geq$ akar kuadrat dari $4 + 4$

(e) Ada oksigen dibulan di bulan

(f) Hari ini adalah hari raya islam

(g) Untuk sembarang bilangan bulat $n \geq 0$, maka $2n$ adalah bilangan genap

(h) $x + y = y + x$ untuk setiap x dan y bilangan riil

Contoh 2. Semua pernyataan di bawah ini bukan proposisi

(a) Jam berapa Lion tiba di BIM?

(b) Isilah piring tersebut dengan nasi dan lauk!

(c) $y + 5 = 10$

(d) $v > 7$ ■

Kesimpulan: Proposisi adalah kalimat berita

Proposisi dilambangkan dengan huruf kecil p, q, r, ….

Contoh:

p : 15 adalah bilangan ganjil.

q : Mr Yahya adalah alumnus UKM.

r : $4 + 4 = 8$

4. Mengkombinasikan Proposisi

- Misalkan p dan q adalah proposisi.

  1. **Konjungsi** (*conjunction*): p dan q

  Notasi $p \wedge q$,

  2. **Disjungsi** (*disjunction*): p atau q

  Notasi: $p \vee q$

  3. **Ingkaran** (*negation*) dari p: tidak p

  Notasi: $\sim p$

  p dan q disebut **proposisi atomik**

  Kombinasi p dengan q menghasilkan **proposisi majemuk** (*compound proposition)*

  Contoh 3. Diketahui proposisi-proposisi berikut:

  p : Hari ini gerimis

  q : Murid-murid sekolah banyak yang basah

  $p \wedge q$: Hari ini gerimis dan Murid-murid sekolah banyak yang basah

  $p \vee q$: Hari ini gerimis atau Murid-murid sekolah banyak yang basah

  $\sim p$: Tidak benar hari ini gerimis (atau: Hari ini *tidak* gerimis)

Contoh 4. Diketahui proposisi-proposisi berikut:

p : perempuan itu tinggi

q : perempuan itu manis

Nyatakan dalam bentuk simbolik:

(a) Perempuan itu tinggi dan manis

(b) Perempuan itu tinggi tapi tidak manis

(c) Perempuan itu tidak tinggi maupun manis

(d) Tidak benar bahwa perempuan itu pendek atau tidak manis

(e) Perempuan itu tinggi, atau pendek dan manis

(f) Tidak benar bahwa perempuan itu pendek maupun tampan

<u>Penyelesaian</u>:

(a) $p \wedge q$

(b) $p \wedge \sim q$

(c) $\sim p \wedge \sim q$

(d) $\sim(\sim p \vee \sim q)$

(e) $p \vee (\sim p \wedge q)$

(f) $\sim(\sim p \wedge \sim q)$

Tabel Kebenaran

p	q	p^q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	pvq
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

P	-q
T	F
F	T

Contoh 5. Misalkan

p : 7 adalah bilangan prima (benar)
q : bilangan prima selalu ganjil (salah)

$p \wedge q$: 7 adalah bilangan prima dan bilangan prima selalu ganjil (salah)

Contoh 6. Bentuklah tabel kebenaran dari proposisi majemuk $(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$.

p	q	r	$p \wedge q$	$\sim q$	$\sim q \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$
T	T	T	T	F	F	T
T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F	F
F	T	F	F	F	F	F
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	F	F

- Proposisi majemuk disebut **tautologi** jika ia benar untuk semua kasus

- Proposisi majemuk disebut **kontradiksi** jika ia salah untuk semua kasus.

Contoh 7. $p \vee \sim(p \wedge q)$ adalah sebuah tautology

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$p \vee \sim(p \wedge q)$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

Contoh 8. $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$ adalah sebuah kontradiksi

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	T	F

Dua buah proposisi majemuk, $P(p, q, ..)$ dan $Q(p, q, ..)$ disebut **ekivalen** secara logika jika keduanya mempunyai tabel kebenaran yang identik.

Notasi: $P(p, q, \ldots) \Leftrightarrow Q(p, q, \ldots)$

Contoh 9. Hukum De Morgan: $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$.

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	F	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	T
F	T	T	T	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T

5. Hukum-hukum Logika

Disebut juga **hukum-hukum aljabar proposisi**.

1. Hukum identitas:	2. Hukum *null*/dominasi:
– $p \vee \mathbf{F} \Leftrightarrow p$ – $p \wedge \mathbf{T} \Leftrightarrow p$	– $p \wedge \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}$ – $p \vee \mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{T}$

3. Hukum negasi: – $p \vee \sim p \Leftrightarrow \mathbf{T}$ – $p \wedge \sim p \Leftrightarrow \mathbf{F}$	4. Hukum idempoten: – $p \vee p \Leftrightarrow p$ – $p \wedge p \Leftrightarrow p$
5. Hukum involusi (negasi ganda): – ~(~p) $\Leftrightarrow p$	6. Hukum penyerapan (absorpsi): – $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ – $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

7. Hukum komutatif: – $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ – $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	8. Hukum asosiatif: – $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ – $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
9. Hukum distributif: – $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ – $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	10. Hukum De Morgan: – $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ – $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

Contoh 10. Tunjukkan bahwa $p \vee \sim(p \vee q)$ dan $p \vee \sim q$ keduanya ekivalen secara logika.

Penyelesaian:

$p \vee \sim(p \vee q\ ) \Leftrightarrow p \vee (\sim p \wedge \sim q)$ (Hukum De ogran)

$\Leftrightarrow (p \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q)$ (Hukum distributif)

$\Leftrightarrow \mathrm{T} \wedge (p \vee \sim q)$ (Hukum negasi)

$\Leftrightarrow p \vee \sim q$ (Hukum identitas)

Contoh 11. Buktikan hukum penyerapan: $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

Penyelesaian:

$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee \mathrm{F}) \wedge (p \vee q)$ (Hukum Identitas)

$\Leftrightarrow p \vee (\mathrm{F} \wedge q)$ (Hukum distributif)

$\Leftrightarrow p \vee \mathrm{F}$ (Hukum *Null*)

$\Leftrightarrow p$ (Hukum Identitas)

Contoh 11. Buktikan hukum penyerapan: $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

Penyelesaian:

$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee \mathrm{F}) \wedge (p \vee q)$ (Hukum Identitas)

$\Leftrightarrow p \vee (\mathrm{F} \wedge q)$ (Hukum distributif)

$\Leftrightarrow p \vee \mathrm{F}$ (Hukum *Null*)

$\Leftrightarrow p$ (Hukum Identitas)

Diberikan pernyataan "Tidak benar bahwa dia belajar basis datatetapi tidak belajar Matematika diskrit".

(a) Nyatakan pernyataan di atas dalam notasi simbolik (ekspresi logika)

(b) Berikan pernyataan yang ekivalen secara logika dengan pernyataan tsb (Petunjuk: gunakan hukum De Morgan)

Penyelesaian Soal Latihan 1

Misalkan

p : Dia belajar basis data

q : Dia belajar Matematika diskrit

maka,

(a) $\sim (p \wedge \sim q)$

(b) $\sim (p \wedge \sim q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$ (Hukum De Morgan)

dengan kata lain: "Dia tidak belajar algoritma atau belajar Matematika diskrit"

***6.Disjungsi* EkIsklusif**

Kata "atau" (*or*) dalam operasi logika digunakan dalam salah satu dari dua cara:

1. Inclusive or

"atau" berarti "*p* atau *q* atau keduanya"

Contoh: "operator mesin yang dibutuhkan menguasai Bahasa inggris atau cara kerja nya".

2. Exclusive or

"atau" berarti "*p* atau *q* tetapi bukan keduanya".

Contoh: " mereka harus buat surat perjanjian atau mereka dikeluarkan dari kampus" "Ia dihukum 5 tahun atau denda 10 juta".

Operator logika disjungsi eksklusif: *xor*

Notasi: $\oplus$

Tabel kebenaran:

p	q	p⊕q
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

7. Proposisi Bersyarat (kondisional atau implikasi)

- Bentuk proposisi: "jika *p*, maka *q*"
- Notasi: $p \rightarrow q$

- Proposisi p disebut **hipotesis**, **antesenden**, **premis**, atau **kondisi**
- Proposisi q disebut **konklusi** (atau **konsekuen**).
- **Contoh 12.**

  a. ”Jika saya kalah maka saya akan segera dipulangkan” Jika saya lulus ujian, maka saya mendapat hadiah dari ayah”

  b. “Jika gempa kekuatan 8 sr maka air pantai akan surut” Jika suhu mencapai 80°C, maka *alarm* akan berbunyi”

  c. ”jika anda tidak terdaftar di Kpu maka anda tidak ikut pemilu” Jika anda tidak mendaftar ulang, maka anda dianggap mengundurkan diri”

Cara-cara mengekspresikan implikasi $p \to q$:

- Jika p, maka q
- Jika p, q
- p mengakibatkan q (*p implies q*)
- q jika p
- p hanya jika q
- p syarat cukup untuk q (hipotesis menyatakan **syarat cukup** (*sufficient condition*))
- q syarat perlu untuk p (konklusi menyatakan **syarat perlu** (*necessary condition*))
- q bilamana p (*q whenever p*)

Contoh 13. Proposisi-proposisi berikut adalah implikasi dalam berbagai bentuk:

1. “jika hari panas makan hewan ternak akan cepat kehausan” Jika hari hujan, maka tanaman akan tumbuh subur”.
2. Jika rem mobil ditekan maka mobil akan melambat” Jika tekanan gas diperbesar, mobil melaju kencang.
3. Gunung merapi yang meletus magakibatkan Turun debu panas” pasir di sungai Es yang mencair di kutub mengakibatkan permukaan air laut naik.
4. Anjing itu berhenti menggongong jika diberi makanab” Orang itu mau berangkat jika ia diberi ongkos jalan.

1. Yani bisa melanjutkan kuliah hanya jika ia lulus SMA” Ahmad bisa mengambil matakuliah Teori Bahasa Formal hanya jika ia sudah lulus matakuliah Matematika Diskrit.

2. Syarat cukup agar lulus matematika diskrit adalah masuk terus” Syarat cukup agar pom bensin meledak adalah percikan api dari rokok.
3. Syarat perlu bagi bangsa indonesia maju adalah disiplin” Syarat perlu bagi Indonesia agar ikut Piala Dunia adalah dengan mengontrak pemain asing kenamaan.
4. Pemanasan bumi terjadi bilamana hutan tidak lindungi” Banjir bandang terjadi bilamana hutan ditebangi.

Contoh 14. Ubahlah proposisi c sampai h pada Contoh 13 di atas ke dalam bentuk proposisi “jika p maka q”

Penyelesaian:

(c) Jika es mencair di kutub, maka permukaan air laut naik.

(d) Jika orang itu diberi ongkos jalan, maka ia mau berangkat.

(e) Jika Ahmad mengambil matakuliah Teori Bahasa Formal, maka ia sudah lulus matakuliah Matematika Diskrit.

(f) Pernyataan yang diberikan ekivalen dengan “Percikan api dari rokok adalah syarat cukup untuk membuat pom bensin meledak” atau “Jika api memercik dari rokok maka pom bensin meledak”

(g) Pernyataan yang diberikan ekivalen dengan *“Mengontrak pemain asing kenamaan adalah syarat perlu untuk Indonesia agar ikut Piala Dunia”* atau “Jika Indonesia ikut Piala Dunia maka Indonesia mengontrak pemain asing kenamaan”.

(h) Jika hutan-hutan ditebangi, maka banjir bandang terjadi.

Penjelasan

Ahmad bisa mengambil matakuliah Teori Bahasa Formal hanya jika ia sudah lulus matakuliah Matematika Diskrit.

Ingat: $p \rightarrow q$ **dapat dibaca** p hanya jika q

p : Ahmad bisa mengambil matakuliah Teori Bahasa Formal

q : Ahmad sudah lulus matakuliah Matematika Diskrit.

Notasi standard: Jika p, maka q

Jika Ahmad mengambil matakuliah Teori Bahasa Formal maka ia sudah lulus matakuliah Matematika Diskrit.

Contoh 15. Misalkan

x : Anda berusia 17 tahun
y : Anda dapat memperoleh SIM

Nyatakan preposisi berikut ke dalam notasi implikasi:

(a) Hanya jika anda berusia 17 tahun maka anda dapat memperoleh SIM.
(b) Syarat cukup agar anda dapat memperoleh SIM adalah anda berusia 17 tahun.
(c) Syarat perlu agar anda dapat memperoleh SIM adalah anda berusia 17 tahun.
(d) Jika anda tidak dapat memperoleh SIM maka anda tidak berusia 17 tahun.
(e) Anda tidak dapat memperoleh SIM bilamana anda belum berusia 17 tahun.

Contoh 15. Misalkan

x : Anda berusia 17 tahun
y : Anda dapat memperoleh KTP

Nyatakan preposisi berikut ke dalam notasi implikasi:

(a) Hanya jika anda berusia 17 tahun maka anda dapat memperoleh KTP.
(b) Syarat cukup agar anda dapat memperoleh KTP adalah anda berusia 17 tahun.
(c) Syarat perlu agar anda dapat memperoleh KTP adalah anda berusia 17 tahun.
(d) Jika anda tidak dapat memperoleh KTP maka anda tidak berusia 17 tahun.
(e) Anda tidak dapat memperoleh KTP bilamana anda belum berusia 17 tahun.

Penyelesaian:

(a) Pernyataan yang ekivalen: *"Anda dapat memperoleh SIM hanya jika anda berusia 17 tahun"*.
Ingat: $p \rightarrow q$ bisa dibaca "p hanya jika q".
Notasi simbolik: $y \rightarrow x$.

(b) Pernyataan yang ekivalen: *"Anda berusia 17 tahun adalah syarat cukup untuk dapat memperoleh SIM"*. Ingat: $p \rightarrow q$ bisa dibaca "p syarat cukup untuk q".
Notasi simbolik: $x \rightarrow y$.

(c) Pernyataan yang ekivalen: *"Anda berusia 17 tahun adalah syarat perlu untuk dapat memperoleh SIM"*.
Ingat: $p \rightarrow q$ bisa dibaca "q syarat perlu untuk q".
Notasi simbolik: $y \rightarrow x$.

(d) $\sim y \rightarrow \sim x$

(e) Ingat: $p \rightarrow q$ bisa dibaca "q bilamana p".
Notasi simbolik: $\sim x \rightarrow \sim y$.

Penyelesaian:

(f) Pernyataan yang ekivalen: *"Anda dapat memperoleh KTP hanya jika anda berusia 17 tahun"*.
Ingat: $p \rightarrow q$ bisa dibaca "p hanya jika q".
Notasi simbolik: $y \rightarrow x$.

(g) Pernyataan yang ekivalen: *"Anda berusia 17 tahun adalah syarat cukup untuk dapat memperoleh KTP"*. Ingat: $p \rightarrow q$ bisa dibaca "p syarat cukup untuk q".

Notasi simbolik: $x \rightarrow y$.

(h) Pernyataan yang ekivalen: *"Anda berusia 17 tahun adalah syarat perlu untuk dapat memperoleh KTP"*.
Ingat: $p \rightarrow q$ bisa dibaca "q syarat perlu untuk q".
Notasi simbolik: $y \rightarrow x$.

(i) $\sim y \rightarrow \sim x$

(j) Ingat: $p \rightarrow q$ bisa dibaca "q bilamana p".
Notasi simbolik: $\sim x \rightarrow \sim y$.

Tabel kebenaran implikasi

p	Q	p →q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Penjelasan (dengan contoh)

Dosen: "Jika nilai ujian akhir anda 80 atau lebih, maka anda akan mendapat nilai A untuk kuliah ini".
Apakah dosen anda mengatakan kebenaran atau dia berbohong? Tinjau empat kasus berikut ini:

Kasus 1: Nilai ujian akhir anda di atas 80 (hipotesis benar) dan anda mendapat nilai A untuk kuliah tersebut(konklusi benar).
$\therefore$ pernyataan dosen benar.

Kasus 2: Nilai ujian akhir anda di atas 80 (hipotesis benar) tetapi anda tidak mendapat nilai A (konklusi salah).
$\therefore$ dosen berbohong (pernyataannya salah).

Kasus 3: Nilai ujian akhir anda di bawah 80 (hipotesis salah) dan anda mendapat nilai A (konklusi benar).
$\therefore$ dosen anda tidak dapat dikatakan salah (Mungkin ia melihat kemampuan anda secara rata-rata bagus sehingga ia tidak ragu memberi nilai A).

Kasus 4: Nilai ujian akhir anda di bawah 80 (hipotesis salah) dan anda tidak mendapat nilai A (konklusi salah).
$\therefore$ dosen anda benar.

- Perhatikan bahwa dalam implikasi yang dipentingkan nilai kebenaran premis dan konsekuen, bukan hubungan sebab dan akibat diantara keduanya.
- Beberapa implikasi di bawah ini valid meskipun secara bahasa tidak mempunyai makna:

"Jika 1 + 1 = 2 maka Paris ibukota Perancis"

"Jika n bilangan bulat maka hari ini hujan"

Contoh 16. Tunjukkan bahwa $p \to q$ ekivalen secara logika dengan $\sim p \vee q$.

Penyelesaian:

p	q	$\sim p$	$p \to q$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

$\therefore$ "Jika p, maka q" $\Leftrightarrow$ "Tidak p atau q".

Contoh 17. Tentukan ingkaran (negasi) dari $p \to q$.

Penyelesaian:

$$\sim(p \to q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee q) \Leftrightarrow \sim(\sim p) \wedge \sim q \Leftrightarrow p \wedge \sim q$$

Contoh 18. Dua supermarket mengeluarkan iklan jitu untuk menarik pembeli. supermarket pertama mengumbar iklan "beli minyak goreng bimoli 4 kg dapat voucer Rp50.000" sedangkan supermarket kedua mempunyai iklan " belanja Rp 50.000 dapat minyak goreng 4 kg". Apakah kedua moto pedagang tersebut menyatakan hal yang sama?

Penyelesaian:

p : beli minyak goreng 4 kg dapat voucer Rp 50.000
q : belanja Rp 50.000 dapat minyak goreng 4 kg.

iklan supermarket pertama: "Jika beli minyak goreng 4 kg maka dapat voucer Rp 50.000" atau $p \to \sim q$

Moto pedagang kedua: "Jika belanja Rp 50.000 maka dapat minyak goreng 4 kg" atau $q \to \sim p$.

p	q	$\sim p$	-q	$p \to - q$	$p \vee \to \sim q$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

$\therefore p \to \sim q \Leftrightarrow q \to \sim p$.

$\therefore$ Kedua iklan tersebut menyatakan hal yang sama.

Contoh 20

Untuk menerangkan mutu sebuah restoran, misalkan p : Pelayanannya baik, dan q : Tarif kamarnya murah, r : restorannya berbintang tiga.

Terjemahkan proposisi-proposisi berikut dalam notasi simbolik (menggunakan p, q, r):

(a) Tarif restorannya murah, tapi pelayanannya buruk.

(b) Tarif restoranya mahal atau pelayanannya baik, namun tidak keduanya.

(c) Salah bahwa restoran berbintang tiga berarti tarif makananya murah dan pelayanannya buruk.

Penyelesaian:

(a) $q \wedge \sim p$

(b) $\sim q \oplus p$

(c) $\sim (r \rightarrow (q \wedge \sim p))$

Soal Latihan 2

Nyatakan pernyataan berikut:

"Anda tidak dapat terdaftar sebagai pemilih dalam Pemilu jika anda berusia di bawah 17 tahun kecuali kalau anda sudah menikah".

dalam notasi simbolik.

Penyelesaian

Anda tidak dapat terdaftar sebagai pemilih dalam Pemilu jika anda berusia di bawah 17 tahun kecuali kalau anda sudah menikah".

Format: q jika p

Susun ulang ke bentuk standard: Jika p, maka q

Jika anda berusia di bawah 17 tahun, kecuali kalau anda sudah menikah, maka anda tidak dapat terdaftar sebagai pemilih dalam Pemilu

Jika anda berusia di bawah 17 tahun, kecuali kalau anda sudah menikah, maka anda tidak dapat terdaftar sebagai pemilih dalam Pemilu

m : Anda berusia di bawah 17 tahun.

n : Anda sudah menikah.

r : Anda dapat terdaftar sebagai pemilih dalam Pemilu.

maka pernyataan di atas dapat ditulis sebagai:

$(m \wedge \sim n) \rightarrow \sim r$

Latihan: Ubah kalimat ini ke dalam ekspresi logika (notasi simbolik)

1. Anda hanya dapat mengakses internet dari kampus hanya jika anda mahasiswa Informatika atau anda bukan seorang sarjana.

2. Anda tidak dapat menaiki *roller coaster* jika anda tingginya kurang dari 150 cm kecuali jika anda berusia lebih dari 16 tahun.

8. Varian Proposisi Bersyarat

Konvers (kebalikan) : $q \rightarrow p$
Invers : $\sim p \rightarrow \sim q$
Kontraposisi : $\sim q \rightarrow \sim p$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$ *implikasi*	$q \rightarrow p$ konvers	$\sim p \rightarrow \sim q$ *invers*	$\sim q \rightarrow \sim p$ kontraposisi
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

Contoh 21. Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari:

"Jika Amir mempunyai mobil, maka ia orang kaya"

Penyelesaian:

Konvers : Jika Amir orang kaya, maka ia mempunyai mobil

Invers : Jika Amir tidak mempunyai mobil, maka ia bukan orang kaya

Kontraposisi : Jika Amir bukan orang kaya, maka ia tidak mempunyai mobil

Contoh 22. Tentukan kontraposisi dari pernyataan:

(a) Jika dia bersalah maka ia dimasukkan ke dalam penjara.

(b) Jika 6 lebih besar dari 0 maka 6 bukan bilangan negatif.

(c) Iwan lulus ujian hanya jika ia belajar.

(d) Hanya jika ia tdk terlambat maka ia akan mendapat pekerjaan.

(e) Perlu ada angin agar layang-layang bisa terbang.

(f) Cukup hari hujan agar hari ini dingin.

Penyelesaian:

(a) Jika ia tidak dimasukkan ke dalam penjara, maka ia tidak bersalah.

(b) Jika 6 bilangan negatif, maka 6 tidak lebih besar dari 0.

(c) "Jika Iwan lulus ujian maka ia sudah belajar".

Kontraposisi: "Jika Iwan tidak belajar maka ia tidak lulus ujian"

(d) "Jika ia mendapat pekerjaan maka ia tidak terlambat"

Kontraposisi: "Jika ia terlambat maka ia tidak akan mendapat pekerjaan itu"

(e) "Ada angin adalah syarat perlu agar layang-layang bisa terbang" ekivalen dengan "Jika layang-layang bisa terbang maka hari ada angin". Kontraposisi: "Jika hari tidak ada angin, maka layang-layang tidak bisa terbang".

(f) "Hari hujan adalah syarat cukup agar hari ini dingin",

Ekivalen dengan "Jika hari hujan maka hari ini dingin".

Kontraposisi: "Jika hari ini tidak dingin maka hari tidak hujan".

9. Bikondisional **(Bi-*implikasi*)**

- Bentuk proposisi: "p jika dan hanya jika q"

  Notasi: $p \leftrightarrow q$

P	Q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

- $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

Dengan kata lain, pernyataan "*p* jika dan hanya jika *q*" dapat dibaca "Jika *p* maka *q* dan jika *q* maka *p*".

Cara-cara menyatakan bikondisional $p \leftrightarrow q$:

(a) *p* jika dan hanya jika *q*.

(b) *p* adalah syarat perlu dan cukup untuk *q*.

(c) Jika *p* maka *q*, dan sebaliknya.

(d) *p iff q*

Contoh 22. Proposisi majemuk berikut adalah bi-implikasi:

(a) 1 + 1 = 2 jika dan hanya jika 2 + 2 = 4.

(b) Syarat cukup dan syarat perlu agar hari hujan adalah kelembaban udara tinggi.

(c) Jika anda orang kaya maka anda mempunyai banyak uang, dan sebaliknya.

(d) Bandung terletak di Jawa Barat *iff* Jawa Barat adalah sebuah propinsi di Indonesia.

Contoh 23. Tuliskan setiap proposisi berikut ke dalam bentuk "*p* jika dan hanya jika *q*":

(a) Jika udara di luar panas maka anda membeli es krim, dan jika anda membeli es krim maka udara di luar panas.

(b) Syarat cukup dan perlu agar anda memenangkan pertandingan adalah anda melakukan banyak latihan.

(c) Anda naik jabatan jika anda punya koneksi, dan anda punya koneksi jika anda naik jabatan.

(d) Jika anda lama menonton televisi maka mata anda lelah, begitu sebaliknya.

(e) Kereta api datang terlambat tepat pada hari-hari ketika saya membutuhkannya.

Penyelesaian:

(a) Anda membeli es krim jika dan hanya jika udara di luar panas.

(b) Aanda memenangkan pertandingan jika dan hanya jika anda melakukan banyak latihan.

(c) Anda naik jabatan jika dan hanya jika anda punya koneksi.

(d) Mata anda lelah jika dan hanya jika anda lama menonton televisi.

(e) Kereta api datang terlambat jika dan hanya jika saya membutuhkan kereta hari itu.

Contoh 24

Diberikan pernyataan "Perlu memiliki *password* yang sah agar anda bisa *log on* ke *server*"

(a) Nyatakan pernyataan di atas dalam bentuk proposisi "jika p, maka q".

(b) Tentukan ingkaran, konvers, invers, dan kontraposisi dari pernyataan tsb.

Penyelesaian:

Misalkan

p : Anda bisa *log on* ke *server*

q : Memiliki *password* yang sah

maka

(a) Jika anda bisa *log on* ke *server* maka anda memiliki *password* yang sah

(b) Ingkaran: "Anda bisa *log on* ke *server* dan anda tidak memiliki *password* yang sah"

Konvers: "Jika anda memiliki *password* yang sah maka anda bisa *log on* ke *server*"

Invers: "Jika anda tidak bisa *log on* ke *server* maka anda tidak memiliki *password* yang sah"

Kontraposisi: "Jika anda tidak memiliki *password* yang sah maka anda tidak bisa *log on* ke *server*"

- Bila dua proposisi majemuk yang ekivalen di-bikondisionalkan, maka hasilnya adalah tautologi.

Teorema:

- Dua buah proposisi majemuk, $P(p, q, ..)$ dan $Q(p, q, ..)$ disebut ekivalen secara logika, dilambangkan dengan $P(p, q, \ldots) \Leftrightarrow Q(p, q, \ldots)$, jika $P \leftrightarrow Q$ adalah tautologi.

Soal latihan 3

Sebagian besar orang percaya bahwa harimau Jawa sudah lama punah. Tetapi, pada suatu hari Amir membuat pernyataan-pernyataan kontroversial sebagai berikut:

(a) Saya melihat harimau di hutan.

(b) Jika saya melihat harimau di hutan, maka saya juga melihat srigala.

Misalkan kita diberitahu bahwa Amir kadang-kadang suka berbohong dan kadang-kadang jujur. Gunakan tabel kebenaran untuk memeriksa apakah Amir benar-benar melihat harimau di hutan?

Jawab

(a) Saya melihat harimau di hutan.

(b) Jika saya melihat harimau di hutan, maka saya juga melihat srigala.

Misalkan

p : Amir melihat harimau di hutan

q : Amir melihat srigala

Pernyataan untuk (a): p

Pernyataan untuk (b): $p \rightarrow q$

Tabel kebenaran p dan $p \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	**T**
T	F	F
F	T	T
F	F	T

<u>Kasus 1</u>: Amir dianggap berbohong, maka apa yang dikatakan Amir itu keduanya salah (p salah, q salah)

<u>Kasus 2</u>: Amir dianggap jujur, maka apa yang dikatakan Amir itu keduanya benar (p benar, q benar).

Tabel menunjukkan bahwa mungkin bagi p dan $p \rightarrow q$ benar, tetapi tidak mungkin keduanya salah. Ini berarti Amir mengatakan yang sejujurnya, dan kita menyimpulkan bahwa Amir memang benar melihat harimau di hutan.

Soal latihan 4

[LIU85] Sebuah pulau didiami oleh dua suku asli. Penduduk suku pertama selalu mengatakan hal yang benar, sedangkan penduduk dari suku lain selalu mengatakan kebohongan. Anda tiba di pulau ini dan bertanya kepada seorang penduduk setempat apakah di pulau tersebut ada emas atau tidak. Ia menjawab, “Ada emas di pulau ini jika dan hanya jika saya selalu mengatakan kebenaran”. Apakah ada emas di pulau tersebut?

Jawab

Ada emas di pulau ini jika dan hanya jika saya selalu mengatakan kebenaran

Misalkan

p : saya selalu menyatakan kebenaran

q : ada emas di pulau ini

Ekspresi logika: $p \leftrightarrow q$

Tinjau dua kemungkinan kasus:

Kasus 1, orang yang memberi jawaban adalah orang dari suku yang selalu menyatakan hal yang benar.

Kasus 2, orang yang memberi jawaban adalah orang dari suku yang selalu menyatakan hal yang bohong.

Kasus 1: orang tersebut selalu menyatakan hal yang benar. Ini berarti p benar, dan jawabannya terhadap pertanyaan kita pasti juga benar, sehingga pernyataan bi-implikasi tersebut bernilai benar. Dari Tabel bi-implikasi kita melihat bahwa bila p benar dan $p \leftrightarrow q$ benar, maka q harus benar. Jadi, ada emas di pulau tersebut adalah benar.

Kasus 2: orang tersebut selalu menyatakan hal yang bohong. Ini berarti p salah, dan jawabannya terhadap pertanyaan kita pasti juga salah, sehingga pernyataan bi-implikasi tersebut salah. Dari Tabel bi-implikasi kita melihat bahwa bila p salah dan $p \leftrightarrow q$ salah, maka q harus benar. Jadi, ada emas di pulau tersebut adalah benar.

Dari kedua kasus, kita selalu berhasil menyimpulkan bahwa ada emas di pulau tersebut, meskipun kita tidak dapat memastikan dari suku mana orang tersebut.

Argumen

Argumen adalah suatu deret proposisi yang dituliskan sebagai

	p_1
	p_2 $\vdots$ p_n

$\therefore$	Q

yang dalam hal ini, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ disebut hipotesis (atau premis), dan q disebut konklusi.

Argumen ada yang **sahih** (*valid*) dan **palsu** (*invalid*).

Definisi. Sebuah argumen dikatakan sahih jika konklusi benar bilamana semua hipotesisnya benar; sebaliknya argumen dikatakan palsu (*fallacy* atau *invalid*).

Jika argumen sahih, maka kadang-kadang kita mengatakan bahwa secara logika konklusi mengikuti hipotesis atau sama dengan memperlihatkan bahwa implikasi

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$$

adalah benar (yaitu, sebuah tautologi). Argumen yang palsu menunjukkan proses penalaran yang tidak benar.

Contoh 1

Perlihatkan bahwa argumen berikut:

Jika air laut surut setelah gempa di laut, maka tsunami datang. Air laut surut setelah gempa di laut. Karena itu tsunami datang.

adalah sahih.

<u>Penyelesaian</u>:

Misalkan:

p : Air laut surut setelah gempa di laut

q : Tsunami datang:

Argumen:

	$p \rightarrow q$
	p
$\therefore$	q

Ada dua cara yang dapat digunakan untuk membuktikan kesahihan argumen ini.

Cara 1: Bentuklah tabel kebenaran untuk *p, q*, dan $p \rightarrow q$

P	Q	P- Q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Argumen dikatakan sahih jika semua hipotesisnya benar, maka konklusinya benar. Kita periksa apabila hipotesis p dan $p \rightarrow q$ benar, maka konklusi q juga benar sehingga argumen dikatakan benar. Periksa tabel, p dan $p \rightarrow q$ benar secara bersama-sama pada baris 1. Pada baris 1 ini q juga benar. Jadi, argumen di atas **sahih**.

Cara 2: Perlihatkan dengan tabel kebenaran apakah

$$[\, p \wedge (p \rightarrow q)\,] \rightarrow q$$

merupakan tautologi. Tabel 1.16 memperlihatkan bahwa $[\, p \wedge (p \rightarrow q)\,] \rightarrow q$ suatu tautologi, sehingga argumen dikatakan sahih.

Tabel 1.16 $[\, p \wedge (p \rightarrow q)\,] \rightarrow q$ adalah tautology

p	q	$p \rightarrow q$	p ^ $(p \rightarrow q)$	$[\, p \wedge (p \rightarrow q)\,] \rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

Perhatikanlah bahwa penarikan kesimpulan di dalam argumen ini menggunakan modus ponen. Jadi, kita kita juga telah memperlihatkan bahwa modus ponen adalah argmen yang sahih.

Contoh 2

Perlihatkan bahwa penalaran pada argumen berikut:

"Jika air laut surut setelah gempa di laut, maka tsunami datang. Tsunami datang. Jadi, air laut surut setelah gempa di laut"

tidak benar, dengan kata lain argumennya palsu.

Penyelesaian:

Argumen di atas berbentuk

$$\begin{array}{ll} & p \to q \\ & q \\ \hline \therefore & P \end{array}$$

Dari tabel tampak bahwa hipotesis q dan $p \to q$ benar pada baris ke-3, tetapi pada baris 3 ini konklusi p salah. Jadi, argumen tersebut tidak sahih atau palsu, sehingga penalaran menjadi tidak benar.

Contoh 3:

Periksa kesahihan argumen berikut ini:

Jika 5 lebih kecil dari 4, maka 5 bukan bilangan prima.
5 tidak lebih kecil dari 4.

∴ 5 adalah bilangan prima

Penyelesaian:

Misalkan p : 5 lebih kecil dari 4

q: 5 adalah bilangan prima.

Argumen:

$$\begin{array}{ll} & p \to \sim q \\ & \sim p \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

Tabel memperlihatkan tabel kebenaran untuk kedua hipotesis dan konklusi tersebut. Baris ke-3 dan ke-4 pada tabel tersebut adalah baris di mana $p \to \sim q$ dan $\sim p$ benar secara bersama-sama, tetapi pada baris ke-4 konklusi q salah (meskipun pada baris ke-3 konklusi q benar). Ini berarti argumen tersebut palsu.

- Perhatikanlah bahwa meskipun konklusi dari argumen tersebut kebetulan merupakan pernyataan yang benar ("5 adalah bilangan prima" adalah benar),

- tetapi konklusi dari argumen ini tidak sesuai dengan bukti bahwa argumen tersebut palsu.

Beberapa argumen yang sudah terbukti sahih

1. Modus ponen

   $p \to q$

   p

   $\therefore q$

2. Modus tollen

   $p \to q$

   $\sim q$

   $\therefore \sim p$

3. Silogisme disjungtif

   $p \vee q$

   $\sim p$

   $\therefore q$

4. Simplifikasi

   $p \wedge q$

   $\therefore p$

5. Penjumlahan

   p

   $\therefore p \vee q$

6. Konjungsi

p

q

$\therefore p \wedge q$

Aksioma, Teorema, *Lemma*, *Corollary*

Aksioma adalah proposisi yang diasumsikan benar. Aksioma tidak memerlukan pembuktian kebenaran lagi.

Contoh-contoh aksioma:

(a) Untuk semua bilangan real x dan y, berlaku $x + y = y + x$ (hukum komutatif penjumlahan).

(b) Jika diberikan dua buah titik yang berbeda, maka hanya ada satu garis lurus yang melalui dua buah titik tersebut.

Teorema adalah proposisi yang sudah terbukti benar.

Bentuk khusus dari teorema adalah *lemma* dan *corolarry*.

Contoh-contoh teorema:

a. Jika dua sisi dari sebuah segitiga sama panjang, maka sudut yang berlawanan dengan sisi tersebut sama besar.

b. Untuk semua bilangan real x, y, dan z, jika $x \leq y$ dan $y \leq z$, maka $x \leq z$ (hukum transitif).

Contoh *corollary*:

Jika sebuah segitiga adalah sama sisi, maka segitiga tersebut sama sudut.

Corollary ini mengikuti teorema (a) di atas.

Contoh *lemma*:

Jika n adalah bilangan bulat positif, maka $n - 1$ bilangan positif atau $n - 1 = 0$.

1. Rinaldi Munir, “Materi Kuliah Matematika Diskrit”,Informatika-ITB, Bandung,2003
2. Rinaldi Munir, “Matematika Diskrit”,Informatika, Bandung,2001

SATUAN ACARA PENGAJARAN
(SAP)

Mata Kuliah : Matematika Diskrit

Kode : TIS 4223

Semester : III

Waktu : 3 x 50 Menit

Pertemuan : 4

A. Kompetensi
   1. Utama
      Mahasiswa dapat memahami tentang metode-metode pembuktian.
   2. Pendukung
      Mahasiswa dapat mengetahui dan menganalisis metode-metode pembuktian dengan berbagai jenis-jenis
B. Pokok Bahasan
      Metode-metode pembuktian
C. Sub Pokok Bahasan
   1. Metode pembuktian langsung
   2. Metode pembuktian tidak langsung
   3. Metode pembuktian hampa
   4. Metode pembuktian mudah
   5. Metode pembuktian kontradiksi
   6. Metode pembuktian perkasus
   7. Metode pembuktian ekuivalensi
   8. Penggunaan pembuktian constrictive dan non constrictive
D. Kegiatan Belajar Mengajar

Tahapan Kegiatan	Kegiatan Pengajaran	Kegiatan mahasiswa	Media & Alat Peraga
Pendahuluan	1. Mereview materi sebelumnya 2. Menjelaskan materi-materi akan dibahas	Memdengarkan dan memberikan komentar	Laptop, LCD, Papan tulis, Spidol
Penyajian	1. Menjelaskan metode-metode pembuktian dan jenis-jenisnya 2. Menjelaskan Metode pembuktian	Memperthatikan, memcatat dan memberikan komentar, mengajukan pertanyaan	Laptop, LCD, Papan tulis, Spidol

	langsung 3. Menjelaskan Metode pembuktian tidak langsung 4. Menjelaskan Metode pembuktian hampa 5. Menjelaskan Metode pembuktian mudah 6. Menjelaskan Metode pembuktian kontradiksi 7. Menjelaskan Metode pembuktian perkasus 8. Menjelaskan Metode pembuktian ekuivalensi 9. Menjelaskan Penggunaan pembuktian constrictive dan non constrictive		
Penutup	1. Mengajukan pertanyaan pada mahasiswa 2. Memberikan kesimpulan 3. Memberikan latihan tertulis dan diperiksa dikelas 4. Mengingatkan akan kewajiban untuk pertemuan selangjutnya	Memperthatikan , memcatat dan memberikan komentar, mengajukan pertanyaan dan mengerjakan latihan	Laptop, LCD, Papan tulis, Spidol, buku tulis, modul

E. Evaluasi

Evaluasi dilakukan dengan cara memberikan pertanyaan langsung dan memberikan latihan tertulis pada satu jam terakhir

Referensi

1) Jong jek siang, Matemtika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer,andi offset, Yogyakarta.2009
2) Rinaldi Munirm, Matematika diskrit, Informatika Bandung.2003

RENCANA KEGIATAN BELAJAR MINGGUAN

(RKBM)

Mata Kuliah	: Matematika Diskrit
Kode	: TIS 4223
Semester	: III
Waktu	: 3 x 50 Menit
Pertemuan	: 4

Minggu Ke-	TOPIK	METODE PEMBELAJARAN	Estmasi Waktu (menit)	Media & Alat Peraga
3	1. Metode pembuktian langsung 2. Metode pembuktian tidak langsung 3. Metode pembuktian hampa 4. Metode pembuktian mudah 5. Metode pembuktian kontradiksi 6. Metode pembuktian perkasus 7. Metode pembuktian ekuivalensi 8. Penggunaan pembuktian constrictive dan non constrictive	Ceramah/ Orasi, dan diskusi kelas	1 x 3 x 50	Laptop, LCD, Papan tulis, Spidol

METODE PEMBUKTIAN MATEMATIKA

Definisi memainkan peranan penting di dalam matematika. Topik-topik baru matematika selalu diawali dengan membuat definisi baru. Sebagai contoh, teori fungsi kompleks diawali dengan mendefinisikan bilangan imajiner i, yaitu i2 = -1. Berangkat dari definisi dihasilkan sejumlah teorema beserta akibat-akibatnya. Teorema-teorema inilah yang perlu dibuktikan. Pada kasus sederhana, kadangkala teorema pada suatu buku ditetapkan sebagai definisi pada buku yang lain, begitu juga sebaliknya. Selanjutnya, untuk memahami materi selanjutnya dibutuhkan prasyarat pengetahuan logika matematika. Ada beberapa metode dalam pembuktian matematika, diantaranya sebagai berikut :

1.Pembuktian Langsung

Bukti langsung ini biasanya diterapkan untuk membuktikan teorema yang q. Di sini p sebagai hipotesis digunakan sebagaiÞberbentuk implikasi p fakta yang diketahui atau sebagai asumsi. Selanjutnya, dengan menggunakan p kita harus menunjukkan berlaku q. Secara logika pembuktian q benarÞlangsung ini ekuivalen dengan membuktikan bahwa pernyataan p dimana diketahui p benar.

Contoh

Buktikan, jika x bilangan ganjil maka x2 bilangan ganjil.

Bukti. Diketahui x ganjil, jadi dapat ditulis sebagai x = 2n-1 untuk suatu bilangan bulat n. Selanjutnya, x2 = (2n – 1)2 = 4n2 + 4n + 1 = 2 (2n2 + 2) +1 = 2m + 1: Karena m merupakan bilangan bulat maka disimpulkan x2 ganjil.

2. Pembuktian tak langsung

q ekuivalen denganÞKita tahu bahwa nilai kebenaran suatu implikasi p p. Jadi pekerjaan membuktikan~ Þq ~nilai kebenaran kontraposisinya kebenaran pernyataan implikasi dibuktikan lewat kontraposisinya.

Contoh

Buktikan, jika x2 bilangan ganjil maka x bilangan ganjil. Bukti. Pernyataan ini sangat sulit dibuktikan secara langsung. Mari kita coba saja. Karena x2 ganjil maka dapat ditulis x2 = 2m + 1 untuk suatu bilangan asli m. Selanjutnya x = tidak dapat disimpulkan apakah ia ganjil atau tidak. Sehingga bukti langsung tidak dapat digunakan. Kontraposisi dari pernyataan ini adalah ”Jika x genap maka x2 genap”. Selanjutnya diterapkan bukti langsung pada kontraposisinya. Diketahui x genap, jadi dapat ditulis x = 2n untuk suatu bilangan bulat n. Selanjutnya, x2 = (2n)2 = 2 (2n2) = 2m yang merupakan bilangan genap.

3. Pembuktian “Bukti” Kosong

q sudah bernilai salah makaÞBila hipotesis p pada implikasi p   q selalu benar apapun nilai kebenaran dari q. Jadi jikaÞimplikasi p kita dapat menunjukkan bahwa p salah maka kita telah berhasil q.Þmembuktikan kebenaran p

Contoh

Didalam teori himpunan kita mengenal definisi berikut :

“Diberikan dua himpunan A dan B. Himpunan A dikatakan himpunan bagian AÎ B jika pernyataan berikut dipenuhi : ”jika x Ìdari B, ditulis A   B”. Suatu himpunan dikatakan himpunan kosong jika ia tidakÎmaka x mempunyai anggota. Buktikan, himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari himpunan apapun.”

suatu himpunan kosong dan B himpunan sebarang.ÆBukti. Misalkan A =   B” bernilaiÎ A maka x ÎKita akan tunjukkan bahwa pernyataan ”jika x   A selaluÎbenar. Karena A himpunan kosong maka pernyataan p yaitu x bernilai salah karena tidak mungkin ada x yang menjadi anggota himpunan AÎkosong. Karena p salah maka terbuktilah kebenaran pernyataan ”jika x   B. Karena B himpunan sebarang maka buktiÌ B”, yaitu A Îmaka x selesai.

4. Pembuktian Trivial

q, dapat ditunjukkan bahwa q benar makaÞBila pada implikasi p implikasi ini selalu bernilai benar apapun nilai kebenaran dari p. Jadi jika kita dapat menunjukkan bahwa q benar maka kita telah berhasil q.Þmembuktikan kebenaran p

Contoh

Buktikan, jika $0 < x < 1$ maka $0 <$. Bukti. Karena pernyataan q, yaitu $0 <$. selalu benar untuk setiap x bilangan real termasuk x di dalam interval (0, 1) maka secara otomatis kebenaran pernyataan ini terbukti.

Contoh

1. Buktikan, jika x bilangan ganjil maka x2 bilangan ganjil.
   jawab

Bukti. Diketahui x ganjil, jadi dapat ditulis sebagai x = 2n-1 untuk suatu bilangan bulat n. Selanjutnya, x2 = (2n - 1)2 = 4n2 + 4n + 1 = 2 (2n2 + 2) +1 = 2m + 1: Karena m merupakan bilangan bulat maka disimpulkan x2 ganjil.

contoh

2. Buktikan, jika x2 bilangan ganjil maka x bilangan ganjil.

   Bukti. Pernyataan ini sangat sulit dibuktikan secara langsung. Mari kita coba saja. Karena x2 ganjil maka dapat ditulis x2 = 2m + 1 untuk suatu bilangan asli m. Selanjutnya x = tidak dapat disimpulkan apakah ia ganjil atau tidak. Sehingga bukti langsung tidak dapat digunakan. Kontraposisi dari pernyataan ini adalah "Jika x genap maka x2 genap". Selanjutnya diterapkan bukti langsung pada kontraposisinya. Diketahui x genap, jadi dapat ditulis x = 2n untuk suatu bilangan bulat n. Selanjutnya, x2 = (2n)2 = 2 (2n2) = 2m yang merupakan bilangan genap.

contoh

3. Diberikan dua himpunan A dan B. Himpunan A dikatakan himpunan bagian dari B, ditulis $A \subset B$ jika pernyataan berikut dipenuhi : "jika $x \in A$ maka $x \in B$". Suatu himpunan dikatakan himpunan kosong jika ia tidak mempunyai anggota.

   Buktikan, himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari himpunan apapun.

   Bukti. Misalkan $A = \{\ \}$ suatu himpunan kosong dan B himpunan sebarang. Kita akan tunjukkan bahwa pernyataan "jika $x \in A$ maka $x \in B$" bernilai benar. Karena A himpunan kosong maka pernyataan p yaitu x 2 A selalu bernilai salah karena tidak mungkin ada x yang menjadi anggota himpunan kosong. Karena p salah maka terbuktilah kebenaran pernyataan "jika $x \in A$ maka $x \in B$", yaitu $A \subset B$. Karena B himpunan sebarang maka bukti selesai.

contoh

4. Misalkan himpunan A didefinisikan sebagai interval setengah terbuka $A := [0,1)$. Buktikan maksimum A tidak ada.

Bukti. Pernyataan ini dapat dinayatakan dalam bentuk implikasi berikut

"jika $A := [0,1)$ maka maksimum A tidak ada."

Andaikan maksimum A ada, katakan p. Maka haruslah $0 < p < 1$, dan akibatnya $\frac{1}{2}p < \frac{1}{2}$ dan $\frac{1}{2}(p+1) < 1$. Diperoleh

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p \\ &< \frac{1}{2}p + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(p+1) < 1 \end{aligned}$$

Diperoleh dua pernyataan berikut :

- p maksimum A, yaitu elemen terbesar himpunan A.
- ada $q \in A$ (yaitu $q := \frac{1}{2}(p+1)$) yang lebih besar dari p.

Kedua pernyataan ini kontradiktif, jadi pengandaian A mempunyai maksimum adalah salah, jadi haruslah tidak ada maksimum

contoh

5. Misalkan ada konjektur berikut :

   "Untuk setiap n bilangan asli maka $2^{2^n} + 1$ merupakan bilangan prima"

Bukti. Pernyataan ini berlaku untuk setiap bilangan asli n. Tapi bila bila ditemukan satu bilangan asli, katakan n_0 dan $2^{2^{n_0}} + 1$ tidak prima (komposit) maka konjektur ini tidak benar. Diperhatikan beberapa kasus berikut, untuk n = 1 diperoleh bilangan 5, n = 2 menghasilkan 17, n = 3 menghasilkan 257 dan n = 4 menghasilkan 65537. Keempat bilangan ini prima. Coba perhatikan untuk n = 5, diperoleh

$$2^{25} + 1 = 4294967297 = (641)(6700417).$$

Ternyata bukan prima. Nah, n = 5 merupakan contoh penyangkalan (*counter example*). Akhirnya disimpulkan bahwa konjektur ini salah.

5. Pembuktian dengan Kontradiksi

Pembuktian dengan Kontradiksi Metode ini mempunyai keunikan tersendiri, tidak mudah diterima oleh q kita berangkatÞorang awam. Dalam membuktikan kebenaran implikasi p dari diketahui p dan :q. Berangkat dari dua asumsi ini kita akan sampai pada suatu kontradiksi. Suatu kontradiksi terjadi bilamana ada satu atau lebih pernyataan yang bertentangan. Contoh pernyataan kontradiksi : 1 = 2, -1 < a < 0 dan 0 < a < 1, ”m dan n dua bilangan bulat yang relatif prime” dan ”m dan n keduanya bilangan genap”. Contoh Misalkan himpunan A didefinisikan sebagai interval setengah terbuka A := [0; 1). Buktikan maksimum A tidak ada. Bukti. Pernyataan ini dapat dinayatakan dalam bentuk implikasi berikut ”jika A := [0; 1) maka maksimum A tidak ada.” Andaikan maksimum A ada, katakan p. Maka haruslah 0 < p < 1, dan akibatnya ½ p < ½ dan ½ (p + 1) < 1. Diperoleh P = ½ p + ½ p < ½ p + ½ = ½ (p + 1) < 1 Diperoleh dua pernyataan berikut : • p maksimum A, yaitu elemen terbesar himpunan A. A (yaitu q := ½ (p + 1)) yang lebih besar dari p.Î• ada q Kedua pernyataan ini kontradiktif, jadi pengandaian A mempunyai maksimum adalah salah, jadi haruslah tidak ada maksimum.

Contoh Tidak ada bilangan bulat positif x dan y yang memenuhi persamaan Diophantine x2 - y2 = 1. Bukti. Misalkan ada bilangan bulat positif x dan y yang memenuhi x2 - y2 = 1. Maka pada ruas kiri dapat difaktorkan sehingga diperoleh (x - y)(x + y) = 1. Karena x, y bulat maka persamaan terakhir ini hanya dapat terjadi bilamana x - y = 1 dan x + y = 1 atau x - y = -1 dan x + y = -1. Pada kasus pertama akan dihasilkan x = -1 dan y = 0, sedangkan pada kasus kedua dihasilkan x = 1 dan y = 0. Hasil pada kedua kasus ini bertentangan dengan hipotesis bahwa x dan y bulat positif. Bila dicermati ada kemiripan bukti dengan kontradiksi dan bukti dengan kontraposisi. Untuk menjelaskan perbedaan kedua metoda ini kita perhatikan struktur pada keduanya sebagai berikut : • Pada metoda kontradiksi, kita mengasumsikan p dan ~q, kemudian membuktikan adanya kontradiksi.

Pada bukti dengan kontraposisi, kita mengasumsikan ~q, lalu membuktikan ~p. Asumsi awal kedua metoda ini sama, pada metoda kontraposisi tujuan akhirnya sudah jelas yaitu membuktikan kebenaran ~p, sedangkan pada metoda kontradiksi tujuan akhirnya tidak pasti pokoknya sampai bertemu kontradiksi. Secara khusus jika kita sampai pada pernyataan ~p maka kontradiksi sudah ditemukan. Jadi metoda kontraposisi merupakan kasus khusus dari metoda kontraposisi. 6.

6. Pembuktian Eksistensial

Pembuktian Eksistensial Ada dua tipe bukti eksitensial ini, yaitu konstruktif dan takkonstruktif. Pada metoda konstruktif, eksistensinya ditunjukkan secara eksplisit. Sedangkan pada metoda takkonstruktif, eksistensinya tidak diperlihatkan secara eksplisit. Contoh Buktikan, ada bilangan irrasional x dan y sehingga xy rasional. Bukti. Kita sudah mengetahui bahwa irrasional, anggaplah kita sudah dapat membuktikannya. Sekarang perhatikan . Bila ternyata rasional maka bukti selesai, dalam hal ini diambil x = y = .

Bila bukan rasional (yaitu irrasional), diperhatikan bahwa = ( )2 = 2 merupakan bilangan rasional. Jadi salah satu pasangan (x, y), dengan x = y = , atau x = dan y = pasti memenuhi pernyataan yang dimaksud. Pada bukti ini hanya ditunjukkan eksistensi bilangan irrasional x dan y tanpa memberikannya secara eksplisit. Ini dikenal dengan istilah pembuktian eksistensi non konstruktif. Contoh Bila a dan b bilangan real dengan a < b maka terdapat bilangan rasional r dengan a < r < b. Bukti. Diperhatikan bahwa suatu bilangan real positif. Menurut sifat Archimedes terdapat bilangan asli n sehingga n > . Untuk n ini berlaku nb - na > 1: (*) Sekarang ambil m sebagai bilangan bulat pertama yang lebih besar dari na, dan berlaku m - 1 < na < m: (**). Dari (*) dan (**) diperoleh na < m < na + 1 < nb: Bentuk terakhir ini dapat ditulis na < m < nb, dan dengan membagi semua ruas dengan n, didapat dan dengan mengambil r := . maka bukti Teorema selesai.

Dalam membuktikan eksistensi bilangan rasional r, ditempuh dengan langkah-langkah konstruktif sehingga bilangan rasional yang dimaksud dapat dinyatakan secara eksplisit. Ini bukti eksistensial dengan konstruktif. Melalui langkah-langkah pembuktian ini kita dapat membangun algortima untuk melakukan komputasi numerik.

Perhatikan contoh berikut : Contoh Tentukan 3 buah bilangan rasional diantara dan . Penyelesaian. • Diketahui a = , b = = 1,5 • d = 11,6569 • Jadi bilangan asli yang dapat diambil adalah n = 12, 13, 14, 15, 16. • Untuk n = 12 diperoleh na (12)( ) 16,9706 maka diambil m = 17. Untuk n = 13, na (13)( ) 18,3848 dan diambil m = 19. Untuk n = 14 maka na (14)( ) 19,7990 dan diambil m = 20. • Jadi bilangan rasional r = dan terletak diantara dan Pada kalkulus kita mempelajari bukti pada teorema nilai rata-rata baik untuk bentuk diferensial maupun bentuk integral. Eksistensi titik c pada kedua teorema ini tidak diberikan secara eksplisit tetapi dapat diyakinkan bahwa ia ada. Termasuk, ada berapa banyak keberadaan mereka bukan merupakan issue penting dalam pembuktian eksistensial. Dalam pembuktian eksistensial, terkadang diperlukan mengenai jaminan ketunggalannya. Ini menjadi pekerjaan sendiri dalam pembuktian.

7 Pembuktian Ketunggalan

pembuktian ketunggalan Dalam membuktikan ketunggalan, pertama harus ditunjukkan eksistensi suatu objek, katakan objek itu x. Ada dua pendekatan yang dapat ditempuh untuk membuktikan bahwa x hanya satu-satunya objek yang memenuhi, yaitu : • Diambil objek sembarang, katakan y maka ditunjukkan y = x, atau • Misalkan y objek sebarang lainnya dengan y y, ditunjukkan adanya suatu kontradiksi. cara ini tidak lain menggunakan metoda kontradiksi seperti yang sudah dibahas sebelumnya. Contoh Definisi limit barisan (pengantar analisis real): N) suatu barisan bilangan real. Bilangan real xÎ“Misalkan (xn : n N), dan ditulis lim(xn) = x jika danÎdikatakan limit dari (xn : n hanya jika untuk setiap > 0 yang diberikan terdapat bilangan asli K sehingga , untuk setiap n > K. Kemudian, disusun teorema berikut ”Jika limit barisan (xn) ada, maka ia tunggal.”

Bukti. Di sini tidak diperlukan bukti eksistensi karena kita hanya akan membahas barisan yang mempunyai limit, atau eksistensinya sudah diasumsikan. Sekarang kita gunakan pendekatan kedua. Andaikan barisan X := (xn) mempunyai dua limit yang berbeda, katakan xa dan xb dengan xa xb. Diberikan := .Karena lim(xn) = xa maka untuk " ini terdapat Ka sehingga untuk setiap n > Ka. Juga, karena lim(xn) = xb maka terdapat Kb sehingga untuk setiap n > Kb. Sekarang untuk n > maks {Ka,Kb} maka berlaku Akhirnya diperoleh suatu pernyataan yang kontradiktif. Pengandaian xa xb salah dan haruslah xa = xb, yaitu limitnya mesti tunggal.

8 Pembuktian dengan counter example

pembuktian dengan counter example Untuk membuktikan suatu konjektur terkadang kita membutuhkan penjabaran yang cukup panjang dan sulit. Tapi bila kita dapat menemukan satu saja kasus yang tidak memenuhi konjektur tersebut maka selesailah urusannya.

Contoh

Misalkan ada konjektur berikut :

”Untuk setiap n bilangan asli maka merupakan bilangan prima”

Bukti. Pernyataan ini berlaku untuk setiap bilangan asli n. Tapi bila bila ditemukan satu bilangan asli, katakan n0 dan tidak prima (komposit) maka konjektur ini tidak benar. Diperhatikan beberapa kasus berikut, untuk n = 1 diperoleh bilangan 5, n = 2 menghasilkan 17, n = 3 mengahasilkan 257 dan n = 4 menghasilkan 65537. Keempat bilangan ini prima. Coba perhatikan untuk n = 5, diperoleh = 4294967297 = (641)(6700417). Ternyata bukan prima. n = 5 merupakan contoh penyangkalan (counter example). Akhirnya disimpulkan bahwa konjektur ini salah.

9. Pembuktian dengan induksi matematika

pembuktian dengan induksi matematika Secara umum penalaran di dalam matematika menggunakan pendekatakan deduktif. Tidak dapat dibayangkan bagaimana orang dapat membuktikan kebenaran pernyataan yang memuat kalimat ”untuk setiap > 0 . . . ”, ”untuk setiap bilangan asli n . . .”, ”untuk setiap fungsi kontinu f . . .”, dan lain-lain. Tidak mungkin dapat ditunjukkan satu per satu untuk menunjukkan kebenaran pernyataan tersebut. Tapi ada salah satu pola penalaran pada matematika yang menggunakan prinsip induksi, biasanya disebut induksi matematika. Prinsip induksi matematika ini adalah untuk inferensi terhadap pernyataan tentang n dimana n berjalan pada himpunan bilangan bulat, biasanya himpunan bilangan asli N atau pada himpunan bagian bilangan asli, N1 N. Biasanya pernyataan tentang bilangan asli n dinyatakan dengan P(n).

Contoh

Untuk setiap n N, berlaku 1+2+3+ … +n = ½ n(n+1). Diperoleh

P(1) : 1 = ½ (1)(1 + 1)

P(3) : 1 + 2 + 3 = ½ (3)(3 + 1)

P(6) : 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = ½ (6)(6 + 1)
Teorema 3.1. Misalkan S himpunan bagian dari N yang mempunyai sifat-sifat berikut
(i) 1 S
(ii) k S k + 1 S.
Maka S = N.

Bukti. Bila P(n) suatu pernyataan tentang n bilangan asli maka P(n) dapat bernilai benar pada beberapa kasus atau salah pada kasus lainnya. Diperhatikan P(n) : bahwa n2 > 2n hanya benar untuk P(2), P(3), P(4) tetapi salah untuk kasus lainnya. Prinsip induksi matematika dapat diformulasikan sebagai berikut :

Misalkan untuk tiap n N menyatakan pernyataan tentang n. Jika
(i) P(1) benar,
(ii) jika P(k) benar maka P(k + 1) benar,
maka P(n) benar untuk setiap n N.
Kembali kita dituntut membuktikan kebenaran implikasi p q pada (ii). Di sini kita perlu membuktikan kebenaran pernyataan P(k+1) dengan diketahui kebenaran P(k).

Contoh (Ketidaksamaan Bernoulli).
Jika x > -1 maka untuk setiap n N berlaku (1 + x)n > 1 + nx (KB)

Bukti. Dibuktikan dengan induksi matematika. Untuk n = 1 kedua ruas pada (KB) menjadi kesamaan. Diasumsikan berlaku untuk n = k, yaitu berlaku (1+x)k > 1+kx. Untuk n = k + 1, diperoleh (1 + x)k > 1 + kx [diketahui]
(1 + x)k+1 = (1 + x)k (1 + x) > (1 + kx)(1 + x)
= 1 + (k + 1)x + kx2
> 1 + (k + 1)x
Jadi berlaku untuk n = k + 1. Perhatikan pada baris kedua, kedua ruas dikalikan dengan (1+x) suatu bilangan positif karena x > -1. Jadi tanda ketidaksamaan tidak berubah.

Satu lagi varian metoda induksi adalah dikenal dengan prinsip induksi kuat yang dinyatakan sebagai berikut :
Misalkan untuk tiap n N menyatakan pernyataan tentang n. Jika
(i) P(1) benar,

(ii) jika P(1), P(2), … , P(k) benar maka P(k + 1) benar,
maka P(n) benar untuk setiap n N.

Contoh
Diberikan barisan (xn) yang didefinisikan secara rekursif berikut
x1 := 1, x2 := 1,
xn+1 := ½ (xn + xn-1) untuk n > 1:
Misalkan P(n) : 1 < xn < 2 . Buktikan P(n) berlaku untuk semua n N. Bukti. Kita terapkan prinsip induksi matematika kuat. (i) Untuk n = 1, diketahui x1 = 1. Jadi P(1) benar. (ii) Diasumsikan P(1), P(2), .. , P(k) benar, yaitu berlaku 1 < x1 < 2, 1 < x2 < 2, 1 < x3 < 2, … , 1 < xk-1 < 2, 1 < xk < 2. Dari kedua ketaksamaan terakhir 1 < xk-1 < 2 dan 1 < xk < 2, bila dijumlahkan diperoleh Ini berarti P(k + 1) benar. Jadi terbukti P(n) berlaku untuk semua n N.

10. pembuktian dua arah

Pembuktian dua arah Ada kalanya suatu pernyataan berupa bi-implikasi, p q. Ada dua kemungkinan bi-implikasi bernilai benar p q yaitu p benar dan q benar, atau p salah dan q salah. Dalam prakteknya, pernyataan ini terdiri dari p q dan q p. Membuktikan kebenaran bi-implikasi p q berarti membuktikan kebenaran kedua implikasi p q dan q p. Selanjutnya dapat menggunakan bukti langsung, taklangsung atau mungkin dengan kontradiksi.

Contoh Buktikan, suatu bilangan habis dibagi sembilan jika hanya jika jumlah angka-angka pembangunnya habis dibagi sembilan. Bukti. Sebelum kita buktikan, dijelaskan terlebih dulu maksud dari pernyataan ini dengan contoh berikut. Ambil bilangan 135, 531, 351, 513, 315, 153, maka semuanya habis dibagi 9. Coba periksa satu per satu. Misalkan p suatu bilangan bulat, maka dapat disajikan dalam bentuk p = xnxn-1xn-2 … x2x1x0, dimana xn 0; xn-1,… x0 bilangan bulat tak negatif. Sedangkan nilai p ini dapat ditulis dalam bentuk: p = x0 + x1101 + x2102 + … + xn10n. Jumlah angka-angka pembangunnya adalah s = x0 + x1 + x2 + … + xn: Pertama dibuktikan ( ), yaitu diketahui p habis dibagi 9, dibuktikan s habis dibagi 9. Karena p habis dibagi 9 maka dapat ditulis p = 9k untuk suatu bilangan bulat k. Diperhatikan selisih p – s, p – s = x0 + x1101 + x2102 + … + xn10n – (x0 + x1 + x2 + … + xn) = (10 – 1)x1 + (102 – 1)x2 + … + (10n – 1)xn Diperhatikan bilangan pada ruas kanan selalu habis dibagi sembilan, misalnya ditulis 9m untuk suatu bilangan bulat m. Jadi diperoleh 9k – s = 9m s = 9(k – m) yaitu s habis dibagi 9. Selanjutnya dibuktikan ( ), yaitu diketahui s habis dibagi 9, dibuktikan p habis dibagi 9. Diperhatikan p = x0 + x1101 + x2102 + … + xn10n =

x0 + x1(101 – 1) + x2(102 – 1) + … + xn(10n – 1) + x1 + x2 + … + xn = [x0 + x1 + x2+ … + xn] + [x1(101 - 1) + x2(102 - 1) + … + xn(10n - 1)] Karena bilangan pada kelompok pertama dan kelompok kedua habis dibagi 9 maka terbukti p habis dibagi 9.

11. Pembuktian tak langsung dengan kontradiksi

Matematika adalah sebuah studi mengenai keterkaitan antar objek. Matematika juga dikenal sebagai ilmu yang mempunyai kerangka berpikir deduktif, tidak induktif. Artinya, dari suatu hal yang bersifat umum menuju khusus. Akibatnya, dalam matematika tidak diperkenankan untuk melakukan generalisasi. Contohnya, perhatikan beberapa data di bawah.

1+3=5
3+5=8
5+7=12
7+9=16
9+11=20
Dari data di atas, kita lihat bahwa jika bilangan ganjil ditambah bilangan ganjil, akan menghasilkan bilangan genap. Namun dalam matematika tidak diperbolehkan mengatakan penjumlahan dua bilangan ganjil menghasilkan bilangan genap hanya berdasarkan data di atas. Satu-satunya cara adalah dengan pembuktian.

Apa itu pembuktian? Dalam matematika, pembuktian adalah kegiatan seseorang untuk meyakinkan sesuatu itu benar melalui langkah-langkah logis. Untuk menunjukkan sesuatu itu salah, cukup menunjukkan countre example, yaitu menunjukkan bahwa ada satu keadaan dimana suatu pernyataan tidak berlaku.

Ada berbagai macam teknik pembuktian dalam matematika. Ditinjau dari caranya, ada dua jenis pembuktian, yaitu pembuktian langsung dan pembuktian tak langsung. Untuk pembuktian tidak langsung sendiri ada dua cara, yaitu dengan kontradiksi dan kontrapositif. Namun kali ini yang akan saya bahas cuma pembuktian dengan kontradiksi. Ok, apa itu pembuktian dengan kontradiksi? Perhatikan contoh berikut.

Ketika Budi sedang asik membaca di kamar, tiba-tiba listrik di rumah Budi mati. Budi ingin tahu apakah yang mati cuma listrik di rumahnya atau memang mati dari pusat. Kemudian ia melihat keluar jendela. Ternyata listrik rumah di sekitar rumah Budi hidup. Lalu ia menyimpulkan bahwa yang mati hanya listrik di rumahnya.

Dari contoh di atas terliggat bahwa untuk membuktikan bahwa hanya listrik di rumah Budi yang mati, ia harus mengecek listrik di rumah sekitarnya. Artinya, perlu pemisalan negasi dari pernyataan yang ingin dibuktikan, yaitu misalkan tidak benar bahwa listrik yang mati hanya di rumah Budi. Dengan kata lain pemadaman listrik terjadi dari pusat. Akibatnya, rumah di sekitar Budi juga listriknya harus mati. Ternyata ketika ia melihat keluar jendela, listrik di sekitar rumah Budi masih hidup. Berarti hanya rumah anda yang listriknya mati. Keadaan ini yang disebut kontradiksi.

Dalam ilmu logika, jika pernyataan yang ingin dibuktikan berbentuk implikasi p à q, maka yang harus dibuktikan adalah q. Untuk membuktikan dengan kontradiksi, kita harus memisalkan ~q. kemudian perlihatkan bahwa ~q bertentangan dengan p. Contoh di atas, jika kita misalkan p : listrik mati dari pusat dan q : listrik rumah sekitar Budi mati, maka akan membentuk pernyataan implikasi p à q, yaitu “jika listrik mati dari pusat, maka listrik rumah sekitar Budi mati”. Tapi ternyata yang terjadi adalah ~q, yaitu listrik sekitar rumah Budi tidak mati. Jadi kesimpulannya adalah ~p, yaitu listrik tidak mati dari pusat.

12. Pembuktian tak langsung dengan metode kontraposisi

Di depan, telah mengetahui bahwa implikasi $p \Rightarrow q$ ekuivalen (senilai) dengan kontraposisinya, ditulis

$P \Rightarrow q \equiv -q \Rightarrow -p$

Prinsip inilah yang akan kita jadikan dasar pada pembuktian dengan cara ini. Misalkan diketahui pernyataan $p \Rightarrow q$. Langkah pembuktian dengan kontraposisi adalah menbuat negasi dari q, yaitu $-q$, kemudian $-q$ dijabarkan. Pernyataan tersebut benar apabila setelah penjabaran diperoleh $-p$. Bukti ini sesuai dengan tautologi

$((p \Rightarrow q) \wedge -q) \Rightarrow -p$

Contoh :

Buktikan bahwa jika m^2 bilangan genap maka m genap.

Bukti :

p: m^2 bilangan genap

q: m bilangan genap

Andaikan m tidak genap $(-q)$ maka m ganjil.

Dengan demikian, $m = 2k + 1$, dengan k bilangan bulat.

$$
\begin{aligned}
m^2 &= (2k + 1)^2 \\
&= 4k^2 + 4k + 1 \\
&= 2(2k^2 + 2k) + 1
\end{aligned}
$$

Nilai $2(2k^2 + 2k + 1$ tidak habis dibagi 2. Akibatnya, $2(2k^2 + 2k) + 1$ bilangan ganjil. Dengan demikian, m^2 bernilai ganjil.

Soal soal logika Matematika

1. Dari argumentasi berikut :
   Jika ibu tidak pergi maka adik senang.
   Jika adik tidak tersenyum maka dia tidak senang.
   Kesimpulan yang sah adalah...

   a. Ibu pergi atau adik tersenyum.
   b. Ibu tidak pergi atau adik terenyum.
   c. Ibu pergi dan adik tidak tersenyum.
   d. Ibu pergi atau adik tidak tersenyum.
   e. Ibu tidak pergi dan adik tersenyum.

2. Dikethui premis-premis berikut :
   1. Jika Budi rajin belajar maka ia menjadi pandai.
   2. Jika Budi menjadi pandai maka ia lulus ujian.
   3. Budi tidak lulus ujian .
   kesimpulan yang sah adalah ...

   a. Budi menjadi pandai b. Budi rajin belajar.
   c. Budi lulus ujian. d. Budi tidak pandai.
   e. Budi tidak rajin belajar.

3. Penarikan kesimpulan yang sah dari argumentasi
   $\sim p \rightarrow q$
   $q \rightarrow r$
   ___
   Jadi....
   a. $p \wedge r$ b. $\sim p \vee r$ c. $p \wedge \sim r$
   d. $\sim p \wedge r$ e. $p \vee r$

4. Nilai x yang menyebabkan pernyataan ” Jika $x^2 + x = 6$ maka $x^2 + 3x < 9$ ” bernilai salah adalah...

   a. -3 b. -2 c. 1 d. 2 e. 6

5. Jika pernyataan p bernilai benar dan q bernilai salah , maka pernyataan di bawah ini yang bernilai salah adalah...

   1. $q \leftrightarrow \sim p$ 2. $\sim p \vee q$ 3. $\sim q \wedge p$ 4. $p \leftrightarrow q$

6. Diketahui pernyataan p dan q , ~ p adalah ingkaran dari p pernyataan $\sim p \vee (q \vee \sim p)$ senilai dengan ...

   a. p b. q c. $\sim p$ d. $p \rightarrow q$ e. $\sim q$

7. Diketahui pernyataan pernyataan p , q dan r , pernyataan $(p \rightarrow q) \vee r$ bernilai salah jika ...

a. p benar , q benar dan r benar
b. p benar , q benar dan r salah
c. p benar , q salah dan r salah
d. p salah , q salah dan r benar
e. p salah , q salah dan r salah

8. Pernyataan $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$ ekivalen dengan pernyataan

a. $p \rightarrow q$ b. $p \rightarrow \sim q$ c. $\sim p \rightarrow q$
d. $\sim p \rightarrow \sim q$ e. $p \leftrightarrow q$

9. Ingkaran dari $(p \wedge q) \rightarrow r$ adalah...

a. $\sim p \vee \sim q \vee r$ b. $(\sim p \wedge \sim q) \vee r$ c. $p \wedge q \wedge \sim r$
d. $\sim p \wedge \sim q \wedge r$ e. $(\sim p \vee \sim q) \wedge r$

10. Invers dari konvers pernyataan $\sim p \rightarrow q$ adalah...

a. $p \rightarrow \sim q$ b. $q \rightarrow \sim p$ c. $q \rightarrow p$
d. $\sim q \rightarrow \sim p$ d. $\sim q \rightarrow p$

11. Impiksi $p \rightarrow q \rightarrow r$ pasti bernilai jika...

a. p benar , q benar dan salah
b. p salah , q salah dan r salah
c. p salah , q benar dan r salah
d. p benar , q salah dan r salah
e. p benar , q benar dan r salah

12. Jika pernyataan p bernilai salah dan pernyataan q bernilai benar maka pernyataan berikut yang salah adalah...

a. $p \vee q$ b. $p \rightarrow q$ c. $\sim p \rightarrow \sim q$
d. $\sim p \wedge q$ d. $\sim p \vee \sim q$

13. Pernyataan $q \vee \sim p$ ekivalen dengan pernyataan...

a. $\sim p \rightarrow \sim q$ b. $q \wedge \sim p$ c. $\sim q \rightarrow \sim p$
d. $q \rightarrow \sim p$ e. $\sim q \vee \sim p$

14. Kontraposisi dari pernyataan " Jika matahari terbit maka semua ayam jantan berkokok " adalah...

a. Jika beberapa ayam jantan tidak berkokok , maka matahari tidak terbit.
b. Jika beberapa ayam jantan berkokok , maka matahari tidak terbit
c. Jika beberapa ayam jantan berkokok , maka matahari terbit
d. Jika matahari tidak terbit maka beberapa ayam jantan tidak berkokok
e. Jika matahari terbit maka beberapa ayam jantan tidak berkokok

15. Pernyataan yang ekivalen dengan pernyataan " jika ia berusaha maka ia berhasil " adalah...

a. Jika ia tidak berhasil , maka ia tidak berusaha .
b. Jika ia tidak berusaha , maka ia tidak berhasil.
c. Jika ia berhasil , maka ia berusaha.
d. Ia tidak berusaha , tetapi ia berhasil
e. Ia berusaha , tetapi ia tidak berhasil

16. Konvers dari iners pernyataan " Jika saya puasa maka saya lapar " adalah...

a. Jika saya lapar maka saya puasa.
b. Jika saya tidak puasa maka saya tidak lapar .
c. Jika saya lapar maka saya tidak puasa.
d. Jika saya tidaklapar maka saya tidak puasa
e. Jika saya tidak lapar maka saya puasa

17. Koners dari $(p \vee q) \rightarrow (q \wedge r)$ adalah...

a. $(p \wedge q) \rightarrow (q \vee r)$ b. $(p \vee q) \rightarrow \sim (q \wedge r)$
c. $\sim (p \vee q) \rightarrow (q \wedge r)$ d. $(q \wedge r) \rightarrow (p \vee q)$
e. $\sim (p \vee q) \rightarrow (q \vee r)$

18. Kontraposisi dri pernyataan " Jika lampu mati, maka kegiata belajar berhenti " adalah...

a. Jika lampu tidak mati, maka kegiata belajar berhenti
b. Jika lampu mati, maka kegiata belajar tidak berhenti
c. Jika lampu tidak mati, maka kegiata belajar tidak berhenti
d. Jika kegiata belajar tidak berhenti maka lampu mati
e. Jika kegiata belajar tidak berhenti maka lampu tidak mati

19. Negai " Jika guru bahasa Inggris hadir, maka semua siswa senang . "

a. Jika guru bahasa Inggris tidak hadir, maka semua siswa tidak senang .
b. Jika guru bahasa Inggris hadir, maka semua siswa tidak senang .
c. Jika siswa tidak senang , maka guru bahasa Inggris tidak hadir.
d. Guru bahasa Inggris tidak hadir dan semua siswa senang .
e. Guru bahasa Inggris hadir dan ada siswa yang tidak senang .

20. Negasi dari konvers $p \rightarrow q$ adalah...

a. $q \rightarrow p$ b. $\sim p \rightarrow \sim q$ c. $\sim q \rightarrow \sim p$
d. $q \wedge \sim p$ e. $p \wedge \sim q$

21. Diketahui p , q dan r adalah suatu pernyataan , penarikan kesimpulan yang sah adalah...

(1) $p \rightarrow q$ (B)
p (B)

$\therefore$ q (B)

(2) $p \rightarrow q$ (B)
$\sim q$ (B)

$\therefore$ $\sim p$ (B)

(3) $p \rightarrow q$ (B)
$q \rightarrow r$ (B)

$\therefore p \rightarrow r$ (B)

(4) $p \rightarrow q$ (B)
$q \rightarrow r$ (B)

$\therefore$ r (B)

a. hanya 1 dan 2 b. hanya 1 , 2 dan 3
c. hanya 2 , 3 dan 4 d. hanya 4 saja
e. hanya 3 saja

22. Diberikan empat pernyataan p , q , r dan s , jika tiga pernyataan berikut benar
$p \rightarrow q$, $q \leftrightarrow r$, $r \rightarrow s$
dan s adalah pernyataan salah , maka diantara pernyataa berikut yang salah adalah...

a. $\sim p$ b. $\sim q$ c. $\sim r$ d. $p \wedge \sim r$ e. $p \vee \sim r$

23. Jika pernyataan p = saya hadir . q = anda pergi . Pernyataan yang setara dengan $\sim (p \wedge q)$ adalah ...

a. Saya tidak hadir dan anda tidak pergi.
b. Anda tidak pergi jika aya tidak pergi.
c. Saya tidak hadir atau anda tidak pergi
d. Saya telah hadir atau anda pergi
e. Saya hadir atau anda tidak pergi

24. Ingkaran dari pernyataan ” Semua anak pandai berlogika ”

a. Semua anak tidak pandai berlogika
b. Semua anak pandai berlogika
c. Terdapat anak yang pandai berlogika
d. Beberapa anak pandai berlogika
e. Beberapa anak tidak pandai berlogika

25. Pernyataan yang bernilai benar adalah...

a. Untuk semu bilangan real x , berlaku $x^2 > 0$.
b. Untuk semu bilangan real x , maka $x > 3 \rightarrow x^3 > 30$.
c. Semua real adalah bilangan rasionl.
d. Untuk semu bilangan real x , y maka $x > y \rightarrow x^2 > y^2$.
e. Untuk setiap pemetaan adalah suatu relasi.

26. Negasi dari pernyataan " Tiada bilangan prima yang lebih dari 2 yang genap "

a. Semua bilangan prima yang lebih dari 2 adalah ganjil.
b. Beberapa bilangan prima yang lebih dari 2 genap .
c. Semua bilangan prima yang lebih dari 2 adalah genap.
d. Beberapa bilangan bukan prima lebih dari 2 adalah ganjil
e. Semua bilangan bukan prima lebih dari adalah ganjil .

27. Diberikan argumentasi :
1. Jika suatu sudut lancip , maka pelurusnya tumpul.
2. Pelurusnya sudut A tidak tumpul.
   Jadi sudut A tidak lancip.

Pola argumentasi di atas berdasarkan prinsip...

a. Modus ponens   b. Modus tollens
c. Tautologi   c. Silogisme   e. Kontradiksi

28. Negasi dari pernyataan " Ada persamaan kuadrat yang tidak mempunyai akar real " adalah....

a. Semua persamaan kuadrat mempunyai akar real
b. Beberapa persamaan kuadrat tidak mempunyai akar real
c. Tidak semua persamaan kuadrat mempunyai akar real
d. Beberapa persamaan kuadrat mempunyai akar real
e. Semua persamaan kuadrat tidak mempunyai akar real

29. Bentuk $p \wedge (p \rightarrow q)$ senilai dengan

a. p b. q
c. $p \wedge \sim q$ d. $p \wedge q$
e. $p \rightarrow q$

30. Ingkaran dari pernyataan " Semua bilangan prima adalah bilangan ganjil " adalah...

a. Beberapa bilangan bukan prima adalah bilangan ganjil.
b. Beberapa bilangan prima adalah bilangan ganjil.
c. Beberapa bilangan prima adalah bilangan ganjil.
d. Beberapa bilangan prima adalah bukan bilangan ganjil.
e. Beberapa bilangan ganjil adalah bukan bilangan prima.

31. Pernyataan yang ekivalen dengan ” Jika $4 > 5$ maka $-4 < -5$ ” adalah...

a. Jika $-4 > -5$ maka $4 < 5$ b. Jika $4 > 5$ maka $-4 \geq -5$
c. Jika $4 \leq 5$ maka $-4 < -5$ d. Jika $-4 < -5$ maka $4 > 5$
e. Jika $-4 \geq -5$ maka $4 \leq 5$

32. Kontraposisi dari pernyataan ” Jika penyakit AIDS berbahaya maka semua orang takut terhadap penyakit AIDS ”

a. Jika ada orang yang tidak takut terhadap penyakit AIDS maka penyakit AIDS tidak berbahaya.
b. Jika penyakit AIDS tidak berbahaya maka semua orang tidak takut terhadap penyakit AIDS.
c. Jika penyakit AIDS berbahaya maka semua orang tidak takut terhadap penyakit AIDS
d. Jika semua orang takut terhadap penyakit AIDS maka penyakit AIDS berbahaya
e. Jika semua orang tidak takut terhadap penyakit AIDS maka penyakit AIDS tidak berbahaya.

33. Pada tabel di bawah ini , nilai kebenaran untuk kolom $\sim p \wedge \sim q$ dari kiri ke kanan adalah...

p	q	$\sim p \wedge \sim q$
B	B	
B	S	
S	B	
S	S	

a. S B S S b. S S B B
c. S S S B d. S B S B e. S B B B

34. Pernyataan yang ekivalen dengan invers $p \rightarrow q$ adalah...

a. $\sim q \rightarrow p$ b. $q \rightarrow p$ c. $\sim p \rightarrow \sim q$
d. $\sim p \rightarrow q$ d. $p \rightarrow \sim q$

35. Negasi dari pernyataan ” Ada manusia yang tidak berdosa adalah...

a. Ada manusia yang berdosa.
b. Semua manusia yang berdosa

c. Manusia berdosa
d. Semua manusia tidak berdosa
e. Tidak ada manusia yang berdosa

36. Ingkaran dari kontra posisi $p \rightarrow q$ adlah...

a. $\sim q \vee p$ b. $q \wedge p$ c. $p \wedge \sim q$
d. $p \wedge q$ e. $p \rightarrow q$

37. Nilai kebenaran dari $p \wedge \sim q$ ekuivalen dengan nilai kebenaran dengan...

a. $p \rightarrow q$ b. $\sim p \rightarrow \sim q$ c. $q \rightarrow \sim p$
d. $p \rightarrow \sim q$ e. $\sim (p \rightarrow q)$

38. Jika pernyataan p dan q keduanya benar maka...

1. $\sim p \vee \sim q$ salah 2. $\sim p \rightarrow q$ benar
3. $p \leftrightarrow \sim q$ salah 4. $\sim p \vee q$ salah

39. Ingkaran dari pernyataan " Apabila guru tidak hadir maka semua siswa bersuka ria " adalh...

a. Guru hadir dan semua siswa bersuka ria
b. Guru hadir dan ada beberapa siswa tidak bersuka ria
c. Guru tidak hadir dan semua siswa bersuka ria
d. Guru tidak hadir dan ada siswa tidak bersuka ria
e. Guru tidak hadir dan semua siswa tidak bersuka ria

.

SATUAN ACARA PENGAJARAN

(SAP)

Mata Kuliah	: Matematika Diskrit
Kode	: TIS 4223
Semester	: III
Waktu	: 3 x 50 Menit
Pertemuan	: 5, 6 dan 7

A. Kompetensi

1. Utama

   Mahasiswa dapat mengerti dan memahami konsep himpunan dan fungsi

2. Pendukung

   Mahasiswa dapat memahami dan mengetahui tentang berbagai jenis himpunan, operasinya dan berbagai jenis fungsi

B. Pokok Bahasan

   Himpunan Dan Fungsi

C. Sub Pokok Bahasan

1. Defenisi Himpunan
2. Operasi pada himpunan
3. Relasi dua himpunan
4. Power set
5. Cartesian product
6. Konsep fungsi
7. Jenis-jenis fungsi
8. Fungsi invers
9. Komposisi dua fungsi

D. Kegeiatan Belajar Mengajar

Tahapan Kegiatan	Kegiatan Pengajaran	Kegiatan mahasiswa	Media & Alat Peraga
Pendahuluan	1. Mereview materi sebelumnya 2. Menjelaskan materi-materi akan	Memdengarkan dan memberikan komentar	Laptop, LCD, Papan tulis, Spidol

	dibahas		
Penyajian	1. Menjelaskan Defenisi Himpunan 2. Menjelaskan Operasi pada himpunan 3. Menjelaskan Relasi dua himpunan 4. Menjelaskan Power set 5. Menjelaskan Cartesian product 6. Menjelaskan Konsep fungsi 7. Menjelaskan Jenis-jenis fungsi 8. Menjelaskan Fungsi invers 9. Menjelaskan Komposisi dua fungsi	Memperthatikan, memcatat dan memberikan komentar, mengajukan pertanyaan	Laptop, LCD, Papan tulis, Spidol
Penutup	1. Mengajukan pertanyaan pada mahasiswa 2. Memberikan kesimpulan 3. Memberikan latihan tertulis dan diperiksa dikelas 4. Mengingatkan akan kewajiban untuk pertemuan selanjutnya	Memperthatikan, memcatat dan memberikan komentar, mengajukan pertanyaan dan mengerjakan latihan	Laptop, LCD, Papan tulis, Spidol, modul

E. Evaluasi

Evaluasi dilakukan dengan cara memberikan pertanyaan langsung dan memberikan latihan tertulis pada satu jam terakhir

Referensi

1) Jong jek siang, Matemtika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer,andi offset, Yogyakarta.2009
2) Rinaldi Munirm, Matematika diskrit, Informatika Bandung.2003

RENCANA KEGIATAN BELAJAR MINGGUAN

(RKBM)

Mata Kuliah	: Matematika Diskrit
Kode	: TIS 4223
Semester	: III
Waktu	: 3 x 50 Menit
Pertemuan	: 5,6 & 7

Minggu Ke-	TOPIK	METODE PEMBELAJARAN	Estmasi Waktu (menit)	Media & Alat Peraga
5	1. Defenisi Himpunan 2. Operasi pada himpunan 3. Relasi dua himpunan	Ceramah/ Orasi, dan diskusi kelas	1 x 3 x 50	Laptop, LCD, Papan tulis, Spidol

Minggu Ke-	TOPIK	METODE PEMBELAJARAN	Estmasi Waktu (menit)	Media & Alat Peraga
6	1. Power set 2. Cartesian product 3. Konsep fungsi	Ceramah/ Orasi, dan diskusi kelas	1 x 3 x 50	Laptop, LCD, Papan tulis, Spidol

Minggu Ke-	TOPIK	METODE PEMBELAJARAN	Estmasi Waktu (menit)	Media & Alat Peraga
7	1. Jenis-jenis fungsi 2. Fungsi invers 3. Komposisi dua fungsi	Ceramah/ Orasi, dan diskusi kelas	1 x 3 x 50	Laptop, LCD, Papan tulis, Spidol

Himpunan (*set*)

Himpunan (*set*) adalah kumpulan objek-objek yang *berbeda*.

Objek di dalam himpunan disebut **elemen**, **unsur**, atau **anggota**.

Cara Penyajian Himpunan

1. *Enumerasi*

Contoh 1.

- Himpunan empat bilangan asli pertama: $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
- Himpunan lima bilangan genap positif pertama: $B = \{4, 6, 8, 10\}$.
- $C = \{\text{kucing}, a, \text{Amir}, 10, \text{paku}\}$
- $R = \{ a, b, \{a, b, \text{c}\}, \{a, c\} \}$
- $C = \{a, \{a\}, \{\{a\}\} \}$
- $K = \{ \{\} \}$
- Himpunan 100 buah bilangan asli pertama: $\{1, 2, ..., 100 \}$
- Himpunan bilangan bulat ditulis sebagai $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

Keanggotaan

$x \in A$: x merupakan anggota himpunan A;
$x \notin A$: x bukan merupakan anggota himpunan A.

Contoh 2.
Misalkan: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{ a, b, \{a, b, \text{c}\}, \{a, c\} \}$
$K = \{\{\}\}$
maka

$3 \in A$
$5 \notin B$
$\{a, b, c\} \in R$
$c \notin R$
$\{\} \in K$
$\{\} \notin R$

Contoh 3. Bila $P_1 = \{a, b\}$, $P_2 = \{ \{a, b\} \}$, $P_3 = \{\{\{a, b\}\}\}$, maka

$a \in P_1$
$a \notin P_2$
$P_1 \in P_2$
$P_1 \notin P_3$
$P_2 \in P_3$

2. *Simbol-simbol Baku*

P = himpunan bilangan bulat positif = { 1, 2, 3, ... }
N = himpunan bilangan alami (natural) = { 1, 2, ... }
Z = himpunan bilangan bulat = { ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... }
Q = himpunan bilangan rasional
R = himpunan bilangan riil
C = himpunan bilangan kompleks

- Himpunan yang universal: **semesta**, disimbolkan dengan U.
  Contoh: Misalkan U = {1, 2, 3, 4, 5} dan A adalah himpunan bagian dari U, dengan A = {1, 3, 5}.

3. *Notasi Pembentuk Himpunan*

Notasi: { x | syarat yang harus dipenuhi oleh x }

Contoh 4.
(i) A adalah himpunan bilangan bulat positif yang kecil dari 5

A = { x | x adalah bilangan bulat positif lebih kecil dari 5}

atau

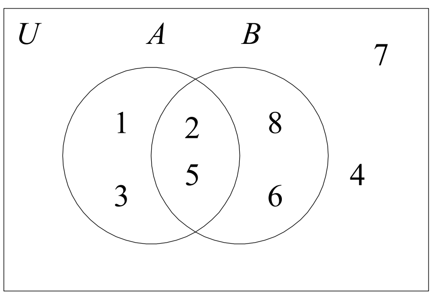
$A = \{ x \mid x \in P, x < 5 \}$

yang ekivalen dengan A = {1, 2, 3, 4}

(ii) M = { x | x adalah mahasiswa yang mengambil kuliah IF2151}

4. *Diagram Venn*

Contoh 5.
Misalkan U = {1, 2, …, 7, 8}, A = {1, 2, 3, 5} dan B = {2, 5, 6, 8}.
Diagram Venn:



5 Kardinalitas

- Jumlah elemen di dalam A disebut kardinal dari himpunan A.
- Notasi: $n(A)$ atau $|A|$

Contoh 6.
(i) $B = \{ x \mid x$ merupakan bilangan prima yang lebih kecil dari 20 $\}$,
atau $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ maka $|B| = 8$
(ii) $T = \{$kucing, a, Amir, 10, paku$\}$, maka $|T| = 5$
(iii) $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\} \}$, maka $|A| = 3$

6 Himpunan Kosong

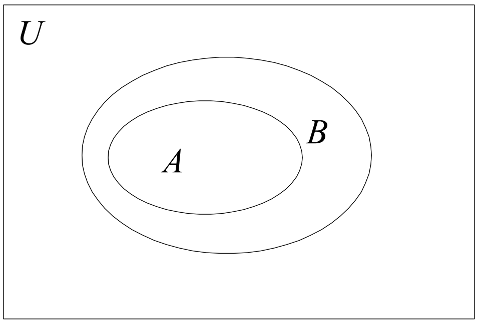
- Himpunan dengan kardinal = 0 disebut himpunan kosong (*null set*).
- Notasi : $\varnothing$ atau $\{\}$

Contoh 7.
(i) $E = \{ x \mid x < x \}$, maka $n(E) = 0$
(ii) $P = \{$ orang Indonesia yang pernah ke bulan $\}$, maka $n(P) = 0$
(iii) $A = \{x \mid x$ adalah akar persamaan kuadrat $x^2 + 1 = 0 \}$, $n(A) = 0$

- himpunan $\{\{ \}\}$ dapat juga ditulis sebagai $\{\varnothing\}$
- himpunan $\{\{ \}, \{\{ \}\}\}$ dapat juga ditulis sebagai $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $\{\varnothing\}$ bukan himpunan kosong karena ia memuat satu elemen yaitu himpunan kosong.

7 Himpunan Bagian (*Subset*)

- Himpunan A dikatakan himpunan bagian dari himpunan B jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen dari B.
- Dalam hal ini, B dikatakan *superset* dari A.
- Notasi: $A \subseteq B$
- Diagram Venn:



Contoh 8.
(i) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
(ii) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$
(iii) $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$
(iv) Jika $A = \{ (x, y) \mid x + y < 4, x \geq, y \geq 0 \}$ dan
$B = \{ (x, y) \mid 2x + y < 4,\ x \geq 0$ dan $y \geq 0 \}$, maka $B \subseteq A$.

TEOREMA 1. Untuk sembarang himpunan A berlaku hal-hal sebagai berikut:
(a) A adalah himpunan bagian dari A itu sendiri (yaitu, $A \subseteq A$).
(b) Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari A ($\varnothing \subseteq A$).
(c) Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$

$\varnothing \subseteq A$ dan $A \subseteq A$, maka $\varnothing$ dan A disebut himpunan bagian tak sebenarnya (*improper subset*) dari himpunan A.
Contoh: $A = \{1, 2, 3\}$, maka $\{1, 2, 3\}$ dan $\varnothing$ adalah *improper subset* dari A.

$A \subseteq B$ berbeda dengan $A \subset B$
(i) $A \subset B$: A adalah himpunan bagian dari B tetapi $A \neq B$.
A adalah himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari B.

Contoh: $\{1\}$ dan $\{2, 3\}$ adalah *proper subset* dari $\{1, 2, 3\}$

(ii) $A \subseteq B$: digunakan untuk menyatakan bahwa A adalah himpunan bagian (*subset*) dari B yang memungkinkan $A = B$.

8 Himpunan yang Sama

$A = B$ jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen B dan sebaliknya setiap elemen B merupakan elemen A.

$A = B$ jika A adalah himpunan bagian dari B dan B adalah himpunan bagian dari A. Jika tidak demikian, maka $A \neq B$.

Notasi : $A = B \leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

Contoh 9.
(i) Jika $A = \{ 0, 1 \}$ dan $B = \{ x \mid x (x - 1) = 0 \}$, maka $A = B$
(ii) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{5, 3, 8 \}$, maka $A = B$
(iii) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{3, 8\}$, maka $A \neq B$
Untuk tiga buah himpunan, A, B, dan C berlaku aksioma berikut:
(a) $A = A$, $B = B$, dan $C = C$
(b) jika $A = B$, maka $B = A$
(c) jika $A = B$ dan $B = C$, maka $A = C$

9 Himpunan yang Ekivalen

Himpunan A dikatakan ekivalen dengan himpunan B jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan tersebut sama.

Notasi : $A \sim B \leftrightarrow |A| = |B|$

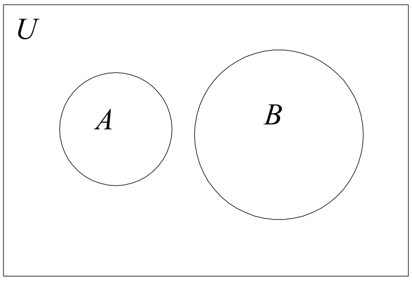
Contoh 10.
Misalkan $A = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ dan $B = \{ a, b, c, d \}$, maka $A \sim B$ sebab $|A| = |B| = 4$

10 Himpunan Saling Lepas

Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama.

Notasi : A // B

Diagram Venn:



Contoh 11.
Jika $A = \{ x \mid x \in P, x < 8 \}$ dan $B = \{ 10, 20, 30, ... \}$, maka A // B.

11 Himpunan Kuasa

Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri.

Notasi : $P(A)$ atau 2^A

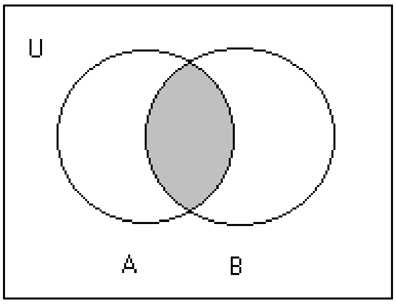
Jika $|A| = m$, maka $|P(A)| = 2^m$.

Contoh 12.
Jika $A = \{ 1, 2 \}$, maka $P(A) = \{ \varnothing, \{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 1, 2 \}\}$
Contoh 13.
Himpunan kuasa dari himpunan kosong adalah $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$, dan himpunan kuasa dari himpunan $\{\varnothing\}$ adalah $P(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

12 Operasi Terhadap Himpunan

a. Irisan (*intersection*)

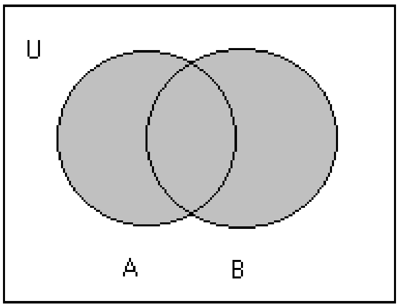
Notasi : $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}$



Contoh 14.
(i) Jika $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ dan $B = \{4, 10, 14, 18\}$,
maka $A \cap B = \{4, 10\}$
(ii) Jika $A = \{ 3, 5, 9 \}$ dan $B = \{ -2, 6 \}$, maka $A \cap B = \varnothing$.
Artinya: $A // B$

b. Gabungan (*union*)

Notasi : $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}$



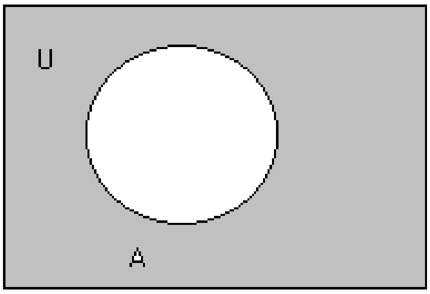
Contoh 15.

(i) Jika $A = \{ 2, 5, 8 \}$ dan $B = \{ 7, 5, 22 \}$, maka $A \cup B = \{ 2, 5, 7, 8, 22 \}$

(ii) $A \cup \varnothing = A$

c. Komplemen (*complement*)

Notasi : $\overline{A} = \{ x \mid x \in U, x \notin A \}$



Contoh 16.

Misalkan U = { 1, 2, 3, ..., 9 },

(i) jika $A = \{1, 3, 7, 9\}$, maka $\overline{A} = \{2, 4, 6, 8\}$

(ii) jika $A = \{ x \mid x/2 \in P, x < 9 \}$, maka $\overline{A} = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$

Contoh 17. Misalkan:

A = himpunan semua mobil buatan dalam negeri
B = himpunan semua mobil impor
C = himpunan semua mobil yang dibuat sebelum tahun 1990
D = himpunan semua mobil yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta
E = himpunan semua mobil milik mahasiswa universitas tertentu

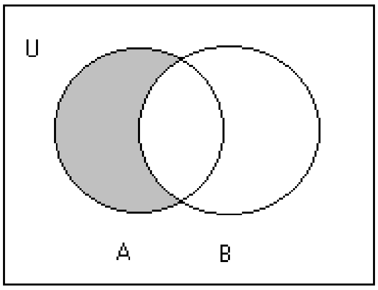
(i) "mobil mahasiswa di universitas ini produksi dalam negeri atau diimpor dari luar negeri" → $(E \cap A) \cup (E \cap B)$ atau $E \cap (A \cup B)$

(ii) "semua mobil produksi dalam negeri yang dibuat sebelum tahun 1990 yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta" → $A \cap C \cap D$

(iii) “semua mobil impor buatan setelah tahun 1990 mempunyai nilai jual lebih dari Rp 100 juta” → $\overline{C} \cap \overline{D} \cap B$

d. Selisih (*difference*)

Notasi : $A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B \} = A \cap \overline{B}$



Contoh 18.

(i) Jika $A = \{ 1, 2, 3, ..., 10 \}$ dan $B = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$, maka $A - B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ dan $B - A = \varnothing$

(ii) $\{1, 3, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{5\}$, tetapi $\{1, 2, 3\} - \{1, 3, 5\} = \{2\}$

e. Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)

Notasi: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

Contoh 19.

Jika $A = \{ 2, 4, 6 \}$ dan $B = \{ 2, 3, 5 \}$, maka $A \oplus B = \{ 3, 4, 5, 6 \}$

Contoh 20. Misalkan

U = himpunan mahasiswa
P = himpunan mahasiswa yang nilai ujian UTS di atas 80
Q = himpunan mahasiswa yang nilain ujian UAS di atas 80

Seorang mahasiswa mendapat nilai A jika nilai UTS dan nilai UAS keduanya di atas 80, mendapat nilai B jika salah satu ujian di atas 80, dan mendapat nilai C jika kedua ujian di bawah 80.

(i) “Semua mahasiswa yang mendapat nilai A” : $P \cap Q$

(ii) “Semua mahasiswa yang mendapat nilai B” : $P \oplus Q$

(iii) “Ssemua mahasiswa yang mendapat nilai C” : $U - (P \cup Q)$

TEOREMA 2. Beda setangkup memenuhi sifat-sifat berikut:

(a) $A \oplus B = B \oplus A$ (hukum komutatif)

(b) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (hukum asosiatif)

f. Perkalian Kartesian (*cartesian product*)

Notasi: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$

Contoh 20.

(i) Misalkan $C = \{1, 2, 3\}$, dan $D = \{a, b\}$, maka

$C \times D = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

(ii) Misalkan $A = B$ = himpunan semua bilangan riil, maka

$A \times B$ = himpunan semua titik di bidang datar

Catatan:

1. Jika A dan B merupakan himpunan berhingga, maka: $|A \times B| = |A| \,.\, |B|$.
2. Pasangan berurutan (a, b) berbeda dengan (b, a), dengan kata lain $(a, b) \neq (b, a)$.
3. Perkalian kartesian tidak komutatif, yaitu $A \times B \neq B \times A$ dengan syarat A atau B tidak kosong.
   Pada Contoh 20(i) di atas, $D \times C = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\} \neq C \times D$.
4. Jika $A = \varnothing$ atau $B = \varnothing$, maka $A \times B = B \times A = \varnothing$

Contoh 21. Misalkan

A = himpunan makanan = { s = soto, g = gado-gado, n = nasi goreng, m = mie rebus }

B = himpunan minuman = { c = coca-cola, t = teh, d = es dawet }

Berapa banyak kombinasi makanan dan minuman yang dapat disusun dari kedua himpunan di atas?

Jawab:

$|A \times B| = |A| \cdot |B| = 4 \cdot 3 = 12$ kombinasi dan minuman, yaitu $\{(s, c), (s, t), (s, d), (g, c), (g, t), (g, d), (n, c), (n, t), (n, d), (m, c), (m, t), (m, d)\}$.

Contoh 21. Daftarkan semua anggota himpunan berikut:

(a) $P(\varnothing)$ (b) $\varnothing \times P(\varnothing)$ (c) $\{\varnothing\} \times P(\varnothing)$ (d) $P(P(\{3\}))$

Penyelesaian:

(a) $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$

(b) $\varnothing \times P(\varnothing) = \varnothing$ (ket: jika $A = \varnothing$ atau $B = \varnothing$ maka $A \times B = \varnothing$)

(c) $\{\varnothing\} \times P(\varnothing) = \{\varnothing\} \times \{\varnothing\} = \{(\varnothing, \varnothing))$

(d) $P(P(\{3\})) = P(\{\varnothing, \{3\}\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{3\}\}, \{\varnothing, \{3\}\}\}$

13 Perampatan Operasi Himpunan

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$$

Contoh 22.

(i) $A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)$

$$A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$$

(ii) Misalkan $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$, dan $C = \{\alpha, \beta\}$, maka
$A \times B \times C = \{(1, a, \alpha), (1, a, \beta), (1, b, \alpha), (1, b, \beta), (2, a, \alpha), (2, a, \beta), (2, b, \alpha), (2, b, \beta)\}$

14 Hukum-hukum Himpunan

1. Hukum identitas: – $A \cup \varnothing = A$ – $A \cap U = A$	2. Hukum *null*/dominasi: – $A \cap \varnothing = \varnothing$ – $A \cup U = U$
3. Hukum komplemen: – $A \cup \overline{A} = U$ – $A \cap \overline{A} = \varnothing$	4. Hukum idempoten: – $A \cup A = A$ – $A \cap A = A$
5. Hukum involusi: – $\overline{(\overline{A})} = A$	6. Hukum penyerapan (absorpsi): – $A \cup (A \cap B) = A$ – $A \cap (A \cup B) = A$
7. Hukum komutatif: – $A \cup B = B \cup A$ – $A \cap B = B \cap A$	8. Hukum asosiatif: – $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ – $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

9. Hukum distributif: – $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	10. Hukum De Morgan: – $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ – $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
11. Hukum 0/1 – $\overline{\varnothing} = \text{U}$ – $\overline{\text{U}} = \varnothing$	

15 Prinsip Dualitas

Prinsip dualitas: dua konsep yang berbeda dapat dipertukarkan namun tetap memberikan jawaban yang benar.

Contoh: AS → kemudi mobil di kiri depan
Inggris (juga Indonesia) → kemudi mobil di kanan depan

Peraturan:

(a) di Amerika Serikat,
- mobil harus berjalan di bagian *kanan* jalan,
- pada jalan yang berlajur banyak, lajur *kiri* untuk mendahului,
- bila lampu merah menyala, mobil belok *kanan* boleh langsung

(b) di Inggris,
- mobil harus berjalan di bagian *kiri* jalan,
- pada jalur yang berlajur banyak, lajur *kanan* untuk mendahului,
- bila lampu merah menyala, mobil belok *kiri* boleh langsung

Prinsip **dualitas**:
Konsep kiri dan kanan dapat dipertukarkan pada kedua negara tersebut sehingga peraturan yang berlaku di Amerika Serikat menjadi berlaku pula di Inggris.

(Prinsip Dualitas pada Himpunan). Misalkan *S* adalah suatu kesamaan (*identity*) yang melibatkan himpunan dan operasi-operasi seperti $\cup$, $\cap$, dan komplemen. Jika S^* diperoleh dari *S* dengan mengganti $\cup \to \cap$, $\cap \to \cup$, $\varnothing \to \text{U}$, $\text{U} \to \varnothing$, sedangkan komplemen dibiarkan seperti semula, maka kesamaan S^* juga benar dan disebut dual dari kesamaan *S*.

1. Hukum identitas: $A \cup \varnothing = A$	Dualnya: $A \cap \text{U} = A$
2. Hukum *null*/dominasi: $A \cap \varnothing = \varnothing$	Dualnya: $A \cup \text{U} = \text{U}$

3. Hukum komplemen: $A \cup \overline{A} = U$	Dualnya: $A \cap \overline{A} = \varnothing$
4. Hukum idempoten: $A \cup A = A$	Dualnya: $A \cap A = A$
5. Hukum penyerapan: $A \cup (A \cap B) = A$	Dualnya: $A \cap (A \cup B) = A$
6. Hukum komutatif: $A \cup B = B \cup A$	Dualnya: $A \cap B = B \cap A$
7. Hukum asosiatif: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Dualnya: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
8. Hukum distributif: $A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cup C)$	Dualnya: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
9. Hukum De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	Dualnya: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
10. Hukum 0/1 $\overline{\varnothing} = U$	Dualnya: $\overline{U} = \varnothing$

Contoh 23. Dual dari $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$ adalah

$$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A.$$

16 Prinsip Inklusi-Eksklusi

Untuk dua himpunan A dan B:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

Contoh 24. Berapa banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 100 yang habis dibagi 3 atau 5?

Penyelesaian:

A = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3,
B = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 5,
$A \cap B$ = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3 dan 5 (yaitu himpunan bilangan bulat yang habis dibagi oleh KPK – Kelipatan Persekutuan Terkecil – dari 3 dan 5, yaitu 15),

yang ditanyakan adalah $|A \cup B|$.

$$|A| = \lfloor 100/3 \rfloor = 33,$$
$$|B| = \lfloor 100/5 \rfloor = 20,$$
$$|A \cap B| = \lfloor 100/15 \rfloor = 6$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 33 + 20 - 6 = 47$$

Jadi, ada 47 buah bilangan yang habis dibagi 3 atau 5.

Untuk tiga buah himpunan A, B, dan C, berlaku

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Untuk himpunan $A_1, A_2, \ldots, A_r$, berlaku:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r| = \sum_i |A_i| - \sum_{1 \le i \le j \le r} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i \le j \le k \le r} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^{r-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_r|$$

17 Partisi

Partisi dari sebuah himpunan A adalah sekumpulan himpunan bagian tidak kosong A_1, A_2, … dari A sedemikian sehingga:
(a) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots = A$, dan
(b) $A_i \cap A_j = \varnothing$ untuk $i \neq j$

Contoh 25. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, maka $\{ \{1\}, \{2, 3, 4\}, \{7, 8\}, \{5, 6\} \}$ adalah partisi A.

18. Himpunan Ganda

Himpunan yang elemennya boleh berulang (tidak harus berbeda) disebut **himpunan ganda** (*multiset*).

Contohnya, {1, 1, 1, 2, 2, 3}, {2, 2, 2}, {2, 3, 4}, {}.

Multiplisitas dari suatu elemen pada himpunan ganda adalah jumlah kemunculan elemen tersebut pada himpunan ganda. Contoh: $M = \{ 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1 \}$, multiplisitas 0 adalah 4.

Himpunan (*set*) merupakan contoh khusus dari suatu *multiset*, yang dalam hal ini multiplisitas dari setiap elemennya adalah 0 atau 1.

Kardinalitas dari suatu *multiset* didefinisikan sebagai kardinalitas himpunan padanannya (ekivalen), dengan mengasumsikan elemen-elemen di dalam *multiset* semua berbeda.

Operasi Antara Dua Buah *Multiset*:

Misalkan P dan Q adalah *multiset*:

1. $P \cup Q$ adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan multiplisitas maksimum elemen tersebut pada himpunan P dan Q.
   Contoh: $P = \{ a, a, a, c, d, d \}$ dan $Q =\{ a, a, b, c, c \}$,
   $P \cup Q = \{ a, a, a, b, c, c, d, d \}$

2. $P \cap Q$ adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan multiplisitas minimum elemen tersebut pada himpunan P dan Q.
   Contoh: $P = \{ a, a, a, c, d, d \}$ dan $Q = \{ a, a, b, c, c \}$
   $P \cap Q = \{ a, a, c \}$

3. P – Q adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan:
   - multiplisitas elemen tersebut pada P dikurangi multiplisitasnya pada Q, jika selisihnya positif
   - 0, jika selisihnya nol atau negatif.

   Contoh: $P = \{ a, a, a, b, b, c, d, d, e \}$ dan $Q = \{ a, a, b, b, b, c, c, d, d, f \}$ maka $P - Q = \{ a, e \}$

4. $P + Q$, yang didefinisikan sebagai jumlah (*sum*) dua buah himpunan ganda, adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan penjumlahan dari multiplisitas elemen tersebut pada P dan Q.
   Contoh: $P = \{ a, a, b, c, c \}$ dan $Q = \{ a, b, b, d \}$,
   $P + Q = \{ a, a, a, b, b, b, c, c, d \}$

18 Pembuktian Pernyataan Perihal Himpunan

Pernyataan himpunan adalah argumen yang menggunakan notasi himpunan.

Pernyataan dapat berupa:

1. Kesamaan (*identity*)

Contoh: Buktikan "$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$"

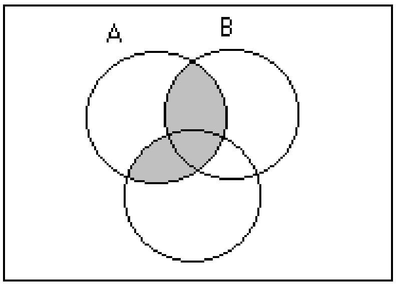
2. Implikasi

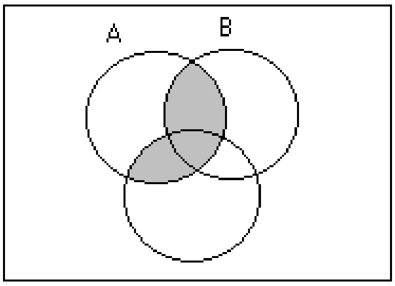
   Contoh: Buktikan bahwa "Jika $A \cap B = \varnothing$ dan $A \subseteq (B \cup C)$ maka selalu berlaku bahwa $A \subseteq C$".

1. Pembuktian dengan menggunakan diagram Venn

Contoh 26. Misalkan A, B, dan C adalah himpunan. Buktikan $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ dengan diagram Venn.

Bukti:





$A \cap (B \cup C)$ $\quad$ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Kedua digaram Venn memberikan area arsiran yang sama.

Terbukti bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Diagram Venn hanya dapat digunakan jika himpunan yang digambarkan tidak banyak jumlahnya.

Metode ini *mengilustrasikan* ketimbang membuktikan fakta. Diagram Venn tidak dianggap sebagai metode yang valid untuk pembuktian secara formal.

2. Pembuktikan dengan menggunakan tabel keanggotaan

Contoh 27. Misalkan A, B, dan C adalah himpunan. Buktikan bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Bukti:

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Karena kolom $A \cap (B \cup C)$ dan kolom $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ sama, maka $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

3. Pembuktian dengan menggunakan aljabar himpunan.

Contoh 28. Misalkan A dan B himpunan. Buktikan bahwa $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$

Bukti:

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) &= A \cap (B \cup \overline{B}) && \text{(Hukum distributif)} \\ &= A \cap U && \text{(Hukum komplemen)} \\ &= A && \text{(Hukum identitas)} \end{aligned}$$

Contoh 29. Misalkan A dan B himpunan. Buktikan bahwa $A \cup (B - A) = A \cup B$

Bukti:

$$\begin{aligned} A \cup (B - A) &= A \cup (B \cap \overline{A}) && \text{(Definisi operasi selisih)} \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) && \text{(Hukum distributif)} \\ &= (A \cup B) \cap U && \text{(Hukum komplemen)} \\ &= A \cup B && \text{(Hukum identitas)} \end{aligned}$$

Contoh 30. Buktikan bahwa untuk sembarang himpunan A dan B, bahwa

(i) $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$ dan

(ii) $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$

Bukti:

(i)

$$\begin{aligned} A \cup (\overline{A} \cap B) &= (A \cup \overline{A}) \cap (A \cap B) && \text{(H. distributif)} \\ &= U \cap (A \cap B) && \text{(H. komplemen)} \\ &= A \cup B && \text{(H. identitas)} \end{aligned}$$

(ii) adalah dual dari (i)

$$A \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) \qquad \text{(H. distributif)}$$

$= \varnothing \cup (A \cap B)$ (H. komplemen)
$= A \cap B$ (H. identitas)

4. Pembuktian dengan menggunakan definisi

Metode ini digunakan untuk membuktikan pernyataan himpunan yang tidak berbentuk kesamaan, tetapi pernyataan yang berbentuk implikasi. Biasanya di dalam implikasi tersebut terdapat notasi himpunan bagian ($\subseteq$ atau $\subset$).

Contoh 31. Misalkan A dan B himpunan. Jika $A \cap B = \varnothing$ dan $A \subseteq (B \cup C)$ maka $A \subseteq C$. Buktikan!

Bukti:

(i) Dari definisi himpunan bagian, $P \subseteq Q$ jika dan hanya jika setiap $x \in P$ juga $\in Q$. Misalkan $x \in A$. Karena $A \subseteq (B \cup C)$, maka dari definisi himpunan bagian, x juga $\in (B \cup C)$.
Dari definisi operasi gabungan ($\cup$), $x \in (B \cup C)$ berarti $x \in B$ atau $x \in C$.

(ii) Karena $x \in A$ dan $A \cap B = \varnothing$, maka $x \notin B$

Dari (i) dan (ii), $x \in C$ harus benar. Karena $\forall x \in A$ juga berlaku $x \in C$, maka dapat

disimpulkan $A \subseteq C$.

Soal-Soal Matdis

BAB 1 HIMPUNAN

1. Diketahui ;

A = { bilangan asli kurang dari 5 }
B = { bilangan ganjil kurang dari 9 }
C = { bilangan prima kurang dari 13 }
D = { warna lampu lalu lintas }
Himpunan yang saling ekuivalen adalah?

2. Dalam satu kelas, 25 orang di antaranya senang basket, 35 orang senang volli, dan 15 orang senang keduanya. Banyak siswa dalam kelas itu adalah?

3. Banyaknya anggota dari $|A \cup B \cup C \cup D|$ jika setiap himpunan berukuran 50, setiap irisan dari dua himpunan berukuran 30, setiap irisan dari 3 himpunan berukuran 10, dan irisan dari keempat himpunan berukuran 2, adalah?

4. Banyaknya bilangan positif lebih kecil atau sama dengan 100 yang habis dibagi 6 atau 9 adalah ?

5. Dalam seleksi penerima beasiswa, setiapsiswa harus lulus tes matematika dan bahasa. Dari 180 peserta terdapat 103 orang dinyatakan lulus tes matematika dan 142 orang lulus tes bahasa. Banyak siswa yang dinyatakan lulus sebagai penerima beasiswa ada ?

6. Misalkan ada 1467 mahasiswa angkatan 2007 di jurusan matematika. 97 orang diantarannay adalah mahasiswa Prodi Pendidikan Matematika, 68 mahasiswa Prodi Matematika, dan 12 orang mahasiswa *double degree* Pendidikan Matematika dan Matematika. Jumlah mahasiswa yang tidak kuliah di Pendidikan Matematika atau Matematika adalah?

7. Jika himpunan $B \subset A$ dengan n(A) = 25 dan n(B) = 17, maka $n(A \cup B) = ?$

8. Banyaknya bilangan bulat antara 501 sampai 1000 yang tidak habis dibagi 3 atau 5 adalah?

9. Perhatikan persamaan berikut !

$(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$

Dengan menggunakan prinsip dualitas, maka hasil operasi himpunan tersebut adalah?

10. Perhatikan persamaan berikut !

(1) $A \cap P(A) = P(A)$
(2) $\{A\} \cup P(A) = P(A)$
(3) $A - P(A) = A$
(4) $\{A\} \in P(A)$

Yang merupakan pernyataan **salah** adalah?

SATUAN ACARA PENGAJARAN

(SAP)

Mata Kuliah	: Matematika Diskrit
Kode	: TIS 4223
Semester	: III
Waktu	: 3 x 50 Menit
Pertemuan	: 8

A. Kompetensi

1. Utama

   Mahasiswa dapat memahami Matematika Diskrit dengan materi yang telah disampaikan

2. Khusus

   Untuk mengevaluasi pemahaman mahasiswa terhadap materi 1 hingga 7

B. Pokok Bahasan

Matematika diskrit

C. Sub Pokok Bahasan

Ujian Tengah Semester

D. Keadaan Ujian

Tahapan Kegiatan	Kegiatan Pengajaran	Kegiatan mahasiswa	Media & Alat Peraga
Pendahuluan	1. Memberikan informasi peraturan ujian tengah semester	Memdengarkan dan memberikan komentar	Pengawas
Penyajian	1. Memberikan soal naskah ujian	Mengerjakan soal ujian dengan tertib	Naskah ujian dan pengawas
Penutup	1. Mengumpulkan lembaran jawaban ujian pada pengawas ujian	Meninggalkan ruangan ujian dengan tertib	Pengawas

E. Evaluasi

Yayasan Pendidikan Teknologi Padang
Institut Teknologi Padang
Jl.Gajah Mada Kandis Nanggalo Padang Telp 0751-7055202.email:info@itp.ac.id

---

UJIAN TENGAH SEMESTER GANJIL 2013/2014

Mata Kuliah	: Matematik Diskrik dan Logika
Kode/ SKS	: TIS3233
Program Studi	: Teknik Informatika
Hari/Tanggal	: ……………..
Waktu	: ……………………
Ruangan	: ………………..
Dosen	: Harison, M.Kom

Soal Ujian

1. Ilmu logika berhubungan dengan kalimat-kalimat (argumen-argumen) yang bernilai benar atau salah, tetapi tidak keduanya (Proposisi). Dari pernyataan dibawah ini coba anda tentukan mana proposisi dan yang bukan proposisi!
   a. 10 – 3 = 7
   b. 11 adalah bilangan prima
   c. Kualalumpur ibu kota Negara Malaysia
   d. Penduduk Indonesia berjumlah 50 juta jiwa
   e. Dimana letak pulau Bangka kalimat Tanya
   f. Siapa pemenang piala Thomas 2012 kalimat Tanya
   g. X + Y = 5

2. Misalkan Pernyataan p : hari ini panas dan q : Hari ini cerah
   Nyatakan lah simbol diawah ini menjadi kalimat?
   a. - p Λ q
   b. – p Λ –q
   c. – (p Λ q)
3. Buatlah tabel kebenaran dari symbol logika dibwah ini?
   a. – (-p v –q)
   b. (z Λ x) Λ – (z Λ x)

4. Misalkan U = {a, b, …, g, h}, *A* = {a, b, c, e} dan *B* = {b, e, f, h}. Buatlah Diagram Venn himpunan U dan Himpunan A dan B!
5.

6. Di antara bilangan bulat antara 200 – 800 (termasuk 200 dan 800 itu sendiri), berapa banyak bilangan yang tidak habis dibagi oleh 4 atau 5 namun tidak keduanya?
7. Misalkan $P = \{3, 4, 6\}$ dan $Q = \{6, 8, 9, 12, 15, 18\}$. Jika kita definisikan relasi R dari P ke Q dengan$(p, q) \in R$ jika p habis membagi q
   Maka anggota himpunan R adalah ?

8. Misalkan $R = \{(1,1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (4, 2)\}$ adalah relasi pada himpunan $\{1,2,3,4\}$. Representasikan R dengan graf berarah dan buatlah matrik R !

Semoga bias

Yayasan Pendidikan Teknologi Padang
Institut Teknologi Padang
Jl.Gajah Mada Kandis Nanggalo Padang Telp 0751-7055202.email:info@itp.ac.id

JAWABAN UJIAN TENGAH SEMESTER GANJIL 2013/2014

Mata Kuliah : Matematik Diskrik dan Logika
Kode/ SKS : TIS3233
Program Studi : Teknik Informatika
Hari/Tanggal : ……………..
Waktu : ……………………
Ruangan : ………………..
Dosen : Harison, S.Pd, M.Kom

1. Ilmu logika berhubungan dengan kalimat-kalimat (argumen-argumen) yang bernilai benar atau salah, tetapi tidak keduanya (Proposisi). Dari pernyataan dibawah ini coba anda tentukan mana proposisi dan yang bukan proposisi!

   a. 10 – 3 = 7 (benar karena hasilnya betul) proposisi
   b. 11 adalah bilangan prima (benar) proposisi
   c. Kualalumpur ibu kota Negara Malaysia (benar) proposisi
   d. Penduduk Indonesia berjumlah 50 juta jiwa (salah) proposisi
   e. Dimana letak pulau Bangka kalimat Tanya (bukan proposisi)
   f. Siapa pemenang piala Thomas 2012 kalimat Tanya (bukan proposisi)
   g. X + Y = 5 (bukan proposisi)

2. Misalkan Pernyataan p : hari ini panas dan q : Hari ini cerah
   Nyatakan lah simbol diawah ini menjadi kalimat?
   a. - p Λ q (hari ini tidak panas tetapi hari cerah)
   b. – p Λ –q (hari ini tidak panas dan tidak cerah)
   c. – (p Λ q) (hari ini hujan dan mendung)

3. Buatlah tabel kebenaran dari symbol logika dibwah ini?
   a. – (-p v –q)
   b. (z Λ x) Λ – (z Λ x)

   Jawaban a.

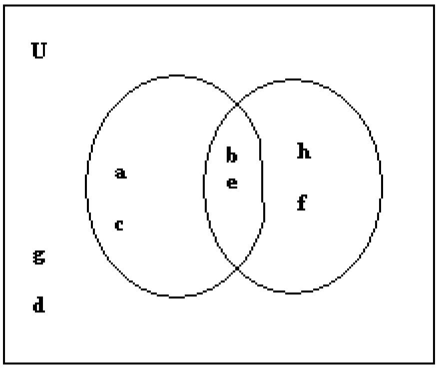
p	q	-p	-q	-pv-q	-(-pv-q)
T	T	F	F	F	T

T	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F
F	F	T	T	T	F

Jawaban b

z	x	z ^x	z v x	-(z v x)	(z ^ x)^-(zvx)
T	T	T	T	F	F
T	T	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	T	F

4. Misalkan U = {a, b, …, g, h}, *A* = {a, b, c, e} dan *B* = {b, e, f, h}. Buatlah Diagram Venn himpunan U dan Himpunan A dan B!
   JAWAB



5. Di antara bilangan bulat antara 200 – 800 (termasuk 200 dan 800 itu sendiri), berapa banyak bilangan yang tidak habis dibagi oleh 4 atau 5 namun tidak keduanya?

   Jawab
   IuI = 600
   IuI = I 800/4 I – I 200/4 I = 200 – 50 = 150
   I u I = I 800/5 I – I 200/5 I = 160 – 40 = 120

   I A ^ B I = I 800/ 20 I – I 200/ 20 I = 40 -10 = 30

   $\overline{\text{I A o B I}}$ = ?
   I A+B I = I A I + I B I – 2 I A ^ B I = 150 +120 – 60 = 210
   I A o B I = U – I A o B I = 600 – 210 = 390

6. Misalkan *P* = {3, 4, 6} dan *Q* = {6, 8, 9, 12, 15, 18}. Jika kita definisikan relasi *R* dari *P* ke *Q* dengan(p, q) $\in$ *R* jika *p* habis membagi *q*

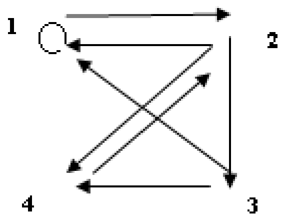
Maka anggota himpunan R adalah ?

Jawab

R = $\{(3,6),(3,9),(3,12),(3,15),(3,18),(4,8),(4,12)(6,6),(6,12),(6,18)\}$

7. Misalkan R = $\{(1,1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (4, 2)\}$ adalah relasi pada himpunan $\{1,2,3,4\}$. Representasikan R dengan graf berarah dan buatlah matrik R !

   a. Representasikan R dengan graf berarah

   b. matrik R

   $$R = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

SATUAN ACARA PENGAJARAN

(SAP)

Mata Kuliah	: Matematika Diskrit
Kode	: TIS 4223
Semester	: III
Waktu	: 3 x 50 Menit
Pertemuan	: 9 & 10

A. Kompetensi

1. Utama

   Mahasiswa dapat memahami Induksi Matematik dan Rekursi

2. Pendukung

   Mahasiswa dapat mengetahui tentang konsep induksi matematik, metode pembuktianya dan fungsi rekursi.

B. Pokok Bahasan

   Induksi matematik

C. Sub Pokok Bahasan

1. Konsep induksi matematik
2. Metode pembuktianya
3. Induksi kuat
4. Metode pembuktianya
5. Pengguaan insduksi kuat pada komputasi geometri
6. Pembuktian dengan well oldering
7. Fungsi rekursi
8. Himpunan rekursi dan strukturnya
9. Struktur induksi
10. Generalisasi induksi
11. Algoritma rekursi
12. Pembuktian kebenaran algoritma rekursi
13. Rekursi dan interasi

D. Kegiatan Belajar Mengajar

Tahapan Kegiatan	Kegiatan Pengajaran	Kegiatan mahasiswa	Media & Alat Peraga
Pendahuluan	1. Mereview materi sebelumnya 2. Menjelaskan hasil nilai ujian tengah semester	Memdengarkan dan memberikan komentar	Laptop, LCD, Papan tulis, Spidol
Penyajian	Menjelaskan tentang: 1. Konsep induksi matematik 2. Metode pembuktianya 3. Induksi kuat 4. Metode pembuktianya 5. Pengguaan insduksi kuat pada komputasi geometri 6. Pembuktian dengan well oldering 7. Fungsi rekursi 8. Himpunan rekursi dan strukturnya 9. Struktur induksi 10. Generalisasi induksi 11. Algoritma rekursi 12. Pembuktian kebenaran algoritma rekursi 13. Rekursi dan interasi	Memperthatikan , memcatat dan memberikan komentar, mengajukan pertanyaan	Laptop, LCD, Papan tulis, Spidol
Penutup	1. Mengajukan pertanyaan pada mahasiswa 2. Memberikan kesimpulan	Memperthatikan , memcatat dan memberikan komentar, mengajukan pertanyaandan	Laptop, LCD, Papan tulis, Spidol

3. Memberikan latihan tertulis dan diperiksa dikelas	mengerjkan latihan
4. Mengingatkan akan kewajiban untuk pertemuan selangjutnya	

E. Evaluasi

Evaluasi dilakukan dengan cara memberikan pertanyaan langsung dan memberikan latihan tertulis pada satu jam terakhir

Referensi

1) Jong jek siang, Matemtika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer,andi offset, Yogyakarta.2009
2) Rinaldi Munirm, Matematika diskrit, Informatika Bandung.2003

RENCANA KEGIATAN BELAJAR MINGGUAN
(RKBM)

Mata Kuliah	: Matematika Diskrit
Kode	: TIS 4223
Semester	: III
Waktu	: 3 x 50 Menit
Pertemuan	: 9&10

Minggu Ke-	TOPIK	METODE PEMBELAJARAN	Estmasi Waktu (menit)	Media & Alat Peraga

9	1. Konsep induksi matematik 2. Metode pembuktianya 3. Induksi kuat 4. Metode pembuktianya 1. Pengguaan insduksi kuat pada komputasi geometri 2. Pembuktian dengan well oldering 3. Fungsi rekursi 4. Himpunan rekursi dan strukturnya 5. Struktur induksi	Ceramah/ Orasi, dan diskusi kelas	1 x 3 x 50	Laptop, LCD, Papan tulis, Spidol

INDUKSI MATEMATIK DAN REKURSI

Definisi & Fungsi

Metoda pembuktian yang baku di dalam matematika.

Digunakan untuk membuktikan pernyataan perihal bilangan bulat positif.

Dapat mengurangi pembuktian bahwa semua bilangan bulat positif termasuk ke dalam suatu himpunan kebenaran dengan jumlah langkah terbatas

1. **Prinsip Induksi Matematika Sederhana**

Misalkan p(n) adalah pernyataan perihal bilangan bulat positif dan kita ingin membuktikan bahwa p(n) benar untuk semua bilangan bulat positif n. untuk membuktikan pernyataan ini, kita hanya perlu membuktikan bahwa :

1. Langkah 1 : P(1) benar/terdefinisi → **Basis Induksi**, dan
2. Langkah 2 : Untuk semua bilangan bulat positif $n \geq 1$, jika p(n) benar maka p(n+1) juga benar → **Hipotesis Induksi**

Bila kita sudah menunjukkan kedua langkah tersebut benar maka kita sudah membuktikan bahwa p(n) benar untuk semua bilangan bulat positif n

Contoh

Tunjukkan bahwa jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2 melalui induksi matematik.

Penyelesaian

1. Langkah 1(Basis induksi): Untuk n = 1, kita peroleh jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah $1^2 = 1$. Ini benar karena jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah 1
2. Langkah 2 (Hipotesis induksi): Andaikan untuk $n \geq 1$ pernyataan $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ adalah benar [bilangan ganjil positif ke-n adalah (2n – 1)].

Kita harus memperlihatkan bahwa $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$ juga benar.

Hal ini dapat kita tunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) &= [1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)] + (2n + 1) \\ &= n^2 + (2n + 1) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n + 1)^2 \rightarrow \text{benar}\end{aligned}$$

Karena langkah 1 dan langkah 2 keduanya telah dibuktikan benar, maka jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2 .

Prinsip Induksi yang Dirampatkan

Misalkan p(n) adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan kita ingin membuktikan bahwa p(n) benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$.

Untuk membuktikan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

1. Basis Induksi: $p(n_0)$ benar, dan
2. Hipotesis Induksi : Untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$, jika p(n) benar maka p(n+1) juga benar

Contoh

Tunjukkan bahwa untuk $n \geq 1$, $1+2+3+\ldots+n = n(n+1)/2$ melalui induksi matematik.

Penyelesaian

1. Langkah 1(Basis induksi): Untuk n = 1, kita peroleh 1 = 1 (1+1) / 2.

$1 = 1(1+1)/2 = 1(2)/2 = 2/2 = 1$ → benar dan terdefinisi

1. Langkah 2 (Hipotesis induksi) : Andaikan bahwa untuk $n \geq 1$, $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n+1)/2$ adalah benar (hipotesi induksi).

Kita harus menunjukkan bahwa

$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = (n+1)[(n+1) + 1)]/2$ juga benar.

Untuk membuktikan ini, tunjukkan bahwa

$$
\begin{aligned}
1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) &= (1 + 2 + 3 + \ldots + n) + (n+1) \\
&= [\, n(n+1)/2 \,] + (n+1) \\
&= [\, (n^2 + n)/2 \,] + (n + 1) \\
&= [\, (n^2 + n)/2 \,] + [\, (2n + 2)/2 \,] \\
&= (n^2 + 3n + 2)/2 \\
&= (n+1)(n + 2)/2 \\
&= [\, (n + 1)(n + 1) + 1 \,]/2 \rightarrow \text{benar}
\end{aligned}
$$

Karena langkah 1 dan langkah 2 keduanya telah dibuktikan benar, maka untuk semua bilangan bulat positif n terbukti $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n+1)/2$.

2 **Prinsip Induksi Kuat**

Misalkan p(n) adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan kita ingin membuktikan bahwa p(n) benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$. Untuk membuktikan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

1. $p(n_0)$ benar, dan

2. untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$, jika $p(n_0)$, $p(n_0+1)$, …, $p(n)$ benar maka $p(n+1)$ juga benar.

   Contoh

Bilangan bulat positif disebut prima jika dan hanya jika bilangan bulat tersebut habis dibagi dengan 1 dan dirinya sendiri. Kita ingin membuktikan bahwa setiap bilangan bulat positif n ($n \geq 2$) dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima. Buktikan dengan prinsip induksi kuat.

Penyelesaian

1. *Basis induksi*. Jika $n = 2$, maka 2 sendiri adalah bilangan prima dan di sini 2 dapat dinyatakan sebagai perkalian dari satu buah bilangan prima, yaitu dirinya sendiri.
2. *Langkah induksi*. Misalkan pernyataan bahwa bilangan 2, 3, …, n dapat dinyatakan sebagai perkalian (satu atau lebih) bilangan prima adalah benar (hipotesis induksi). Kita perlu menunjukkan bahwa $n + 1$ juga dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima.

Penyelesaian

2. *Langkah induksi (lanjutan)*

   Ada dua kemungkinan nilai n + 1:

   Jika $n + 1$ sendiri bilangan prima, maka jelas ia dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima.

   Jika $n + 1$ bukan bilangan prima, maka terdapat bilangan bulat positif a yang membagi habis $n + 1$ tanpa sisa. Dengan kata lain

   $(n + 1)/ a = b$ atau $(n + 1) = ab$ yang dalam hal ini, $2 \leq a \leq b \leq n$.

   Menurut hipotesis induksi, a dan b dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima. Ini berarti, $n + 1$ jelas dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima, karena $n + 1 = ab$.

   Karena langkah 1 dan langkah 2 sudah ditunjukkan benar, maka terbukti bahwa setiap bilangan bulat positif n ($n \geq 2$) dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima

3 **Bentuk Induksi Secara Umum**

Relasi biner "<" pada himpunan X dikatakan terurut dengan baik (atau himpunan X dikatakan terurut dengan baik dengan "<") bila memiliki properti berikut:

1. Diberikan $x, y, z \in X$, jika $x < y$ dan $y < z$, maka $x < z$.

2. Diberikan x, $y \in X$. Salah satu dari kemungkinan ini benar: $x < y$ atau $y < x$ atau $x = y$.
3. Jika A adalah himpunan bagian tidak kosong dari X, terdapat elemen $x \in A$ sedemikian sehingga $x \leq y$ untuk semua $y \in A$. Dengan kata lain, setiap himpunan bagian tidak kosong dari X mengandung "elemen terkecil".

Misalkan X terurut dengan baik oleh "<", dan p(x) adalah pernyataan perihal elemen x dari X. Kita ingin membuktikan bahwa p(x) benar untuk semua $x \in X$. Untuk membuktikan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

4. $p(x_0)$ benar, yang dalam hal ini x_0 adalah elemen terkecil di dalam X, dan
5. Untuk semua $x > x_0$ di dalam X, jika p(y) benar untuk semua $y < x$, maka p(x) juga benar.

Tinjau barisan bilangan yang didefinisikan sebagai berikut:

Sebagai contoh,

$$S_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{jika } m = 0 \text{ dan } n = 0 \\ S_{m-1,n} + 1 & \text{jika } n = 0 \\ S_{m,n-1} + 1 & \text{jika } n \neq 0 \end{cases}$$

$S_{0,0} = 0$ $\qquad$ $S_{1,0} = S_{0,0} + 1 = 0 + 1 = 1$

$S_{0,1} = S_{0,0} + 1 = 1$ $\qquad$ $S_{1,1} = S_{1,0} + 1 = 1 + 1 = 2$

$S_{2,0} = S_{1,0} + 1 = 2$ $\qquad$ $S_{2,1} = S_{2,0} + 1 = 3, \ldots$

Buktikanlah dengan induksi matematik bahwa untuk pasangan tidak negatif m dan n, $S_{m,n} = m + n$.

Penyelesaian

Basis induksi. Karena (0, 0) adalah elemen terkecil di dalam X, maka $S_{0,0} = 0 + 0 = 0$. Ini benar dari definisi $S_{0,0}$.

Langkah induksi. Buktikan untuk semua $(m, n) > (0, 0)$ di dalam X bahwa jika $S_{m',n'} = m' + n'$ benar untuk semua $(m', n') < (m, n)$ maka $S_{m,n} = m + n$ juga benar. Andaikan bahwa $S_{m',n'} = m' + n'$ benar untuk semua $(m', n') < (m,n)$. Ini adalah hipotesis induksi. Kita perlu menunjukkan bahwa $S_{m,n} = m + n$, baik untuk $n = 0$ atau $n \neq 0$.

Kasus 1: Jika $n = 0$, maka dari definisi $S_{m,n} = S_{m-1,n} + 1$.

Karena $(m-1, n) < (m, n)$, maka dari hipotesis induksi,

$S_{m\text{-}1,\, n} = (m - 1) + n$

sehingga $S_{m,n} = S_{m\text{-}1,n} + 1 = (m - 1) + n + 1 = m + n$.

Penyelesaian

Langkah induksi (lanjutan)

Kasus 2: Jika $n \neq 0$, maka dari definisi $S_{m,n} = S_{m,n\text{-}1} + 1$.

Karena (m, n-1) < (m, n), maka dari hipotesis induksi,

$S_{m,\, \text{n-1}} = m + (n - 1)$

sehingga $S_{m,\; n} = S_{m,\, n\text{-}1} + 1 = m + (n - 1) + 1 = m + n$.

Soal Latihan

1. Temukan rumus untuk menghitung ½ + ¼ + 1/8 + … + $1/2^n$ gan memeriksa nilai-nilai ekspresi untuk n yang kecil, lalu gunakan induksi matematik untuk membuktikan rumus itu.

Jawaban:

Rumus ditentukan secara empirik dengan mencoba untuk n yang kecil;

$n = 1 \rightarrow ½ = (2^1 - 1)/2^1$
$n = 2 \rightarrow ½ + ¼ = ¾ = (2^2 - 1)/2^2$
$n = 3 \rightarrow ½ + ¼ + 1/8 = 9/8 = (2^3 - 1)/2^3$
…
$n = k \rightarrow ½ + ¼ + 1/8 + \ldots + 1/2^k = (2^k - 1)/2^k$

Jadi, dapat disimpulkan (untuk sementara) bahwa

$½ + ¼ + 1/8 + \ldots + 1/2^n = (2^n - 1)/2^n \qquad , n \geq 1$

Pembuktian dengan induksi matematik:

(i) basis induksi (n = 1)

Untuk n = 1, rumus tersebut jelas benar sebab

$1/2 = (2^1 - 1)/2^1 = 1/2$

(ii) langkah induksi

Andaikan bahwa untuk $n \geq 1$ jumlah deret $½ + ¼ + 1/8 + \ldots + 1/2^n = (2^n - 1)/2^n$ adalah benar.

Harus dibuktikan bahwa untuk n + 1 jumlah deret tersebut adalah

$½ + ¼ + 1/8 + \ldots 1/2^n + 1/2^{n+1} = (2^{n+1} - 1)/2^{n+1}$

Ini ditunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
½ + ¼ + 1/8 + \ldots 1/2^n + 1/2^{n+1} &= (½ + ¼ + 1/8 + \ldots 1/2^n) + 1/2^{n+1} \\
&= (2^n - 1)/2^n + 1/2^{n+1} \\
&= 2(2^n - 1)/2.2^n + 1/2^{n+1} \\
&= 2(2^n - 1)/2^{n+1} + 1/2^{n+1} \\
&= (2^{n+1} - 2 + 1)/2^{n+1} \\
&= (2^{n+1} - 1)/2^{n+1}
\end{aligned}$$

Karena langkah (i) dan (ii) sudah dibuktikan benar, maka terbukti bahwa

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1/8 + \ldots + 1/2^n = (2^n - 1)/2^n$

2. Buktikan dengan induksi matematik bahwa $n^5 - n$ habis dibagi 5 untuk n bilangan bulat positif.

Jawaban:

(i) basis induksi ($n = 1$)

Untuk $n = 1$, jelas benar bahwa $1^5 - 1 = 0$ habis dibagi 5.

(ii) langkah induksi

Andaikan bahwa "$n^5 - n$ habis dibagi 5 untuk $n > 0$" adalah benar. Harus dibuktikan bahwa untuk $(n+1)^5 - (n+1)$ juga habis dibagi 5. Ini ditunjukkan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
(n+1)^5 - (n+1) &= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n - 1 \\
&= n^5 - n + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n \\
&= (n^5 - n) + 5(n^4 + 2n^3 + 5n^2 + n)
\end{aligned}
$$

$(n^5 - n)$ habis dibagi 5 (menurut hipotesis induksi) dan $5(n^4 + 2n^3 + 5n^2 + n)$ jelas juga habis dibagi 5, sehingga $(n^5 - n) + 5(n^4 + 2n^3 + 5n^2 + n)$ habis dibagi 5. Dengan demikian, terbukti $(n+1)^5 - (n+1)$ habis dibagi 5.

Karena langkah (i) dan (ii) sudah dibuktikan benar, maka terbukti bahwa $n^5 - n$ habis dibagi 5 untuk n bilangan bulat positif.

3. Buktikan bahwa $3^n < n!$ untuk n bilangan bulat positif lebih besar dari 6.

Jawaban:

(i) basis induksi ($n = 7$)

Untuk $n = 7$, jelas $3^7 < 7!$ benar sebab $3^7 = 2187$ dan $7! = 5040$

(ii) langkah induksi

Andaikan bahwa $3^n < n!$ untuk $n > 6$ adalah benar. Harus ditunjukkan bahwa $3^{n+1} < (n+1)!$ juga benar. Hal ini ditunjukkan sebagai berikut:

$3^{n+1} < (n+1)!$

$3.3^n < (n+1) . n!$

$3^n . 3/(n+1) < n!$

Menurut hipotesis induksi, $3^n < n!$, sedangkan untuk $n > 6$, nilai $3/(n+1) < 1$, sehingga $3/(n+1)$ akan memperkecil nilai di ruas kiri persamaan. Efek nettonya, $3^n . 3/(n+1) < n!$ jelas benar.

Karena langkah (i) dan (ii) sudah dibuktikan benar, maka terbukti bahwa $3^n < n!$

4. Untuk biaya pos berapa saja yang dapat menggunakan perangko senilai 5 sen dan 6 sen? Buktikan jawaban anda dengan induksi matematik.

Jawaban: Kombinasi biaya pos dengan perangko 5 sen dan 6 sen dapat ditulis sebagai $5m + 6n$, dengan m dan n adalah bilangan bulat. Dengan mencoba kombinasi nilai m dan n mulai

dari 0, 1, 2, 3, 4, …, maka diperoleh biaya pos yang dapat dibayar mulai 20 sen, 21 sen, 22 sen dan seterusnya.
Akan kita buktikan dengan induksi matematika bahwa untuk biaya pos sebesar $n \geq 20$ sen selalu dapat menggunakan perangko 5 sen dan 6 sen.

(i) basis induksi ($n = 20$)
Untuk biaya pos sebesar 20 sen, kita dapat menggunakan 4 perangko 5 sen saja. Ini jelas benar.

(ii) langkah induksi
Andaikan pernyataan bahwa "biaya pos sebesar $n \geq 20$ sen selalu dapat menggunakan perangko 5 sen dan 6 sen" adalah benar. Kita harus menunjukkan bahwa untuk biaya pos sebesar $n + 1$ sen juga dapat menggunakan perangko 5 sen dan 6 sen saja.
Ada dua kemungkinan yang harus kita tinjau:

1) jika untuk membayar biaya pos n sen digunakan perangko 5 sen saja, maka paling sedikit digunakan 4 buah perangko 5 sen (sebab $n \geq 20$), maka dengan mengganti sebuah perangko 5 sen dengan 6 sen selalu dapat dibayar biaya pos sebesar $n + 1$ sen.
2) jika untuk membayar biaya pos n sen digunakan perangko 6 sen, maka paling sedikit digunakan 4 buah perangko 6 sen (sebab $n \geq 20$). Dengan mengganti 4 buah perangko 6 sen dengan 5 buah, diperoleh susunan perangko senilai $n + 1$ sen.

Karena langkah (i) dan (ii) sudah dibuktikan benar, maka terbukti bahwa biaya pos sebesar $n \geq 20$ sen selalu dapat menggunakan perangko 5 sen dan 6 sen.

5. Tinjau runtunan nilai yang didefinisikan sebagai berikut:

$S_{1,1} = 5$

Untuk semua pasang bilangan bulat positif (m, n), kecuali, (1,1) didefinisikan

$$S_{m,n} = \begin{cases} S_{m-1,n} + 2 & \text{jika } n = 1 \\ S_{m,n-1} + 2 & \text{jika } n \neq 1 \end{cases}$$

Buktikan dengan induksi matematika bahwa untuk semua pasangan bilangan bulat positif (m, n), berlaku

$$S_{m,n} = 2(m + n) + 1$$

<u>Jawaban</u>: (ditinggalkan sebagai latihan saja)

REKURSIF

1. Pengertian Rekursif

Rekursif berarti bahwa suatu proses bisa memanggil dirinya sendiri. Menurut definisi dalam *Microsoft Bookshelf*, Rekursif adalah kemampuan suatu rutin untuk memanggil dirinya sendiri. Dalam Rekursif sebenarnya terkandung pengertian prosedur dan fungsi. Perbedaannya adalah bahwa rekursif bisa memanggil ke dirinya sendiri, tetapi prosedur dan fungsi harus dipanggil lewat pemanggil prosedur dan fungsi. Rekursif merupakan teknik pemrograman yang penting dan beberapa bahasa pemrograman mendukung keberadaan proses rekursif ini. Dalam prosedur dan fungsi, pemanggilan ke dirinya sendiri bisa berarti proses berulang yang tidak bisa diketahui kapan akan berakhir.

Contoh paling sederhana dari proses rekursif ini adalah proses menghitung nilai factorial dari suatu bilangan bulat positif dan mencari deret Fibbonacci dari suatu bilangan bulat.

1. Nilai factorial secara rekursif dapat ditulis sebagai

   0 ! = 1

   N ! = N x (N-1) !

yang secara pemrograman dapat ditulis sebagai

Faktorial(0) = 1 (1)

Faktorial(N) = N*Faktorial(N-1) (2)

Persamaan (2) di atas adalah contoh hubungan rekurens (*recurrence relation*), yang berarti bahwa nilai suatu fungsi dengan argumen tertentu bisa dihitung dari fungsi yang sama dengan argumen yang lebih kecil. Persamaan (1) tidak bersifat rekursif, disebut nilai awal atau basis. Setiap fungsi rekursif paling sedikit mempunyai satu nilai awal, jika tidak fungsi tersebut tidak bisa dihitung secara eksplisit.

2. Bilangan Fibbonacci didefinisikan sebagai berikut

   1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 …

dari barisan tersebut dapat dilihat bahwa bilangan ke-N (N>2) dalam barisan dapat dicari dari dua bilangan sebelumnya yang terdekat dengan bilangan N, yaitu bilangan ke-(N-1) dan bilangan ke-(N-2), sehingga dapat dirumuskan sebagai

Fibbonacci(1) = 1 (1)

Fibbonacci(2) = 1 (2)

Fibbonacci(N) = Fibbonacci(N-1) + Fibbonacci(N-2) (3)

Dengan persamaan (1) dan (2) adalah basis dan persamaan (3) adalah rekurensnya

2 Definisi Rekursif kedua

Ada kalanya kita mengalami kesulitan untuk mendefinisikan suatu obyek secara eksplisit. Mungkin lebih mudah untuk mendefinisikan obyek tersebut dengan menggunakan dirinya sendiri. Ini dinamakan sebagai proses rekursif. Kita dapat mendefinikan barisan, fungsi dan himpunan secara rekursif.

Barisan yang didefinisikan secara rekursif

Contoh:

Barisan bilangan pangkat dari 2

$a_n = 2^n$ untuk n = 0, 1, 2, … .

Barisan ini dapat didefinisikan secara rekursif:

$a_0 = 1$

$a_{n+1} = 2a_n$ untuk n = 0, 1, 2, …

Langkah-langkah untuk mendefinisikan barisan secara rekursif:

1. Langkah basis: Spesifikasi anggota awal.
2. Langkah rekursif: Berikan aturan untuk membangun anggota baru dari anggota yang telah ada.
3. Berikan definisi rekursif dari $a_n=r^n$, dengan $r \in N$, $r \neq 0$ dan n bilangan bulat positif.
4. Solusi:
5. Definisikan $a_0=r^0=1$
6. dan $a_{n+1}=r \cdot a_n$ untuk n = 0, 1, 2, …

Fungsi yang didefinisikan secara rekursif

Langkah-langkah untuk mendefinisikan fungsi dengan domain bilangan cacah:

1. Langkah basis: Definisikan nilai fungsi pada saat nol.
2. Langkah rekursif: Berikan aturan untuk mencari nilai fungsi untuk setiap bilangan bulat berdasarkan nilai fungsi pada bilangan bulat yang lebih kecil.

Definisi seperti itu disebut rekursif atau definisi induktif.

Contoh

f(0) = 3

f(n + 1) = 2f(n) + 3

Maka

f(0) = 3

$f(1) = 2f(0) + 3 = 2 \cdot 3 + 3 = 9$

$f(2) = 2f(1) + 3 = 2 \cdot 9 + 3 = 21$

$f(3) = 2f(2) + 3 = 2 \cdot 21 + 3 = 45$

$f(4) = 2f(3) + 3 = 2 \cdot 45 + 3 = 93$

Bagaimana kita dapat mendefinisikan fungsi faktorial f(n) = n! secara rekursif?

$f(0) = 1$

Karena (n+1)! = n! (n+1) maka

$f(n + 1) = (n + 1)f(n)$

$f(0) = 1$

$f(1) = 1\ f(0) = 1 \cdot 1 = 1$

$f(2) = 2\ f(1) = 2 \cdot 1 = 2$

$f(3) = 3\ f(2) = 3 \cdot 2 = 6$

$f(4) = 4\ f(3) = 4 \cdot 6 = 24$

Contoh fungsi yang didefinisikan secara rekursif (3)

Bagaimana kita dapat mendefinisikan fungsi

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

secara rekursif?

Himpunan yang didefinisikan secara rekursif

Langkah-langkah dalam mendefinisikan suatu himpunan secara rekursif:

1. Langkah basis:
   Spesifikasi koleksi awal dari anggota
2. Langkah rekursif:
   Mendefinisikan aturan konstruksi anggota baru dari anggota yang telah diketahui

Misalkan S didefinisikan secara rekursif oleh:

$3 \in S$

$(x+y) \in S$ jika $x \in S$ dan $y \in S$

Maka S adalah himpunan bilangan bulat positif yang habis dibagi 3.

Bukti:

Misalkan A himpunan yang beranggotakan semua bilangan bulat positif yang habis dibagi 3.

Untuk membuktikan bahwa A = S, harus ditunjukkan

$A \subseteq S$ and $S \subseteq A$.

Bagian I: Akan dibuktikan $A \subseteq S$, yaitu menunjukkan bahwa setiap bilangan bulat positif yang habis dibagi 3 ada di S (dengan menggunakan induksi matematika).

Misalkan P(n): proposisi "3n anggota S".

1. Langkah basis: P(1) benar, karena $3 \in S$.
2. Langkah induktif:

   Asumsikan P(k) benar, yaitu $3k \in S$.

   Akan ditunjukkan P(k+1) juga benar, yaitu

   $3(k+1) \in S$

   Karena $3k \in S$ dan $3 \in S$, berdasarkan definisi rekursif dari S, $3k+3 = 3(k+1)$

juga ada di S.

3. Konklusi:

   Jadi, setiap bilangan bulat positif yang habis dibagi 3 ada di S.

Kesimpulan dari bagian I adalah $A \subseteq S$.

Bagian II: Akan ditunjukkan $S \subseteq A$ dengan menggunakan definisi rekursif dari S.

Langkah basis:

Akan ditunjukkan setiap anggota awal S ada di A.

Karena 3 habis dibagi 3 maka $3 \in A$.

Langkah rekursif:

Akan ditunjukkan bahwa setiap bilangan bulat yang dibangun dengan mengunakan langkah rekursif juga merupakan anggota A, yaitu

$(x+y) \in A$ jika $x,y \in S$ (yang diasumsikan $\in A$).

Jika x dan y keduanya di A, maka $3 \mid x$ dan $3 \mid y$. Akibatnya, $3 \mid (x + y)$.

Kesimpulan dari bagian II adalah $S \subseteq A$.

Jadi, secara keseluruhan, berlaku $A = S$.

3 Induksi Struktural

Dalam membuktikan hasil-hasil yang berkaitan dengan himpunan yang didefinisikan secara rekursif, akan lebih mudah apabila digunakan suatu bentuk induksi matematika yang disebut induksi struktural.

Langkah-langkah dalam induksi struktural:

1. Langkah basis:

   Menunjukkan bahwa hasil yang akan dibuktikan berlaku untuk semua anggota awal.
2. Langkah rekursif:

Menunjukkan bahwa jika hasil yang akan dibuktikan berlaku untuk anggota-anggota yang digunakan untuk membangun anggota baru, maka hasil tersebut juga berlaku untuk anggota yang baru dibangun.

3. Rinaldi Munir, “Materi Kuliah Matematika Diskrit”,Informatika-ITB, Bandung,2003
4. Rinaldi Munir, “Matematika Diskrit”,Informatika, Bandung,2001

Soal matematika induksi

1. Buktikan $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (\frac{1}{2}n(n+1))^2$ berlaku untuk setiap n bilangan asli?

2. Buktikan $1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ berlaku untuk setiap n bilangan asli?

3. Buktikan untuk setiap bilangan asli n berlaku
$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \ldots - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n}$?

4. Buktikan kuadrat bilangan yang terdiri 2 angka, adalah bilangan yang terdiri dari 3 angka atau 4 angka?

5. Buktikan jika suatu bilangan habis dibagi 4, maka bilangan tersebut habis dibagi 2?

6. Buktikan jarak $A(x_1,y_1)$ dan $B(x_2,y_2)$ adalah $\sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$?

7. Buktikan jika segitiga ABC sama sisi maka segitiga tersebut sama kaki?

8. Buktikan bahwa $\sqrt{3}$ bilangan irasional ?

9. Buktikan jika n^2 bilangan ganjil, maka n ganjil (n bilangan asli) ?

10. Buktikan jika suatu segitiga siku-siku, maka dua sudut yang lain lancip ?

SATUAN ACARA PENGAJARAN
(SAP)

Mata Kuliah	: Matematika Diskrit
Kode	: TIS 4223
Semester	: III
Waktu	: 3 x 50 Menit
Pertemuan	: 11 & 12

A. Kompetensi

1. Utama

   Mahasiswa dapat memahami tentang Kombinasi.

2. Pendukung

   Mahasiswa dapat mengetahui tentang Kombinasi

B. Pokok Bahasan

Kombinasi

C. Sub Pokok Bahasan

6. Kombinasi
   6.1. Dasar-dasar perhitungan
   6.2. Kombinasi Dan Pemutasian
   6.3. Koefesien Binomial

D. Korespondensi satu-satu Kegiatan Belajar Mengajar

Tahapan Kegiatan	Kegiatan Pengajaran	Kegiatan mahasiswa	Media & Alat Peraga
Pendahuluan	1. Mereview materi sebelumnya 2. Menjelaskan materi-materi akan dibahas	Memdengarkan dan memberikan komentar	Laptop, LCD, Papan tulis, Spidol
Penyajian	Menjelaskan tentang: 1. Kombinasi 1.1. Dasar-dasar perhitungan 1.2. Aturan penjumlahan 1.3. Aturan perkalian 1.4. Peerhitungan tak langsung	Memperthatikan, memcatat dan memberikan komentar, mengajukan pertanyaan	Laptop, LCD, Papan tulis, Spidol

	2. Kombinasi Dan Pemutasian 2.1. Factorial 2.2. Kombinasi 2.3. Permutasi 2.4. Kombinasi dan pemutasi dengan elemen berulang 3. Koefesien Binomial 3.1. Indentitas-identitas dalam kombinasi dan permutasi		
Penutup	1. Mengajukan pertanyaan pada mahasiswa 2. Memberikan kesimpulan 3. Memberikan latihan tertulis dan diperiksa dikelas 4. Mengingatkan akan kewajiban untuk pertemuan selangjutnya	Memperthatikan, memcatat dan memberikan komentar, mengajukan pertanyaan dan mengerjakan latihan	Laptop, LCD, Papan tulis, Spidol

E. Evaluasi

Evaluasi dilakukan dengan cara memberikan pertanyaan langsung dan memberikan latihan tertulis pada satu jam terakhir

Referensi

1) Jong jek siang, Matemtika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer,andi offset, Yogyakarta.2009
2) Rinaldi Munirm, Matematika diskrit, Informatika Bandung.2003

RENCANA KEGIATAN BELAJAR MINGGUAN
(RKBM)

Mata Kuliah : Matematika Diskrit
Kode : TIS 4223
Semester : III
Waktu : 3 x 50 Menit
Pertemuan : 11 & 12

Minggu Ke-	TOPIK	METODE PEMBELAJARAN	Estmasi Waktu (menit)	Media & Alat Peraga
11	1. Kombinasi 1.1. Dasar-dasar perhitungan 1.2. Aturan penjumlahan 1.3. Aturan perkalian 1.4. Peerhitungan tak langsung	Ceramah/ Orasi, dan diskusi kelas	1 x 3 x 50	Laptop, LCD, Papan tulis, Spidol

Minggu Ke-	TOPIK	METODE PEMBELAJARAN	Estmasi Waktu (menit)	Media & Alat Peraga
12	1. Kombinasi Dan Pemutasian 1.1. Factorial 1.2. Kombinasi 1.3. Permutasi 1.4. Kombinasi dan pemutasi dengan elemen berulang 2. Koefesien Binomial 2.1. Indentitas-identitas dalam kombinasi dan permutasi	Ceramah/ Orasi, dan diskusi kelas	1 x 3 x 50	Laptop, LCD, Papan tulis, Spidol

KOMBINATORIAL

Pendahuluan

Sebuah sandi-lewat (*password*) panjangnya 6 sampai 8 karakter. Karakter boleh berupa huruf atau angka. Berapa banyak kemungkinan sandi-lewat yang dapat dibuat?

abcdef
aaaade
a123fr
…
erhtgahn
yutresik
…

????

Kombinatorial adalah cabang matematika untuk menghitung jumlah penyusunan objek-objek tanpa harus mengenumerasi semua kemungkinan susunannya.

1. Kaidah Dasar Menghitung

Kaidah perkalian (*rule of product*)

Percobaan 1: p hasil
Percobaan 2: q hasil
Percobaan 1 **dan** percobaan 2: $p \times q$ hasil

Kaidah penjumlahan (*rule of sum*)

Percobaan 1: p hasil
Percobaan 2: q hasil
Percobaan 1 **atau** percobaan 2: $p + q$ hasil

Contoh 1. Ketua angkatan IF 2002 hanya 1 orang (pria atau wanita, tidak bias gender). Jumlah pria IF2002 = 65 orang dan jumlah wanita = 15 orang. Berapa banyak cara memilih ketua angkatan?

Penyelesaian: 65 + 15 = 80 cara.

Contoh 2. Dua orang perwakilan IF2002 mendatangai Bapak Dosen untuk protes nilai ujian. Wakil yang dipilih 1 orang pria dan 1 orang wanita. Berapa banyak cara memilih 2 orang wakil tesrebut?

Penyelesaian: $65 \times 15 = 975$ cara.

2 Perluasan Kaidah Dasar Menghitung

Misalkan ada n percobaan, masing-masing dg p_i hasil

1. Kaidah perkalian (*rule of product*)

$p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$ hasil

2. Kaidah penjumlahan (*rule of sum*)

$p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ hasil

Contoh 3. Bit biner hanya 0 dan 1. Berapa banyak *string* biner yang dapat dibentuk jika:

(a) panjang *string* 5 bit

(b) panjang *string* 8 bit (= 1 *byte*)

Penyelesaian:

(a) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$ buah

(b) $2^8 = 256$ buah

Contoh 5. Sandi-lewat (*password*) sistem komputer panjangnya 6 sampai 8 karakter. Tiap karakter boleh berupa huruf atau angka; huruf besar dan huruf kecil tidak dibedakan. Berapa banyak sandi-lewat yang dapat dibuat?

Penyelesaian:

Jumlah karakter password = 26 (A-Z) + 10 (0-9) = 36 karakter.

Jumlah kemungkinan sandi-lewat dengan panjang 6 karakter:(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 36^6 = 2.176.782.336

Jumlah kemungkinan sandi-lewat dengan panjang 7 karakter:
(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 36^7 = 78.364.164.096

umlah kemungkinan sandi-lewat dengan panjang 8 karakter:
(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 36^8 = 2.821.109.907.456

Jumlah seluruh sandi-lewat (kaidah penjumlahan) adalah

2.176.782.336 + 78.364.164.096 + 2.821.109.907.456 =

2.901.650.833.888 buah.

Latihan:

1. (a) Berapa banyak bilangan genap 2-angka?

   (b) Berapa banyak bilangan ganjil 2-angka dengan setiap angka berbeda?

2. Dari 100.000 buah bilangan bulat positif pertama, berapa banyak bilangan yang mengandung tepat 1 buah angka 3, 1 buah angka 4, dan 1 buah angka 5?

3. Tersedia 6 huruf: a, b, c, d, e, f. Berapa jumlah pengurutan 3 huruf jika:

(a) tidak ada huruf yang diulang;

(b) boleh ada huruf yang berulang;

(c) tidak boleh ada huruf yang diulang, tetapi huruf *e* harus ada;

(d) boleh ada huruf yang berulang, huruf *e* harus ada

4. Tentukan banyak cara pengaturan agar 3 orang mahasiswa Jurusan Teknik Informatika (IF), 4 orang mahasiswa Teknik Kimia (TK), 4 orang mahasiswa Teknik Geologi (GL), dan 2 orang mahasiswa Farmasi (FA) dapat duduk dalam satu baris sehingga mereka dari departemen yang sama duduk berdampingan?

3. Prinsip Inklusi-Eksklusi

Setiap *byte* disusun oleh 8-bit. Berapa banyak jumlah *byte* yang dimulai dengan '11' atau berakhir dengan '11'?

Penyelesaian:

Misalkan

A = himpunan *byte* yang dimulai dengan '11',

B = himpunan *byte* yang diakhiri dengan '11'

$A \cap B$ = himpunan *byte* yang berawal dan berakhir dengan '11'

maka

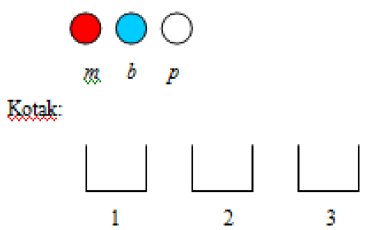
$A \cup B$ = himpunan *byte* yang berawal dengan '11' atau berakhir dengan '11'

$$|A| = 2^6 = 64, \quad |B| = 2^6 = 64, \quad |A \cap B| = 2^4 = 16.$$

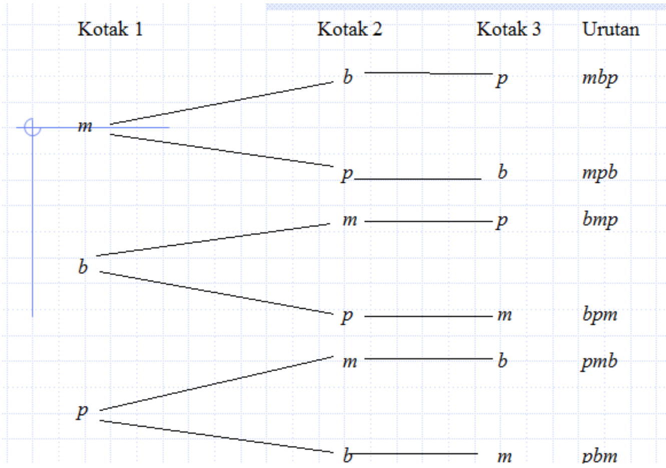
maka

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
$$= 2^6 + 2^6 - 16 = 64 + 64 - 16 = 112.$$

4. Permutasi



Berapa jumlah urutan berbeda yang mungkin dibuat dari penempatan bola ke dalam kotak-kotak tersebut?



Jumlah kemungkinan urutan berbeda dari penempatan bola ke dalam kotak adalah (3)(2)(1) = 3! = 6.

Definisi: Permutasi adalah jumlah urutan berbeda dari pengaturan objek-objek.

Permutasi merupakan bentuk khusus aplikasi kaidah perkalian.

Misalkan jumlah objek adalah n, maka

- ✓ urutan pertama dipilih dari n objek,
- ✓ urutan kedua dipilih dari $n - 1$ objek,
- ✓ urutan ketiga dipilih dari $n - 2$ objek,
- ✓ …
- ✓ urutan terakhir dipilih dari 1 objek yang tersisa.

Menurut kaidah perkalian, permutasi dari n objek adalah

$$n(n-1)(n-2) \ldots (2)(1) = n!$$

Contoh 6. Berapa banyak "kata" yang terbentuk dari kata "HAPUS"?

Penyelesaian:

Cara 1: (5)(4)(3)(2)(1) = 120 buah kata

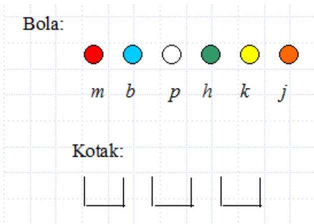
Cara 2: $P(5, 5) = 5! = 120$ buah kata

Contoh 7. Berapa banyak cara mengurutkan nama 25 orang mahasiswa?

Penyelesaian: $P(25, 25) = 25!$

Permutasi r dari n elemen

Ada enam buah bola yang berbeda warnanya dan 3 buah kotak. Masing-masing kotak hanya boleh diisi 1 buah bola. Berapa jumlah urutan berbeda yang mungkin dibuat dari penempatan bola ke dalam kotak-kotak tersebut?



<u>Penyelesaian</u>:

kotak 1 dapat diisi oleh salah satu dari 6 bola (ada 6 pilihan);

kotak 2 dapat diisi oleh salah satu dari 5 bola (ada 5 pilihan);

kotak 3 dapat diisi oleh salah satu dari 4 bola (ada 4 pilihan).

Jumlah urutan berbeda dari penempatan bola = (6)(5)(4) = 120

Perampatan:

Ada n buah bola yang berbeda warnanya dan r buah kotak ($r \le n$), maka

kotak ke-1 dapat diisi oleh salah satu dari n bola → (ada n pilihan) ;

kotak ke-2 dapat diisi oleh salah satu dari (n – 1) bola → (ada n – 1 pilihan);

kotak ke-3 dapat diisi oleh salah satu dari (n – 2) bola → (ada n – 2) pilihan;

…

kotak ke-r dapat diisi oleh salah satu dari (n – (r – 1) bola → (ada $n - r + 1$ pilihan)

Jumlah urutan berbeda dari penempatan bola adalah: $n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))$

Definisi 2. Permutasi r dari n elemen adalah jumlah kemungkinan urutan r buah elemen yang dipilih dari n buah elemen, dengan $r \le n$, yang dalam hal ini, pada setiap kemungkinan urutan tidak ada elemen yang sama.

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Contoh 7. Berapakah jumlah kemungkinan membentuk 3 angka dari 5 angka berikut: 1, 2, 3, 4 , 5, jika:
(a) tidak boleh ada pengulangan angka, dan
(b) boleh ada pengulangan angka.

<u>Penyelesaian</u>:

(a) Dengan kaidah perkalian: (5)(4)(3) = 120 buah
Dengan rumus permutasi P(5, 3) = 5!/(5 – 3)! = 120

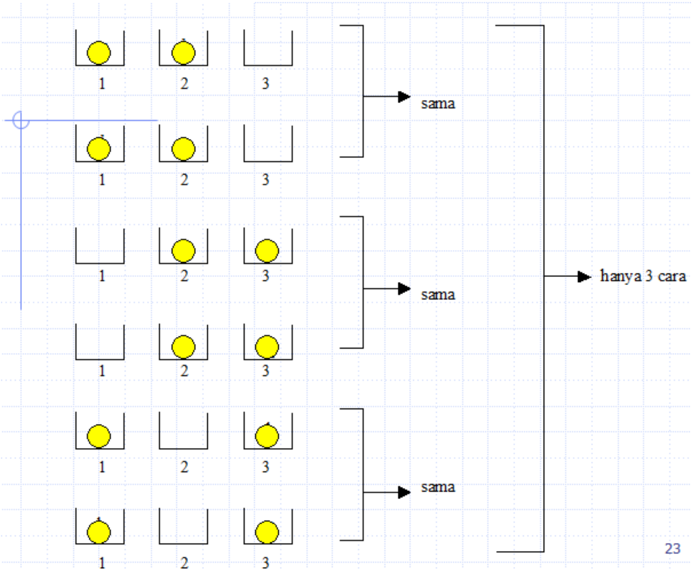
(b) Tidak dapat diselesaikan dengan rumus permutasi.
Dengan kiadah perkalian: (5)(5)(5) = 5^3 = 125.

Contoh 8. Kode buku di sebuah perpustakaan panjangnya 7 karakter, terdiri dari 4 huruf berbeda dan diikuti dengan 3 angka yang berbeda pula?
<u>Penyelesaian</u>: $P(26, 4) \times P(10,3)$ = 258.336.000

Latihan:
1. Sebuah mobil mempunyai 4 tempat duduk. Berapa banyak cara 3 orang didudukkan jika diandaikan satu orang harus duduk di kursi sopir?
Bentuk khusus dari permutasi adalah kombinasi. Jika pada permutasi urutan kemunculan diperhitungkan, maka pada kombinasi, urutan kemunculan diabaikan.

Misalkan ada 2 buah bola yang warnanya sama 3 buah kotak. Setiap kotak hanya boleh berisi paling banyak 1 bola.
Jumlah cara memasukkan bola ke dalam kotak =

$$\frac{P(3,2)}{2} = \frac{P(3,2)}{2!} = \frac{\frac{3!}{1!}}{2!} = \frac{(3)(2)}{2} = 3.$$



- Bila sekarang jumlah bola 3 dan jumlah kotak 10, maka jumlah cara memasukkan bola ke dalam kotak adalah

$$\frac{P(10,3)}{3!} = \frac{\frac{10!}{7!}}{3!} = \frac{(10)(9)(8)}{3!}$$

karena ada 3! cara memasukkan bola yang warnanya sama.
- Secara umum, jumlah cara memasukkan r buah bola yang berwarna sama ke dalam n buah kotak adalah

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C(n, r) \text{ atau } \binom{n}{r}$$

$C(n, r)$ sering dibaca "n diambil r", artinya r objek diambil dari n buah objek.
Definisi 3. Kombinasi r elemen dari n elemen, atau $C(n, r)$, adalah jumlah pemilihan yang tidak terurut r elemen yang diambil dari n buah elemen.

5. Interpretasi Kombinasi

1. $C(n, r)$ = banyaknya himpunan bagian yang terdiri dari r elemen yang dapat dibentuk dari himpunan dengan n elemen.

Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$

Jumlah Himpunan bagian dengan 2 elemen:

$\{1, 2\} = \{2, 1\}$

$\{1, 3\} = \{3, 1\}$ 3 buah

$\{2, 3\} = \{3, 2\}$

atau $\binom{3}{2} = \dfrac{3!}{(3-2)!2!} = \dfrac{3!}{1!2!} = 3$ buah

2. $C(n, r)$ = cara memilih r buah elemen dari n buah elemen yang ada, tetapi urutan elemen di dalam susunan hasil pemilihan tidak penting.

Contoh: Berapa banyak cara membentuk panitia (komite, komisi, dsb) yang beranggotakan 5 orang orang dari sebuah fraksi di DPR yang beranggotakan 25 orang?

Penyelesaian:

Panitia atau komite adalah kelompok yang tidak terurut, artinya setiap anggota di dalam panitia kedudukannya sama.

Misal lima orang yang dipilih, A, B, C, D, dan E, maka urutan penempatan masing-masingnya di dalam panitia tidak penting (ABCDE sama saja dengan BACED, ADCEB, dan seterusnya). Banyaknya cara memilih anggota panitia yang terdiri dari 5 orang anggota adalah $C(25,5) = 53130$ cara.

Contoh 9. Di antara 10 orang mahasiswa Teknik Informatika Angkatan 2002, berapa banyak cara membentuk sebuah perwakilan beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga:

(a) mahasiswa bernama *A* selalu termasuk di dalamnya;
(b) mahasiswa bernama *A* tidak termasuk di dalamnya;
(c) mahasiswa bernama *A* selalu termasuk di dalamnya, tetapi *B* tidak;
(d) mahasiswa bernama *B* selalu termasuk di dalamnya, tetapi *A* tidak;
(e) mahasiswa bernama *A* dan *B* termasuk di dalamnya;
(f) setidaknya salah satu dari mahasiswa yang bernama *A* atau *B* termasuk di dalamnya.

Penyelesaian:

(a) $C(9, 4) = 126$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakn 5 orang sedemikian sehingga *A* selalu termasuk di dalamnya.

(b) $C(9, 5) = 126$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakn 5 orang sedemikian sehingga *A* tidak termasuk di dalamnya.

(c) $C(8, 4) = 70$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga *A* termasuk di dalamnya, tetapi *B* tidak.

(d) $C(8, 4) = 70$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga *B* termasuk di dalamnya, tetapi *A* tidak.

(e) $C(8, 3) = 56$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga *A* dan *B* selalu termasuk di dalamnya.

(f) (f) Jumlah cara membentuk perwakilan sedemikian sehingga setidaknya salah satu dari *A* atau *B* termasuk di dalamnya
(g) = jumlah cara membentuk perwakilan sehingga *A* termasuk di dalamnya, *B* tidak
(h) + jumlah cara membentuk perwakilan sehingga *B* termasuk di dalamnya, *A* tidak
(i) + jumlah cara membentuk perwakilan sehingga *A* dan *B* termasuk di dalamnya
(j) = 70 + 70 + 56 = 196
(k)
(l) Prinsip inklusi-eksklusi:
(m) X = jumlah cara membentuk perwakilan yang menyertakan *A*
(n) Y = jumlah cara membentuk perwakilan yang menyertakan *B*
(o) $X \cap Y$ = jumlah cara membentuk perwakilan yang menyertakan *A*
(p) dan *B*, maka
(q) $\lvert X \rvert = C(9, 4) = 126$; $\lvert Y \rvert = C(9, 4) = 126$;
(r) $\lvert X \cap Y \rvert = C(8, 3) = 56$;
(s)
(t) $\lvert X \cup Y \rvert = \lvert X \rvert + \lvert Y \rvert - \lvert X \cap Y \rvert = 126 + 126 - 56 = 196$

Latihan:

1. Kursi-kursi di sebuah bioskop disusun dalam baris-baris, satu baris berisi 10 buah kursi. Berapa banyak cara mendudukkan 6 orang penonton pada satu baris kursi:

   (a) jika bioskop dalam keadaan terang

   (b) jika bioskop dalam keadaan gelap

2. Ada 5 orang mahasiswa jurusan Matematika dan 7 orang mahasiswa jurusan Informatika. Berapa banyak cara membentuk panitia yang terdiri dari 4 orang jika:

   (a) tidak ada batasan jurusan

   (b) semua anggota panitia harus dari jurusan Matematika

   (c) semua anggota panitia harus dari jurusan Informatika

   (d) semua anggota panitia harus dari jurusan yang sama

   (e) 2 orang mahasiswa per jurusan harus mewakili.

3. Berapa banyak cara membentuk sebuah panitia yang beranggotakan 5 orang yang dipilih dari 7 orang pria dan 5 orang wanita, jika di dalam panitia tersebut paling sedikit beranggotakan 2 orang wanita?

6. Permutasi dan Kombinasi Bentuk Umum

Misalkan: ada n buah bola yang tidak seluruhnya berbeda warna (jadi, ada beberapa bola yang warnanya sama - *indistinguishable*).

n_1 bola diantaranya berwarna 1,

n_2 bola diantaranya berwarna 2,

$\vdots$

n_k bola diantaranya berwarna k, dan $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Berapa jumlah cara pengaturan n buah bola ke dalam kotak-kotak tersebut (tiap kotak maks. 1 buah bola)?

Jika n buah bola itu kita anggap berbeda semuanya, maka jumlah cara pengaturan n buah bola ke dalam n buah kotak adalah:

$$P(n, n) = n!.$$

Dari pengaturan n buah bola itu,

ada $n_1!$ cara memasukkan bola berwarna 1

ada $n_2!$ cara memasukkan bola berwarna 2

$\vdots$

ada $n_k!$ cara memasukkan bola berwarna k

Permutasi n buah bola yang mana n_1 diantaranya berwarna 1, n_2 bola berwarna 2, …, n_k bola berwarna k adalah:

$$P(n; n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{P(n,n)}{n_1!n_2!...n_k!} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

Jumlah cara pengaturan seluruh bola kedalam kotak adalah:

$$C(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = C(n, n_1)\, C(n - n_1, n_2)\, C(n - n_1 - n_2\,, n_3) \ldots C(n - n_1 - n_2 - \ldots - n_{k-1}, n_k)$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_k)!} \ldots \frac{(n-n_1-n_2-...-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-n_2-...-n_{k-1}-n_k)!}$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!...n_k}$$

Kesimpulan:

$$P(n; n_1, n_2, ..., n_k) = C(n; n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!}$$

Contoh 10. Berapa banyak "kata" yang dapat dibentuk dengan menggunakan huruf-huruf dari kata *MISSISSIPPI*?

Penyelesaian:

$S = \{M, I, S, S, I, S, S, I, P, P, I\}$

huruf M = 1 buah (n_1)

huruf I = 4 buah (n_2)

huruf S = 4 buah (n_3)

huruf P = 2 buah (n_4)

$n = 1 + 4 + 4 + 2 = 11$ buah $= |S|$

Cara 1: Jumlah *string* = $P(11; 1, 4, 4, 2)$

$$= \frac{11!}{(1!)(4!)(4!)(2!)} = 34650 \text{ buah.}$$

Cara 2: Jumlah *string* = $C(11, 1)C(10, 4)C(6, 4)C(2, 2)$

$$= \frac{11!}{(1!)(10!)} \cdot \frac{10!}{(4!)(6!)} \cdot \frac{6!}{(4!)(2!)} \cdot \frac{2!}{(2!)(0!)}$$

$$= \frac{11!}{(1!)(4!)(4!)(2!)}$$

= 34650 buah

Contoh 11. Berapa banyak cara membagikan delapan buah mangga kepada 3 orang anak, bila Billy mendapat empat buah mangga, dan Andi serta Toni masing-masing memperoleh 2 buah mangga.

Penyelesaian:

$n = 8$, $n_1 = 4$, $n_2 = 2$, $n_3 = 2$, dan $n_1 + n_2 + n_3 = 4 + 2 + 2 = 8$

Jumlah cara membagi seluruh mangga = $\frac{8!}{(4!)(2!)(2!)} = 420$ cara

Contoh 12. 12 buah lampu berwarna (4 merah, 3 putih, dan 5 biru) dipasang pada 18 buah soket dalam sebuah baris (sisanya 6 buah soket dibiarkan kosong). Berapa jumlah cara pengaturan lampu?

Penyelesaian:
$n = 18$; $n_1 = 4$, $n_2 = 3$, $n_3 = 5$, dan $n_4 = 6$ (*socket* kosong)

Jumlah cara pengaturan lampu = $\dfrac{18!}{(4!)(3!)(5!)(6!)}$ cara

Latihan:

1. 100 orang mahasiswa dikirim ke 5 negara, masing-masing negara 20 orang mahasiswa. Berapa banyak cara pengiriman mahasiswa?
2. Berapa banyak *string* yang dapat dibentuk dari huruf-huruf kata "CONGRESS" sedemikian sehingga dua buah huruf "S" tidak terletak berdampingan?
3. 3. Tentukan banyaknya cara agar 4 buku matematika, 3 buku sejarah, 3 buku kimia, dan 2 buku sosiologi dapat disusun dalam satu baris sedemikian sehingga (untuk masing-masing soal)
4. (a) semua buku yang topiknya sama letaknya bersebelahan,
5. (b) urutan buku dalam susunan bebas.

8. Kombinasi Dengan Pengulangan

Misalkan terdapat r buah bola yang semua warnanya sama dan n buah kotak.

(i) Masing-masing kotak hanya boleh diisi paling banyak satu buah bola.
Jumlah cara memasukkan bola: $C(n, r)$.

(ii) Masing-masing kotak boleh lebih dari satu buah bola (tidak ada pembatasan jumlah bola)
Jumlah cara memasukkan bola: $C(n + r - 1, r)$.
$C(n + r - 1, r) = C(n + r - 1, n - 1)$.

Contoh 13. Pada persamaan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$, x_i adalah bilangan bulat ≥ 0. Berapa jumlah kemungkinan solusinya?

Penyelesaian:

- Analogi: 12 buah bola akan dimasukkan ke dalam 4 buah kotak (dalam hal ini, $n = 4$ dan $r = 12$).
- Bagilah keduabelas bola itu ke dalam tiap kotak. Misalnya,

Kotak 1 diisi 3 buah bola ($x_1 = 3$)
Kotak 2 diisi 5 buah bola ($x_2 = 5$)

Kotak 3 diisi 2 buah bola ($x_3 = 2$)

Kotak 4 diisi 2 buah bola ($x_4 = 2$)

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 + 5 + 2 + 2 = 12$

Ada C(4 + 12 – 1, 12) = C(15, 12) = 455 buah solusi.

Contoh 14. 20 buah apel dan 15 buah jeruk dibagikan kepada 5 orang anak, tiap anak boleh mendapat lebih dari 1 buah apel atau jeruk, atau tidak sama sekali. Berapa jumlah cara pembagian yang dapat dilakukan?

Penyelesaian:

$n = 5$, $r_1 = 20$ (apel) dan $r_2 = 15$ (jeruk)

Membagi 20 apel kepada 5 anak: $C(5 + 20 - 1, 20)$ cara,

Membagi 15 jeruk kepada 5 anak: $C(5 + 15 - 1, 15)$ cara.

Jumlah cara pembagian kedua buah itu adalah

$C(5 + 20 - 1, 20) \times C(5 + 15 - 1, 15) = C(24, 20) \times C(19, 15)$

Latihan:

1. Ada 10 soal di dalam ujian akhir *Matematika Diskrit*. Berapa banyak cara pemberian nilai (bilangan bulat) pada setiap soal jika jumlah nilai keseluruhan soal adalah 100 dan setiap soal mempunyai nilai paling sedikit 5. (Khusus untuk soal ini, nyatakan jawaban akhir anda dalam $C(a, b)$ saja, tidak perlu dihitung nilainya)
2. Di perpustakaan Teknik Informatika terdapat 3 jenis buku: buku Algoritma dan Pemrograman, buku Matematika Diskrit, dan buku Basisdata. Perpustakaan memiliki paling sedikit 10 buah buku untuk masing-masing jenis. Berapa banyak cara memilih 10 buah buku?
3. Dari sejumlah besar koin 25-an, 50-an, 100-an, dan 500-an, berapa banyak cara lima koin dapat diambil?

Contoh 15. Jabarkan $(3x - 2)^3$.

Penyelesaian:

Misalkan $a = 3x$ dan $b = -2$,

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= C(3, 0)\, a^3 + C(3, 1)\, a^2b^1 + C(3, 2)\, a^1b^2 + C(3, 3)\, b^3 \\ &= 1\,(3x)^3 + 3\,(3x)^2\,(-2) + 3\,(3x)\,(-2)^2 + 1\,(-2)^3 \\ &= 27\,x^3 - 54x^2 + 36x - 8\end{aligned}$$

9. koefisien binomial

$(x + y)^0 = 1$	1
$(x + y)^1 = x + y$	1 1

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ 1 2 1
$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ 1 3 3 1
$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$ 1 4 6 4 1
$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$ 1 5 10 10 5 1

$(x + y)^n = C(n, 0)\, x^n + C(n, 1)\, x^{n-1}\, y^1 + \ldots + C(n, k)\, x^{n-k}\, y^k + \ldots +$

$$C(n, n)\, y^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, x^{n-k}\, y^k$$

Koefisien untuk $x^{n-k}y^k$ adalah $C(n, k)$. Bilangan $C(n, k)$ disebut **koefisien binomial**.

Contoh 15. Jabarkan $(3x - 2)^3$.

Penyelesaian:

Misalkan $a = 3x$ dan $b = -2$,

$(a + b)^3 = C(3, 0)\, a^3 + C(3, 1)\, a^2b^1 + C(3, 2)\, a^1b^2 + C(3, 3)\, b^3$
$= 1\, (3x)^3 + 3\, (3x)^2\, (-2) + 3\, (3x)\, (-2)^2 + 1\, (-2)^3$
$= 27\, x^3 - 54x^2 + 36x - 8$

Contoh 16. Tentukan suku keempat dari penjabaran perpangkatan $(x - y)^5$.

Penyelesaian:

$(x - y)^5 = (x + (-y))^5$.

Suku keempat adalah: $C(5, 3)\, x^{5-3}\, (-y)^3 = -10x^2y^3$.

Contoh 17. Buktikan bahwa $\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n$.

Penyelesaian:

Dari persamaan (6.6), ambil $x = y = 1$, sehingga

$$\Leftrightarrow\ (x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, x^{n-k}\, y^k$$

$$\Leftrightarrow\ (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, 1^{n-k}\, 1^k = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)$$

$$\Leftrightarrow\ 2^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)$$

Soal latihan

1. Hitunglah P (5, 2)

2. Banyaknya bilangan yang terdiri atas 2 angka yang berbeda yang dapat disusun dari angka-angka 3, 5, dan 7?

3. Tentukan banyaknya bilangan yang terdiri dari 6 angka yang disusun dari 2 buah angka 1, 3 buah angka 2, dan 1 buah angka 3!
4. Empat orang siswa masuk perpustakaan sekolah. Mereka membaca di meja bundar. Berapa banyak cara agar keempat siswa dapat duduk melingkar dengan urutan yang berbeda?

Kombinasi k unsur dari n unsur dilambangkan oleh C (n, k) dan
C (n, k) = n!/(n-k)!k!, dalam hal ini k < atau = n.

5. Hitunglah C (5, 2)

6. Dari 3 siswa, yaitu Budi, Rendi, dan Rema akan dibentuk pasangan ganda bulu tangkis. Berapa pasangan ganda yang dapat dibentuk dari ketiga siswa tersebut?

7. Dalam babak penyisihan suatu turnamen, 25 pecatur satu sama lain bertanding satu kali. Banyaknya pertandingan yang terjadi adalah...

8. Nah, mungkin hanya sampai situ saja ya Zuwaily menjelaskan permutasi dan kombinasi. Moga dapat bermanfaat. Dan sebagai latihan, ada beberapa soal buat sobat:

9. Perulangan tidak diperkenankan. Ada angka-angka 2, 3, 5, 6, 7, 9.
   a. Berapa banyak bilangan terdiri dari 3 angka dapat disusun dari angka-angka di atas?
   b. Berapa banyak di antara mereka (jawaban a) yang lebih kecil dari 400?
   c. Berapa banyak yang genap?
   d. Berapa banyak yang habis dibagi 5?
10. Dalam suatu ujian seorang mahasiswa harus mengerjakan 8 dari 10 soal. Berapa banyak ragam soal, bila:
    a. Ia harus mengerjakan sembarang nomor?
    b. 3 soal pertama wajib dikerjakan?
    c. Paling sedikit 4 dari 5 soal pertama wajib dikerjakan?
11. Di suatu perkumpulan akan dipilih perwakilan yang terdiri dari 6 orang. Calon yang tersedia terdiri dari 5 pria dan 4 wanita. Banyaknya susunan perwakilan yang dapat dibentuk jika sekurang-kurangnya terpilih 3 pria adalah?

SATUAN ACARA PENGAJARAN
(SAP)

Mata Kuliah	: Matematika Diskrit
Kode	: TIS 4223
Semester	: III
Waktu	: 3 x 50 Menit
Pertemuan	: 13 & 14

A. Kompetensi

3. Utama

   Mahasiswa dapat memahami tentang Relasi.

4. Pendukung

   Mahasiswa dapat mengetahui tentang relasi dan notasi

B. Pokok Bahasan

Relasi

C. Sub Pokok Bahasan

1. Relasi pada himpunan
2. Sifat-sifat pada relasi
3. Kombinasi dua relasi
4. Komposisi dua relasi
5. Relasi ekivalen

D. Kegiatan Belajar Mengajar

Tahapan Kegiatan	Kegiatan Pengajaran	Kegiatan mahasiswa	Media & Alat Peraga
Pendahuluan	3. Mereview materi sebelumnya 4. Menjelaskan materi-materi akan dibahas	Memdengarkan dan memberikan komentar	Laptop, LCD, Papan tulis, Spidol
Penyajian	Menjelaskan tentang: 1. Relasi pada himpunan 2. Sifat-sifat pada relasi 3. Kombinasi dua relasi	Memperthatikan, memcatat dan memberikan komentar, mengajukan pertanyaan	Laptop, LCD, Papan tulis, Spidol

	4. Komposisi dua relasi 5. Relasi ekivalen		
Penutup	5. Mengajukan pertanyaan pada mahasiswa 6. Memberikan kesimpulan 7. Memberikan latihan tertulis dan diperiksa dikelas 8. Mengingatkan akan kewajiban untuk pertemuan selangjutnya	Memperthatikan, memcatat dan memberikan komentar, mengajukan pertanyaan dan mengerjakan latihan	Laptop, LCD, Papan tulis, Spidol

E. Evaluasi

Evaluasi dilakukan dengan cara memberikan pertanyaan langsung dan memberikan latihan tertulis pada satu jam terakhir

Referensi

1) Jong jek siang, Matemtika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer,andi offset, Yogyakarta.2009
2) Rinaldi Munirm, Matematika diskrit, Informatika Bandung.2003

RENCANA KEGIATAN BELAJAR MINGGUAN

(RKBM)

Mata Kuliah	: Matematika Diskrit
Kode	: TIS 4223
Semester	: III
Waktu	: 3 x 50 Menit
Pertemuan	: 13 & 14

Minggu Ke-	TOPIK	METODE PEMBELAJARAN	Estmasi Waktu (menit)	Media & Alat Peraga
13&14	1. Relasi pada himpunan 2. Sifat-sifat pada relasi 3. Kombinasi dua relasi 4. Komposisi dua relasi 5. Relasi ekivalen	Ceramah/ Orasi, dan diskusi kelas	1 x 3 x 50	Laptop, LCD, Papan tulis, Spidol

RELASI DAN FUNGSI

1. RELASI

a. Relasi dalam Himpunan

a. Relasi dari himpunan A ke himpunan B, artinya memetakan setiap anggota pada himpunan A ($x \in A$) dengan anggota pada himpunan B ($y \in B$)

b. Relasi antara himpunan *A* dan himpunan *B juga* merupakan himpunan, yaitu himpunan yang berisi pasangan berurutan yang mengikuti aturan tertentu, contoh $(x,y) \in R$

c. Relasi biner *R* antara himpunan *A* dan *B* merupakan himpunan bagian dari *cartesian product* $A \times B$ atau $R \subseteq (A \times B)$ Notasi dalam Relasi

Relasi antara dua buah objek dinyatakan dengan himpunan pasangan berurutan $(x,y) \in R$

Contoh: relasi F adalah relasi ayah dengan anaknya, maka:

F = {(x,y)|x adalah ayah dari y}

xRy dapat dibaca: x memiliki hubungan R dengan y

Contoh Relasi

Humpunan A : himpunan nama orang

A={Via, Andre, Ita}

Himpunan B : himpunan nama makanan

B={es krim, coklat, permen}

2. Relasi Biner

Relasi biner *R* antara himpunan *A* dan *B* adalah himpunan bagian dari $A \times B$.

Notasi: $R \subseteq (A \times B)$.

$a\ R\ b$ adalah notasi untuk $(a, b) \in R$, yang artinya *a* dihubungankan dengan *b* oleh *R*

$a \not R\ b$ adalah notasi untuk $(a, b) \notin R$, yang artinya a tidak dihubungkan oleh b oleh relasi R.

Himpunan A disebut daerah asal (*domain*) dari R, dan himpunan B disebut daerah hasil (*range*) dari R.

Contoh 3. Misalkan

A = {Amir, Budi, Cecep}, B = {IF221, IF251, IF342, IF323}

$A \times B$ = {(Amir, IF221), (Amir, IF251), (Amir, IF342),
(Amir, IF323), (Budi, IF221), (Budi, IF251),
(Budi, IF342), (Budi, IF323), (Cecep, IF221),
(Cecep, IF251), (Cecep, IF342), (Cecep, IF323) }

Misalkan R adalah relasi yang menyatakan mata kuliah yang diambil oleh mahasiswa pada Semester Ganjil, yaitu

R = {(Amir, IF251), (Amir, IF323), (Budi, IF221),
(Budi, IF251), (Cecep, IF323) }

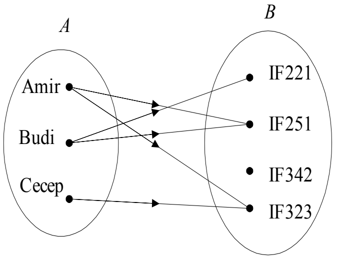
- Dapat dilihat bahwa $R \subseteq (A \times B)$,
- A adalah daerah asal R, dan B adalah daerah hasil R.
- (Amir, IF251) $\in R$ atau Amir R IF251
- (Amir, IF342) $\notin R$ atau Amir $\not R$ IF342.

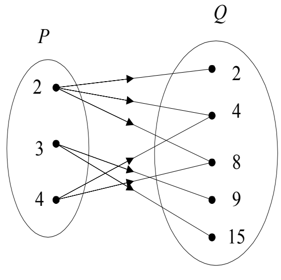
Contoh 5. Misalkan R adalah relasi pada $A = \{2, 3, 4, 8, 9\}$ yang didefinisikan oleh $(x, y) \in R$ jika x adalah faktor prima dari y. Maka

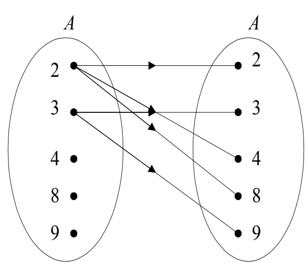
$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 3), (3, 9)\}$

3. Representasi Relasi

a. Representasi Relasi dengan Diagram Panah







.b. Representasi Relasi dengan Tabel

- Kolom pertama tabel menyatakan daerah asal, sedangkan kolom kedua menyatakan daerah hasil.

Tabel 1

A	*B*
Amir	IF251
Amir	IF323
Budi	IF221
Budi	IF251
Cecep	IF323

Tabel 2

P	*Q*
2	2
2	4
4	4
2	8
4	8
3	9
3	15

Tabel 3

A	*A*
2	2
2	4
2	8
3	3
3	3

c.. Representasi Relasi dengan Matriks

Misalkan R adalah relasi dari $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ dan $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.

Relasi R dapat disajikan dengan matriks $M = [m_{ij}]$,

$$M = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

yang dalam hal ini

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Misalkan $P = \{2, 3, 4\}$ dan $Q = \{2, 4, 8, 9, 15\}$. Jika kita definisikan relasi R dari P ke Q dengan

$(p, q) \in R$ jika p habis membagi q

maka kita peroleh

$R = \{(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (4, 8), (3, 9), (3, 15)\}$

Relasi R pada Contoh 4 dapat dinyatakan dengan matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

yang dalam hal ini, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, dan $b_1 = 2$, $b_2 = 4$, $b_3 = 8$, $b_4 = 9$, $b_5 = 15$.

d. Representasi Relasi dengan Graf Berarah

1) Relasi pada sebuah himpunan dapat direpresentasikan secara grafis dengan **graf berarah** (*directed graph* atau *digraph*)

2) Graf berarah tidak didefinisikan untuk merepresentasikan relasi dari suatu himpunan ke himpunan lain.

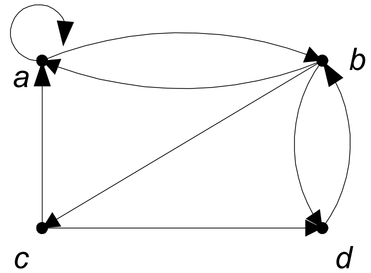
3) Tiap elemen himpunan dinyatakan dengan sebuah titik (disebut juga simpul atau *vertex*), dan tiap pasangan terurut dinyatakan dengan busur (*arc*)

4) Jika $(a, b) \in R$, maka sebuah busur dibuat dari simpul a ke simpul b. Simpul a disebut **simpul asal** (*initial vertex*) dan simpul b disebut **simpul tujuan** (*terminal vertex*).

5) Pasangan terurut (a, a) dinyatakan dengan busur dari simpul a ke simpul a sendiri. Busur semacam itu disebut **gelang** atau **kalang** (*loop*).

6) **Contoh 7.** Misalkan $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (d, b)\}$ adalah relasi pada himpunan $\{a, b, c, d\}$.

7) R direpresentasikan dengan graf berarah sbb:



4. Sifat-sifat Relasi Biner

Relasi biner yang didefinisikan pada sebuah himpunan mempunyai beberapa sifat.

a. **Refleksif** (*reflexive*)

Relasi R pada himpunan A disebut **refleksif** jika $(a, a) \in R$ untuk setiap $a \in A$.

Relasi R pada himpunan A tidak refleksif jika ada $a \in A$ sedemikian sehingga $(a, a) \notin R$.

Contoh 8. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, dan relasi R di bawah ini didefinisikan pada himpunan A, maka

(a) Relasi $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$ bersifat refleksif karena terdapat elemen relasi yang berbentuk (a, a), yaitu $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, dan $(4, 4)$.

(b) Relasi $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$ tidak bersifat refleksif karena $(3, 3) \notin R$.

Relasi yang bersifat refleksif mempunyai matriks yang elemen diagonal utamanya semua bernilai 1, atau $m_{ii} = 1$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Graf berarah dari relasi yang bersifat refleksif dicirikan adanya gelang pada setiap simpulnya.

5. Setangkup (*symmetric*) dan **tolak-setangkup** (*antisymmetric*)

Relasi R pada himpunan A disebut **setangkup** jika $(a, b) \in R$, maka $(b, a) \in R$ untuk $a, b \in A$.

Relasi R pada himpunan A tidak setangkup jika $(a, b) \in R$ sedemikian sehingga $(b, a) \notin R$.

Relasi R pada himpunan A sedemikian sehingga $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$ hanya jika $a = b$ untuk $a, b \in A$ disebut **tolak-setangkup**.

Contoh 14. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, dan relasi R di bawah ini didefinisikan pada himpunan A, maka

(a) Relasi R = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4) } bersifat setangkup karena jika $(a, b) \in R$ maka (b, a) juga $\in R$. Di sini (1, 2) dan (2, 1) $\in R$, begitu juga (2, 4) dan (4, 2) $\in R$.

(b) Relasi R = {(1, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 2) } tidak setangkup karena (2, 3) $\in R$, tetapi (3, 2) $\notin R$.

(c) Relasi R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3) } tolak-setangkup karena 1 = 1 dan (1, 1) $\in R$, 2 = 2 dan (2, 2) $\in R$, dan 3 = 3 dan (3, 3) $\in R$. Perhatikan bahwa R juga setangkup.

(d) Relasi R = {(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3) } tolak-setangkup karena (1, 1) $\in R$ dan 1 = 1 dan, (2, 2) $\in R$ dan 2 = 2 dan. Perhatikan bahwa R tidak setangkup.

6. Relasi Inversi

Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B. Invers dari relasi R, dilambangkan dengan R^{-1}, adalah relasi dari B ke A yang didefinisikan oleh

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

Contoh 17. Misalkan $P = \{2, 3, 4\}$ dan $Q = \{2, 4, 8, 9, 15\}$. Jika kita definisikan relasi R dari P ke Q dengan

$(p, q) \in R$ jika p habis membagi q

maka kita peroleh

$R = \{(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (4, 8), (3, 9), (3, 15)\}$

R^{-1} adalah *invers* dari relasi R, yaitu relasi dari Q ke P dengan

$(q, p) \in R^{-1}$ jika q adalah kelipatan dari p

maka kita peroleh

Jika M adalah matriks yang merepresentasikan relasi R,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

maka matriks yang merepresentasikan relasi R^{-1}, misalkan N, diperoleh dengan melakukan *transpose* terhadap matriks M,

$$N = M^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

7. Mengkombinasikan Relasi

Karena relasi biner merupakan himpunan pasangan terurut, maka operasi himpunan seperti irisan, gabungan, selisih, dan beda setangkup antara dua relasi atau lebih juga berlaku.

Jika R_1 dan R_2 masing-masing adalah relasi dari himpuna A ke himpunan B, maka $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, $R_1 - R_2$, dan $R_1 \oplus R_2$ juga adalah relasi dari A ke B.

Contoh 18. Misalkan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$.

Relasi $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$

Relasi $R_2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d)\}$

$R_1 \cap R_2 = \{(a, a)\}$

$R_1 \cup R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$

$R_1 - R_2 = \{(b, b), (c, c)\}$

$R_2 - R_1 = \{(a, b), (a, c), (a, d)\}$

$R_1 \oplus R_2 = \{(b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$

Jika relasi R_1 dan R_2 masing-masing dinyatakan dengan matriks M_{R1} dan M_{R2}, maka matriks yang menyatakan gabungan dan irisan dari kedua relasi tersebut adalah

$M_{R1 \cup R2} = M_{R1} \vee M_{R2}$ dan $M_{R1 \cap R2} = M_{R1} \wedge M_{R2}$

Contoh 19. Misalkan bahwa relasi R_1 dan R_2 pada himpunan A dinyatakan oleh matriks

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$M_{R1 \cup R2} = M_{R1} \vee M_{R2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R1 \cap R2} = M_{R1} \wedge M_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8. Komposisi Relasi

Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B, dan S adalah relasi dari himpunan B ke himpunan C. Komposisi R dan S, dinotasikan dengan $S \circ R$, adalah relasi dari A ke C yang didefinisikan oleh

$$S \circ R = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C, \text{dan untuk beberapa } b \in B, (a, b) \in R \text{ dan } (b, c) \in S \}$$

Contoh 20. Misalkan

$$R = \{(1, 2), (1, 6), (2, 4), (3, 4), (3, 6), (3, 8)\}$$

adalah relasi dari himpunan $\{1, 2, 3\}$ ke himpunan $\{2, 4, 6, 8\}$ dan

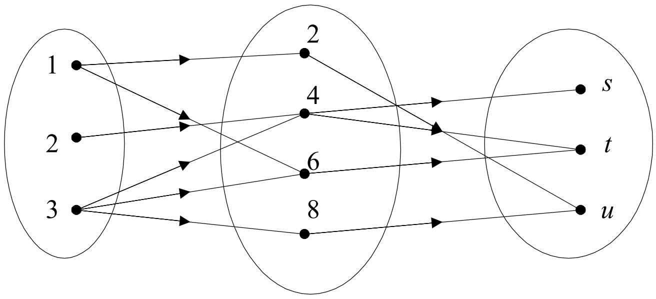
$$S = \{(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)\}$$

adalah relasi dari himpunan $\{2, 4, 6, 8\}$ ke himpunan $\{s, t, u\}$.

Maka komposisi relasi R dan S adalah

$$S \circ R = \{(1, u), (1, t), (2, s), (2, t), (3, s), (3, t), (3, u) \}$$

Komposisi relasi R dan S lebih jelas jika diperagakan dengan diagram panah:



$R = \{(1, 2), (1, 6), (2, 4), (3, 4), (3, 6), (3, 8)\}$

adalah relasi dari himpunan {1, 2, 3} ke himpunan {2, 4, 6, 8} dan

$S = \{(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)\}$

adalah relasi dari himpunan {2, 4, 6, 8} ke himpunan $\{s, t, u\}$.

Maka komposisi relasi R dan S adalah

$$S \circ R = \{(1, u), (1, t), (2, s), (2, t), (3, s), (3, t), (3, u)\}$$

9. Relasi *n-ary*

Relasi biner hanya menghubungkan antara dua buah himpunan.

Relasi yang lebih umum menghubungkan lebih dari dua buah himpunan. Relasi tersebut dinamakan relasi *n-ary* (baca: ener).

Jika $n = 2$, maka relasinya dinamakan relasi biner (bi = 2). Relasi *n-ary* mempunyai terapan penting di dalam basisdata.

Misalkan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ adalah himpunan. Relasi *n-ary* R pada himpunan-himpunan tersebut adalah himpunan bagian dari $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, atau dengan notasi $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Himpunan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ disebut daerah asal relasi dan n disebut **derajat**.

Contoh 22. Misalkan

NIM = {13598011, 13598014, 13598015, 13598019,
13598021, 13598025}

Nama = {Amir, Santi, Irwan, Ahmad, Cecep, Hamdan}

MatKul = {Matematika Diskrit, Algoritma, Struktur Data,
Arsitektur Komputer}

Nilai = {A, B, C, D, E}

Relasi *MHS* terdiri dari (*NIM*, *Nama*, *MatKul*, *Nilai*):

$$MHS \subseteq NIM \times Nama \times MatKul \times Nilai$$

Satu contoh relasi yang bernama *MHS* adalah

MHS = {(13598011, Amir, Matematika Diskrit, A),
(13598011, Amir, Arsitektur Komputer, B),
(13598014, Santi, Arsitektur Komputer, D),
(13598015, Irwan, Algoritma, C),
(13598015, Irwan, Struktur Data C),
(13598015, Irwan, Arsitektur Komputer, B),
(13598019, Ahmad, Algoritma, E),
(13598021, Cecep, Algoritma, A),
(13598021, Cecep, Arsitektur Komputer, B),
(13598025, Hamdan, Matematika Diskrit, B),
(13598025, Hamdan, Algoritma, A, B),
(13598025, Hamdan, Struktur Data, C),
(13598025, Hamdan, Ars. Komputer, B) }

Basisdata (*database*) adalah kumpulan tabel.

Salah satu model basisdata adalah **model basisdata relasional** (*relational database*). Model basisdata ini didasarkan pada konsep relasi *n-ary*.

Pada basisdata relasional, satu tabel menyatakan satu relasi. Setiap kolom pada tabel disebut **atribut**. Daerah asal dari atribut adalah himpunan tempat semua anggota atribut tersebut berada.

Setiap tabel pada basisdata diimplementasikan secara fisik sebagai sebuah *file*.

Satu baris data pada tabel menyatakan sebuah *record*, dan setiap atribut menyatakan sebuah *field*.

Secara fisik basisdata adalah kumpulan *file*, sedangkan *file* adalah kumpulan *record*, setiap *record* terdiri atas sejumlah *field*.

Atribut khusus pada tabel yang mengidentifikasikan secara unik elemen relasi disebut **kunci** (*key*).

Operasi yang dilakukan terhadap basisdata dilakukan dengan perintah pertanyaan yang disebut *query*.

Contoh *query*:

"tampilkan semua mahasiswa yang mengambil mata kuliah Matematika Diskrit"

"tampilkan daftar nilai mahasiswa dengan NIM = 13598015"

"tampilkan daftar mahasiswa yang terdiri atas NIM dan mata kuliah yang diambil"

Query terhadap basisdata relasional dapat dinyatakan secara abstrak dengan operasi pada relasi *n-ary*.

Ada beberapa operasi yang dapat digunakan, diantaranya adalah seleksi, proyeksi, dan join

a. Seleksi

Operasi seleksi memilih baris tertentu dari suatu tabel yang memenuhi persyaratan tertentu.

Operator: σ

Contoh 23. Misalkan untuk relasi MHS kita ingin menampilkan daftar mahasiswa yang mengambil mata kuliah Matematik Diskrit. Operasi seleksinya adalah

$$\sigma_{\text{Matkul="Matematika Diskrit"}}\,(\text{MHS})$$

Hasil: (13598011, Amir, Matematika Diskrit, A) dan (13598025, Hamdan, Matematika Diskrit, B)

b.Proyeksi

Operasi proyeksi memilih kolom tertentu dari suatu tabel. Jika ada beberapa baris yang sama nilainya, maka hanya diambil satu kali.

Operator: π

Contoh 24. Operasi proyeksi

$$\pi_{\text{Nama, MatKul, Nilai}}\,(\text{MHS})$$

menghasilkan Tabel 3.5. Sedangkan operasi proyeksi

$$\pi_{\text{NIM, Nama}}\,(\text{MHS})$$

menghasilkan Tabel 3.6.

Tabel 3.5

Nama	MatKul	Nilai
Amir	Matematika Diskrit	A
Amir	Arsitektur Komputer	B
Santi	Algoritma	D
Irwan	Algoritma	C
Irwan	Struktur Data	C
Irwan	Arsitektur Komputer	B
Ahmad	Algoritma	E
Cecep	Algoritma	B
Cecep	Arsitektur Komputer	B
Hamdan	Matematika Diskrit	B
Hamdan	Algoritma	A
Hamdan	Struktur Data	C
Hamdan	Arsitektur Komputer	B

Tabel 3.6

NIM	Nama
13598011	Amir
13598014	Santi
13598015	Irwan
13598019	Ahmad
13598021	Cecep
13598025	Hamdan

c.Join

Operasi *join* menggabungkan dua buah tabel menjadi satu bila kedua tabel mempunyai atribut yang sama.

Operator: τ

Contoh 25. Misalkan relasi *MHS1* dinyatakan dengan Tabel 3.7 dan relasi *MHS2* dinyatakan dengan Tabel 3.8.

Operasi *join*

$$\tau_{\text{NIM, Nama}}(\text{MHS1, MHS2})$$

menghasilkan Tabel 3.9.

Tabel 3.7

NIM	Nama	JK
13598001	Hananto	L
13598002	Guntur	L
13598004	Heidi	W
13598006	Harman	L
13598007	Karim	L

Tabel 3.8

NIM	Nama	MatKul	Nilai
13598001	Hananto	Algoritma	A
13598001	Hananto	Basisdata	B
13598004	Heidi	Kalkulus I	B
13598006	Harman	Teori Bahasa	C
13598006	Harman	Agama	A
13598009	Junaidi	Statisitik	B
13598010	Farizka	Otomata	C

Tabel 3.9

NIM	Nama	JK	MatKul	Nilai
13598001	Hananto	L	Algoritma	A
13598001	Hananto	L	Basisdata	B

13598004	Heidi	W	Kalkulus I	B
13598006	Harman	L	Teori Bahasa	C
13598006	Harman	L	Agama	A

d. Tabel

Nama	Makanan
Via	Permen
Via	Coklat
Andre	Coklat
Andre	Es Krim
Ita	Es Krim

e. Matriks

a. Baris = domain

b. Kolom = kodomain

	Permen	Coklat	Es krim
Via	1	1	0
Andre	0	1	1
Ita	0	0	1

c. Graph Berarah

1) Hanya untuk merepresentasikan relasi pada satu himpunan (bukan antara dua himpuanan).

2) Tiap unsur himpunan dinyatakan dengan sebuah **titik** (disebut juga **simpul atau *vertex***)

3) Tiap pasangan terurut dinyatakan dengan **busur** (***arc***).

a) Jika $(a, b) \in R$, maka sebuah busur **dibuat dari simpul *a* ke simpul *b*.**

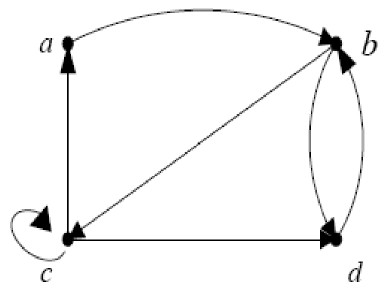
b) Simpul *a* disebut **simpul asal (*initial vertex*)**

c) Simpul *b* disebut **simpul tujuan (*terminal vertex*)**

d) Pasangan terurut (a, a) dinyatakan dengan busur dari simpul *a* ke simpul *a* sendiri. Busur semacam itu disebut ***loop***

1. Contoh graph berarah

   Misalkan $R = \{(a, b), (b, c), (b, d), (c, c)\ (c, \mathrm{a}), (c, d), (d, b)\}$ adalah relasi pada himpunan $\{a, b, c, d\}$.



Latihan 1

a. $Z = \{1,2,3,4\}$;

b. $R = \{(x,y)|x > y\ ;\ x \in Z \text{ dan } y \in Z\}$

c. Nyatakan relasi tersbut dalam bentuk

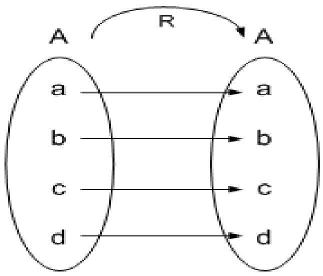
   1. Himpunan pasangan berurutan
   2. Matrix
   3. Graf

Sifat-sifat Relasi

a Refleksif

Sebuah relasi dikatakan *refleksif* jika sedikitnya: x ∈ A, $x\mathrm{R}x$

Minimal



d. Transitif

   Sebuah relasi dikatakan bersifat *transitif* jika:

   xRy , yRz => xR ; (x,y, z) ∈ A

   Contoh: R = {(a,d),(d,e),(a,e)}

e. Simetrik

   Sebuah relasi dikatakan bersifat simetris jika:

   xRy, berlaku pula yRx untuk (x dan y) ∈ A

   Contoh:

A={a,b,c,d}

R={(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a),(c,d),(d,c)}

f. Asimetrik

Relasi asimetrik adalah kebalikan dari relasi simetrik

Artinya (a,b) ∈ R, (b,a) ∉ R

Contohnya: R = {(a,b), (a,c), (c,d)}

g. Anti Simetrik

Relasi R dikatakan antisimetrik jika, untuk setiap x dan y di dalam A; jika xRy dan yRx maka x=y

h. Equivalen

Sebuah relasi R dikatakan equivalen jika memenuhi syarat:

Refelksif

Simeteris

Transitif

i. Partially Order Set (POSET)

Sebuah relasi R dikatakan terurut sebagian (POSET) jika memenuhi syarat:

Refleksif

Antisimetri

Transitif

j. Latihan 2

A={1,2,3,4} Sebutkan sifat untuk relasi < pada himpunan A !

Apakah relasi berikut asimetris, transitif?

R = {(1,2),(3,4),(2,3)}

Apakah R = {(a,a),(a,b),(a,c),(b,b),(b,a),(c,c)} refleksif?

R merupakan relasi pada himpunan Z, yang dinyatakan oleh *a*R*b* jika dan hanya jika *a*=b atau *a*= –b

Periksa, apakah relasi tersebut merupakan relasi ekivalen !

k. Operasi dalam Relasi

Operasi himpunan seperti irisan, gabungan, selisih, dan penjumlahan (beda setangkup) juga berlaku pada relasi

Jika R_1 dan R_2 masing-masing merupakan relasi dari himpuna *A* ke himpunan *B*, maka $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, $R_1 - R_2$, dan $R_1 \oplus R_2$ juga adalah relasi dari *A* ke *B*.

Contoh operasi relasi

Misalkan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$.

Relasi $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$

Relasi $R_2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d)\}$

Maka :

a. $R_1 \cap R_2 = \{(a, a)\}$

b. $R_1 \cup R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$

c. $R_1 - R_2 = \{(b, b), (c, c)\}$

d. $R_2 - R_1 = \{(a, b), (a, c), (a, d)\}$

e. $R_1 \oplus R_2 = \{(b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$

a. Operasi dalam bentuk matriks

Misalkan bahwa relasi R_1 dan R_2 pada himpunan A dinyatakan oleh matriks

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka

$$M_{R1 \cup R2} = M_{R1} \vee M_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R1 \cap R2} = M_{R1} \wedge M_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b. Komposisi Relasi

Misalkan :

R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B

T adalah relasi dari himpunan B ke himpunan C.

Komposisi R dan S, dinotasikan dengan T o R, adalah relasi dari A ke C yang didefinisikan oleh :

T o $R = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C$, dan untuk suatu $b \in B$ sehingga $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in S\}$

Contoh komposisi relasi

Misalkan, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ dan $C = \{s, t, u\}$

Relasi dari A ke B didefinisikan oleh :

$R = \{(a, 2), (a, 6), (b, 4), (c, 4), (c, 6), (c, 8)\}$

Relasi dari B ke C didefisikan oleh :

$T = \{(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)\}$

Maka komposisi relasi R dan T adalah

$T \text{ o } R = \{(a, u), (a, t), (b, s), (b, t), (c, s), (c, t), (c, u)\}$

11. FUNGSI

Fungsi dari Himpunan

Fungsi adalah bentuk khusus dari relasi

Sebuah relasi dikatakan fungsi jika xRy, untuk **setiap** x anggota A memiliki **tepat satu** pasangan, y, anggota himpunan B

Kita dapat menuliskan $f(a) = b$, jika b merupakan unsur di B yang dikaitkan oleh f untuk suatu a di A.

Ini berarti bahwa jika $f(a) = b$ dan $f(a) = c$ maka $b = c$.

Jika f adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B, kita dapat menuliskan dalam bentuk : $f : A \rightarrow B$

- artinya f memetakan himpunan A ke himpunan B.

Nama lain untuk fungsi adalah pemetaan atau transformasi.

Domain, Kodomain, dan Jelajah

$f : A \rightarrow B$

A dinamakan daerah asal (*domain*) dari f dan B dinamakan daerah hasil (*codomain*) dari f.

Misalkan $f(a) = b$,

maka b dinamakan bayangan (*image*) dari a,

dan a dinamakan pra-bayangan (*pre-image*) dari b.

Himpunan yang berisi semua nilai pemetaan f dinamakan jelajah (*range*) dari f.

Penulisan Fungsi

a. Himpunan pasangan terurut.

b. Misalkan fungsi kuadrat pada himpunan {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10} maka fungsi itu dapat dituliskan dalam bentuk :

  i. $f = \{(2, 4), (3, 9)\}$

c. Formula pengisian nilai (assignment)

d. $f(x) = x^2 + 10$,

e. $f(x) = 5x$

Jenis-jenis Fungsi

a. Fungsi Injektif

a. Fungsi satu-satu

b. Fungsi f: A → B disebut fungsi satu-satu jika dan hanya jika untuk sembarang a_1 dan a_2 dengan a_1 tidak sama dengan a_2 berlaku $f(a_1)$ tidak sama dengan $f(a_2)$. Dengan kata lain, bila $a_1 = a_2$ maka $f(a_1)$ sama dengan $f(a_2)$.

c. Fungsi Surjektif

Fungsi kepada

Fungsi f: A → B disebut fungsi kepada jika dan hanya jika untuk sembarang b dalam kodomain B terdapat paling tidak satu a dalam domain A sehingga berlaku $f(a) = b$.

Suatu kodomain fungsi surjektif sama dengan *range*-nya (semua kodomain adalah peta dari domain).

d. Fungsi Bijektif

Fungsi f: A → B disebut disebut fungsi bijektif jika dan hanya jika untuk sembarang *b* dalam kodomain *B* terdapat tepat satu *a* dalam domain *A* sehingga *f*(*a*) = *b*, dan tidak ada anggota *A* yang tidak terpetakan dalam *B*.

Dengan kata lain, fungsi bijektif adalah **fungsi injektif sekaligus fungsi surjektif.**

e. Fungsi Invers

Fungsi invers merupakan kebalikan dari fungsi itu sendiri

f : A → B di mana **f(a) = b**

$\mathbf{f^{-1}: B \rightarrow A}$ di mana $\mathbf{f^{-1}(b) = a}$

<u>Catatan:</u> **f** dan $\mathbf{f^{-1}}$ harus bijective

F. Operasi Fungsi

a. $(f \pm g)(x) = f(x) + g(x)$

b. $(f \,.\, g)(x) = f(x) \,.\, g(x)$

c. Komposisi:

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Latihan 3

$f(x) = x^2 + 1$

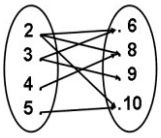
$g(x) = x + 6$

Tentukan:

1. $(f + g)(x)$
2. $(f - g)(x)$
3. $(f \,.\, g)(x)$
4. $(f \circ g)(x)$
5. Invers dari g(x)

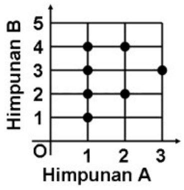
Kumpulan soal-soal
Materi : Relasi dan Fungsi

1. Aturan dari relasi yang digambarkan dengan diagram panah di bawah ini adalah ….



   a. kurang dari
   b. lebih dari
   c. faktor dari
   d. kuadrat dari

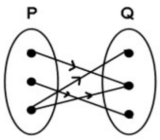
2. Relasi dari A ke B yang ditunjukkan dengan diagram Cartesius adalah ….
   a. kelipatan dari
   b. faktor dari
   c. kurang dari
   d. sama dengan

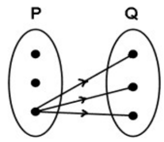


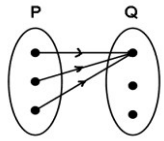
3. Diketahui :
   P = {(1,1), (1,2), (2,2), (3,3)}   R = {(1,1), (2,3), (3,4), (3,5)}
   Q = {(1,1), (2,3), (3,3), (4,1)}   S = {(1,1), (2,3), (3,3), (3,4)}

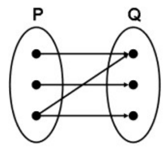
   Himpunan pasangan berurutan di atas, yang merupakan fungsi adalah ….
   a. P   c. R
   b. Q   d. S

4. Diagram panah di bawah ini yang merupakan fungsi dari himpunan P ke himpunan Q adalah ….

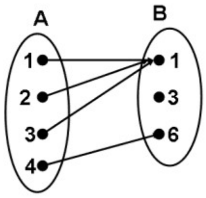
a.


b.


c.


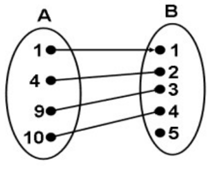
d.


5. Domain dari diagram panah di bawah adalah ….



   a. {1, 2, 3, 4}
   b. {1, 2, 6}
   c. {1, 6}
   d. { 3 }

6. Himpunan daerah hasil (range) dari diagram panah di bawah ini adalah ….
   a. {1, 4, 9, 10 }
   b. {1, 2, 3, 4}
   c. {1, 2, 3, 4, 5}
   d. { 5 }



7. Suatu fungsi didefinisikan f(x) = 7 - $\frac{1}{2}x$ dengan $x \in \{-2, 0, 2, 4\}$. Daerah hasil fungsi tersebut adalah ….
   a. {6, 7, 8, 9}   c. {8, 6, 4, 2}
   b. {8, 7, 6, 4}   d. {8, 7, 6, 5}

8. Diketahui P = {a, b, c, d} dan Q = {1, 2, 3}. Banyaknya pemetaan yang mungkin dari himpunan P ke himpunan Q adalah ….

a. 81 c. 12
b. 64 d. 7

9. Diketahui X = {1, 2} dab Y = {a, b, c}. Banyaknya fungsi yang mungkin dari Y ke X adalah ….

a. 5 c. 8
b. 6 d. 9

10. Suatu fungsi dari P ke Q dinyatakan sebagai $\{(1,2\frac{1}{2}), (2,3), (3, 3\frac{1}{2}), (4,4)\}$. Notasi itu adalah ….

a. $f : x \to \frac{1}{2}x - 2$ c. $f : x \to \frac{1}{2}x + 2$
b. $f : x \to \frac{1}{2}x + 1$ d. $f : x \to \frac{1}{2}x + 3$

11. Fungsi f didefinisikan dengan rumus $f(x) = 7 - 2x - 3x^2$, bayangan -3 oleh fungsi tersebut adalah ….

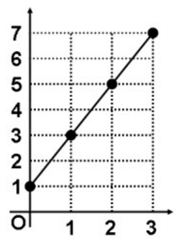
a. -16 c. 28
b. -14 d. 40

12. Suatu fungsi linear didefinisikan dengan $f(x) = ax + b$ dengan $x \in R$. Jika pada fungsi tersebut diketahui f(-2) = -8 dan f(5) = 13, maka nilai *a* dan *b* berturut-turut adalah ….

a. -3 dan 2 c. 2 dan -3
b. -2 dan 3 d. 3 dan -2

13. Grafik di samping dengan $x \in R$ menunjukkan :

a. $f(x) = x + 2$
b. $f(x) = x + 1$
c. $f(x) = 2x + 1$
d. $f(x) = 2x - 1$



14. Diketahui $f(x) = 2x - 3$, pada himpunan bilangan bulat dinyatakan dalam pasangan berurutan {(a,3), (b,-5), (-2,c), (-1,d)}. Nilai a + b + c – d adalah ….

a. -1 c. 2
b. 1 d. 0

15. Suatu fungsi dirumuskan $f(x) = ax + b$. Jika f(-2) = 14 dan f(3) = -1, maka nilai a dan b adalah ….

a. -3 dan 8 c. 2 dan 5
b. 3 dan 8 d. 5 dan -2

16. Jika $f(x) = 3x - 2$ dan f(a) = 19. Maka nilai a adalah ….

a. 6 c. 55
b. 7 d. 57

17. Koordinat titik potong fungsi f(x) = 3x – 18 dengan sumbu x adalah ….
   a. (6, 0)
   b. (0, 6)
   c. (-6, 0)
   d. (0, -6)

18. Koordinat titik potong fungsi g(x) = 20 – 5x dengan sumbu y adalah ….
   a. (0, 20)
   b. (20, 0)
   c. (4, 0)
   d. (0, 4)

19. Jika A = {2, 3, 4, 5} dan B = {3, 4, 5, 6}, relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah "satu kurangnya dari". Maka relasi tersebut jika dinyatakan dengan himpunan pasangan berurutan adalah ….
   a. {(2,1), (3,2), (4,3), (5, 6)}
   b. {(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6)}
   c {(2,3), (3,4), (4,6), (3,5)}
   d. {(2,3), (3,4), (4,5), (5,6)}

20. Fungsi $f : x \rightarrow 3x - 5$ dengan $x \in$ {-3, -2, -1, 0, 1, 2}. Daerah hasil fungsi f adalah ….
   a. {4, 1, -2, -5}
   b. {-14, -11, -8, -5, -2, 1}
   c. {-9, -6, -3, 0, 3, 6}
   d. {-24, -21, -8, -5}

SATUAN ACARA PENGAJARAN
(SAP)

Mata Kuliah	: Matematika Diskrit
Kode	: TIS 4223
Semester	: III
Waktu	: 3 x 50 Menit
Pertemuan	: 15

F. Kompetensi

5. Utama

   Mahasiswa dapat memahami tentang Relasi.

6. Pendukung

   Mahasiswa dapat mengetahui tentang Graf

G. Pokok Bahasan

   Graf

H. Sub Pokok Bahasan

6. Defenisi Graf
7. Jenis-jenis Graf
8. Terminology Dasar
9. Graf sederhana
10. Refresentasi Graf

I. Kegiatan Belajar Mengajar

n Kegiatan	an Pengajaran	an mahasiswa	& Alat Peraga
uluan	5. Mereview materi sebelumnya 6. Menjelaskan materi-materi akan dibahas	engarkan dan memberikan komentar	, LCD, Papan tulis, Spidol
ian	Menjelaskan tentang: 1. Defenisi Graf 2. Jenis-jenis Graf 3. Terminology Dasar 4. Graf sederhana 5. Refresentasi Graf	erthatikan, memcatat dan memberikan komentar, mengajukan pertanyaan	, LCD, Papan tulis, Spidol
p	9. Mengajukan pertanyaan pada mahasiswa 10. Memberikan kesimpulan 11. Memberikan latihan tertulis dan diperiksa dikelas 12. Mengingatkan akan kewajiban	erthatikan, memcatat dan memberikan komentar, mengajukan pertanyaan dan	, LCD, Papan tulis, Spidol

	untuk pertemuan selangjutnya	mengerjakan latihan	

J. Evaluasi

Evaluasi dilakukan dengan cara memberikan pertanyaan langsung dan memberikan latihan tertulis pada satu jam terakhir

Referensi

3) Jong jek siang, Matemtika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer,andi offset, Yogyakarta.2009

4) Rinaldi Munirm, Matematika diskrit, Informatika Bandung.2003

RENCANA KEGIATAN BELAJAR MINGGUAN

(RKBM)

Mata Kuliah : Matematika Diskrit

Kode : TIS 4223

Semester : III

Waktu : 3 x 50 Menit

Pertemuan : 15

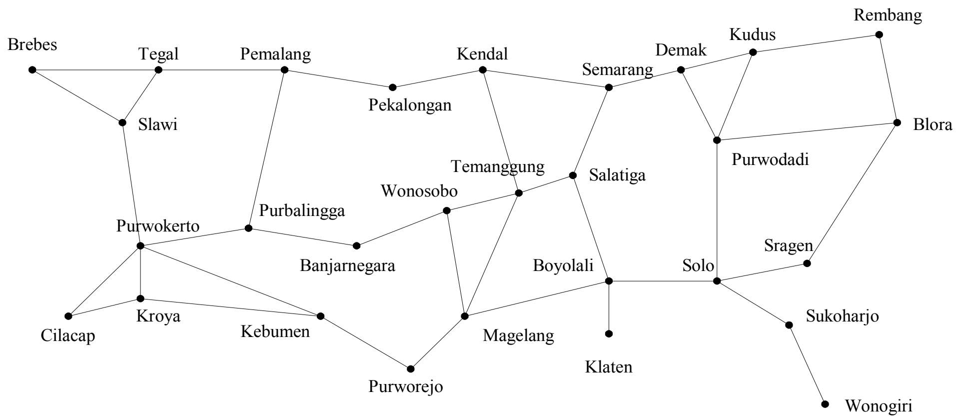
u Ke-		DE PEMBELAJARAN	i Waktu	& Alat Peraga
15	1. Defenisi Graf 2. Jenis-jenis Graf 3. Terminology Dasar 4. Graf sederhana 5. Refresentasi Graf	ah/ Orasi, dan diskusi kelas	50	, LCD, Papan tulis, Spidol

Graf

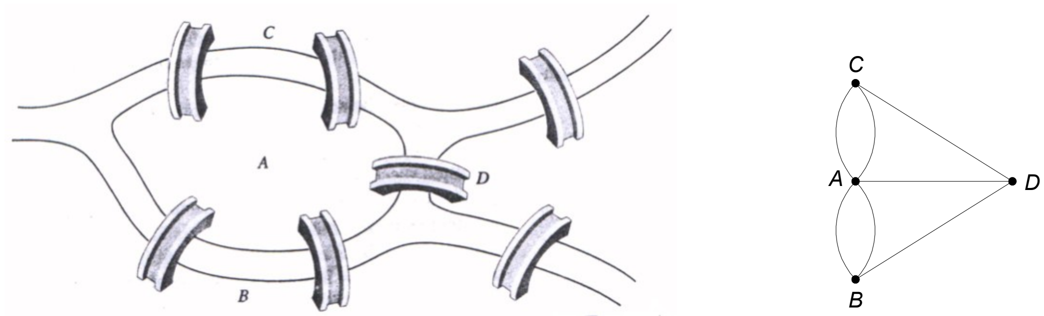
Pendahuluan

- Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut.

- Gambar di bawah ini sebuah graf yang menyatakan peta jaringan jalan raya yang menghubungkan sejumlah kota di Provinsi Jawa Tengah.



- Sejarah Graf: masalah jembatan Konigsberg (tahun 1736)



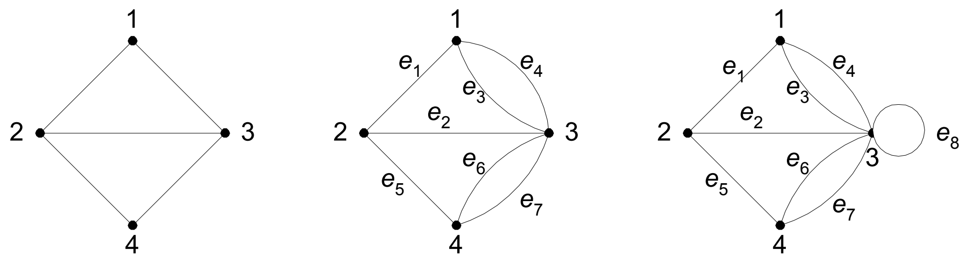
Gambar 1. Masalah Jembatan Konigsberg

- Graf yang merepresentasikan jembatan Konigsberg:
  Simpul (*vertex*) → menyatakan daratan
  Sisi (*edge*) → menyatakan jembatan
- Bisakah melalui setiap jembatan tepat sekali dan kembali lagi ke tempat semula?

Definisi Graf

Graf $G = (V, E)$, yang dalam hal ini:

V = himpunan tidak-kosong dari simpul-simpul (*vertices*)
$= \{ v_1 , v_2 , \ldots , v_n \}$
E = himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang simpul
$= \{e_1 , e_2 , \ldots , e_n \}$



Gambar 2. (a) graf sederhana, (b) graf ganda, dan (c) graf semu

Contoh 1. Pada Gambar 2, G_1 adalah graf dengan

$V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ $E = \{ (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4) \}$

G_2 adalah graf dengan

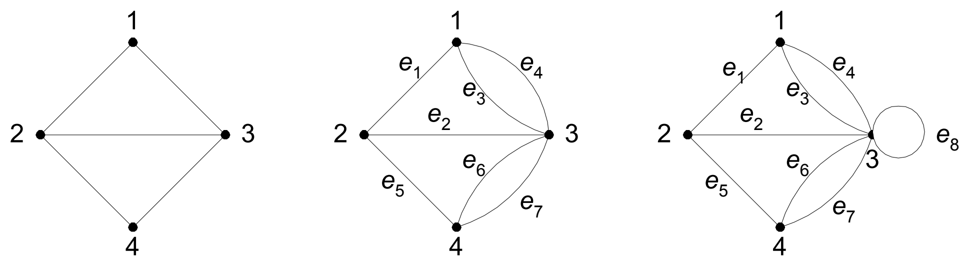
$V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

$E = \{ (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 4) \}$
$= \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

G_3 adalah graf dengan

$V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$
$E = \{ (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 4), (3, 3) \}$
$= \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$

Gambar 2. (a) graf sederhana, (b) graf ganda, dan (c) graf semu



- Pada G_2, sisi $e_3 = (1, 3)$ dan sisi $e_4 = (1, 3)$ dinamakan **sisi-ganda** (*multiple edges* atau *paralel edges*) karena kedua sisi ini menghubungi dua buah simpul yang sama, yaitu simpul 1 dan simpul 3.

- Pada G_3, sisi $e_8 = (3, 3)$ dinamakan **gelang** atau **kalang** (*loop*) karena ia berawal dan berakhir pada simpul yang sama.

Jenis-Jenis Graf

- Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, maka graf digolongkan menjadi dua jenis:

  1. **Graf sederhana** (*simple graph*).

     Graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi-ganda dinamakan graf sederhana. G_1 pada Gambar 2 adalah contoh graf sederhana

  2. **Graf tak-sederhana** (*unsimple-graph*).

     Graf yang mengandung sisi ganda atau gelang dinamakan graf tak-sederhana (*unsimple graph*). G_2 dan G_3 pada Gambar 2 adalah contoh graf tak-sederhana

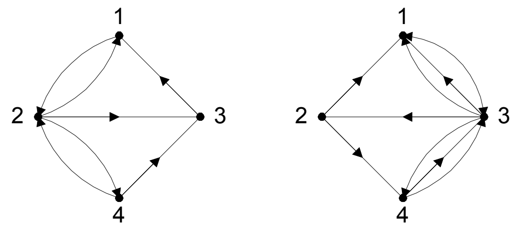
Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan atas 2 jenis:

1. **Graf tak-berarah** (*undirected graph*)

Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak-berarah. Tiga buah graf pada Gambar 2 adalah graf tak-berarah.

2. **Graf berarah** (*directed graph* atau *digraph*)

Graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah disebut sebagai graf berarah. Dua buah graf pada Gambar 3 adalah graf berarah.



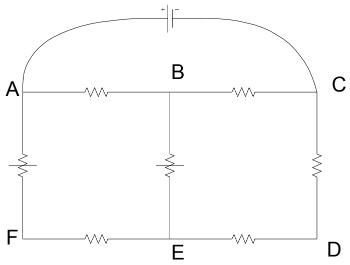
Gambar 3 (a) graf berarah, (b) graf-ganda berarah

Tabel 1 Jenis-jenis graf [ROS99]

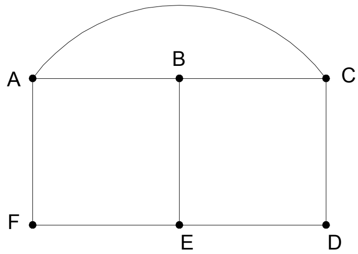
Jenis	Sisi	Sisi ganda dibolehkan?	Sisi gelang dibolehkan?
Graf sederhana	Tak-berarah	Tidak	Tidak
Graf ganda	Tak-berarah	Ya	Tidak
Graf semu	Tak-berarah	Ya	Ya
Graf berarah	Bearah	Tidak	Ya
Graf-ganda berarah	Bearah	Ya	Ya

Contoh Terapan Graf

1. *Rangkaian listrik*.



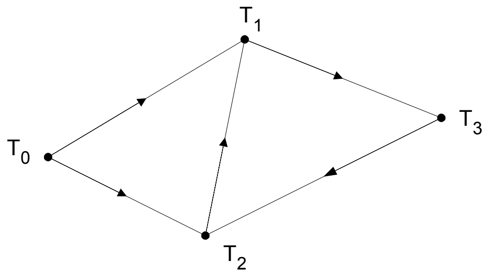
(a)



(b)

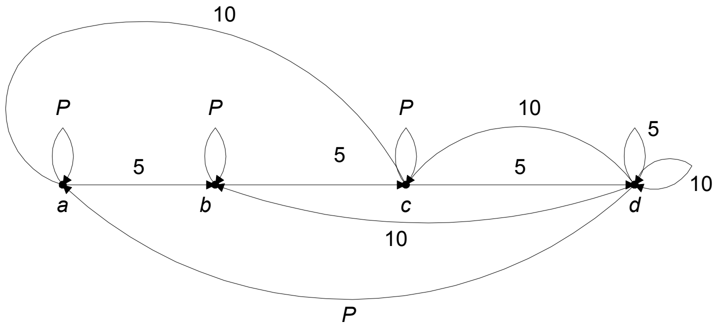
3. *Transaksi konkuren pada basis data terpusat*

Transaksi T_0 menunggu transaksi T_1 dan T_2
Transaksi T_2 menunggu transaksi T_1
Transaksi T_1 menunggu transaksi T_3
Transaksi T_3 menunggu transaksi T_2



5. *Terapan graf pada teori otomata* [LIU85].

Mesin jaja (*vending machine*)



Keterangan:
a : 0 sen dimasukkan
b : 5 sen dimasukkan
c : 10 sen dimasukkan
d : 15 sen atau lebih dimasukkan

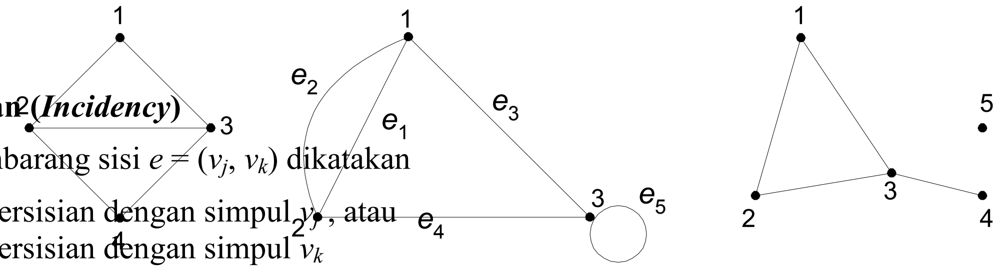
LATIHAN

- Gambarkan graf yang menggambarkan sistem pertandingan ½ kompetisi (*round-robin tournaments*) yang diikuti oleh 6 tim.

Terminologi Graf

1. Ketetanggaan (*Adjacent*)

Dua buah simpul dikatakan *bertetangga* bila keduanya terhubung langsung.
Tinjau graf G_1 : simpul 1 bertetangga dengan simpul 2 dan 3,
simpul 1 tidak bertetangga dengan simpul 4.



2. Bersisian (*Incidency*)

Untuk sembarang sisi $e = (v_j, v_k)$ dikatakan

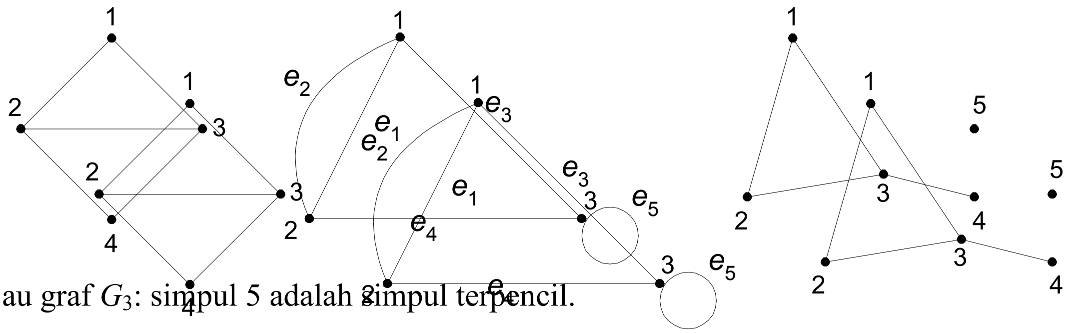
e bersisian dengan simpul v_j , atau
e bersisian dengan simpul v_k

G_1 G_2 G_3

Tinjau graf G_1: sisi (2, 3) bersisian dengan simpul 2 dan simpul 3,
sisi (2, 4) bersisian dengan simpul 2 dan simpul 4,
tetapi sisi (1, 2) tidak bersisian dengan simpul 4.

3. Simpul Terpencil (*Isolated Vertex*)

Simpul terpencil ialah simpul yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya.



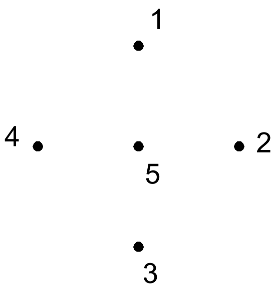
Tinjau graf G_3: simpul 5 adalah simpul terpencil.

G_1 G_2 G_3

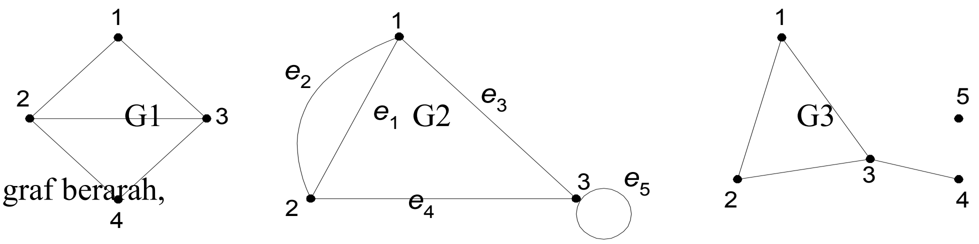
4. Graf Kosong (*null graph* atau *empty graph*)

Graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong (N_n).
Graf N_5 :

5. Derajat (*Degree*)



Derajat suatu simpul adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut.
Notasi: $d(v)$
Tinjau graf G_1: $d(1) = d(4) = 2$
$d(2) = d(3) = 3$
Tinjau graf G_3: $d(5) = 0$ → simpul terpencil
$d(4) = 1$ → simpul anting-anting (*pendant vertex*)
Tinjau graf G_2: $d(1) = 3$ → bersisian dengan sisi ganda
$d(2) = 4$ → bersisian dengan sisi gelang (*loop*)

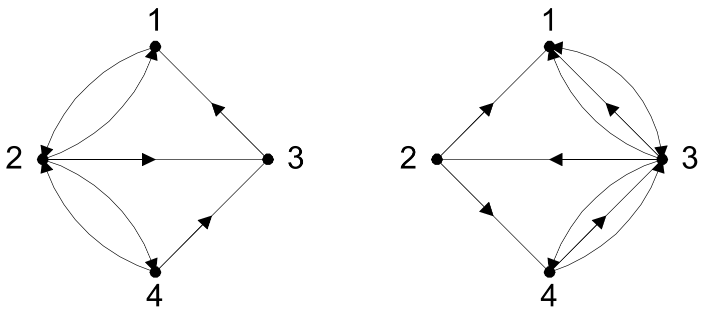


Pada graf berarah,

$d_{\text{in}}(v)$ = derajat-masuk (*in-degree*)
= jumlah busur yang masuk ke simpul v

$d_{\text{out}}(v)$ = derajat-keluar (*out-degree*)
= jumlah busur yang keluar dari simpul v

$d(v) = d_{\text{in}}(v) + d_{\text{out}}(v)$
Tinjau graf G_4:

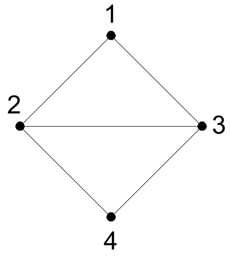


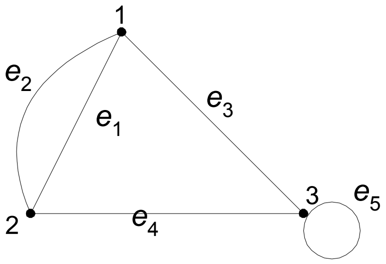
$d_{\text{in}}(1) = 2$; $d_{\text{out}}(1) = 1$
$d_{\text{in}}(2) = 2$; $d_{\text{out}}(2) = 3$
$d_{\text{in}}(3) = 2$; $d_{\text{out}}(3) = 1$
$d_{\text{in}}(4) = 1$; $d_{\text{out}}(3) = 2$

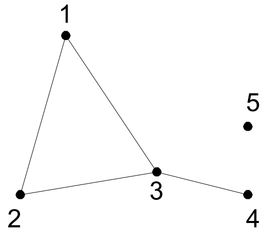
Lemma Jabat Tangan. Jumlah derajat semua simpul pada suatu graf adalah genap, yaitu dua kali jumlah sisi pada graf tersebut.
Dengan kata lain, jika $G = (V, E)$, maka $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$

Tinjau graf G_1: $d(1) + d(2) + d(3) + d(4) = 2 + 3 + 3 + 2 = 10$
$= 2 \times$ jumlah sisi $= 2 \times 5$
Tinjau graf G_2: $d(1) + d(2) + d(3) = 3 + 4 + 3 = 10$
$= 2 \times$ jumlah sisi $= 2 \times 5$
Tinjau graf G_3: $d(1) + d(2) + d(3) + d(4) + d(5)$
$= 2 + 2 + 3 + 1 + 0 = 8$

= 2 × jumlah sisi = 2 × 4







- Akibat dari *lemma* (*corollary*):

Teorema: Untuk sembarang graf G, banyaknya simpul berderajat ganjil selau genap.
Contoh 2. Diketahui graf dengan lima buah simpul. Dapatkah kita menggambar graf tersebut jika derajat masing-masing simpul adalah:

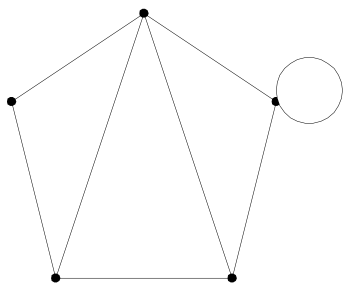
(a) 2, 3, 1, 1, 2
(b) 2, 3, 3, 4, 4

Penyelesaian:

(a) tidak dapat, karena jumlah derajat semua simpulnya ganjil
(2 + 3 + 1 + 1 + 2 = 9).

(b) dapat, karena jumlah derajat semua simpulnya genap

(2 + 3 + 3 + 4 + 4 = 16).



LATIHAN

- Mungkinkah dibuat graf-sederhana 5 simpul dengan derajat masing-masing simpul adalah:

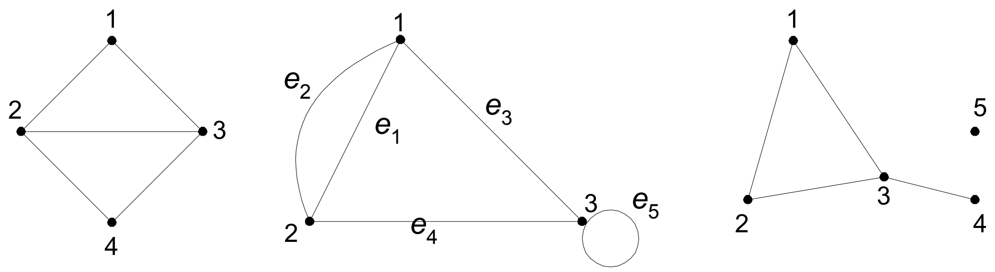
(a) 5, 2, 3, 2, 4
(b) 4, 4, 3, 2, 3
(c) 3, 3, 2, 3, 2
(d) 4, 4, 1, 3, 2

Jika mungkin, berikan satu contohnya, jika tidak mungkin, berikan alasan singkat.
Jawaban:
(a) 5, 2, 3, 2, 4: Tidak mungkin, karena ada simpul berderajat 5
(b) 4, 4, 3, 2, 3: Mungkin [contoh banyak]
(c) 3, 3, 2, 3, 2: Tidak mungkin, karena jumlah simpul berderajat ganjil ada 3 buah (alasan lain, karena jumlah derajat ganjil)
(d) 4, 4, 1, 3, 2: Tidak mungkin, karena simpul-1 dan simpul-2 harus bertetangga dengan simpul sisanya, berarti simpul-3 minimal berderajat 2 (kontradiksi dengan simpul-3 berderajat 1)

6. Lintasan (*Path*)

Lintasan yang panjangnya n dari simpul awal v_0 ke simpul tujuan v_n di dalam graf G ialah barisan berselang-seling simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk v_0, e_1, v_1, e_2, v_2,... , v_{n-1}, e_n, v_n sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1)$, $e_2 = (v_1, v_2)$, ... , $e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi-sisi dari graf G.

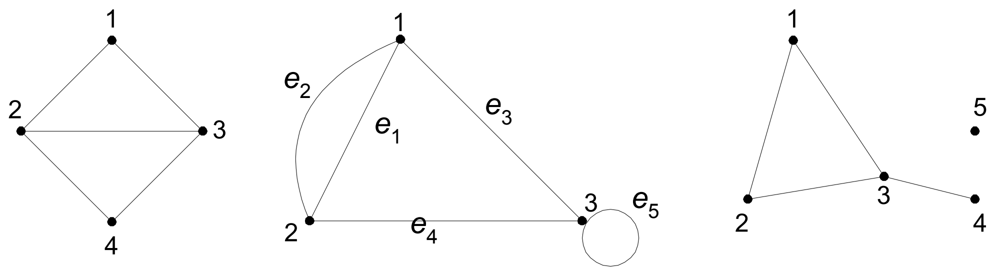
Tinjau graf G_1: lintasan 1, 2, 4, 3 adalah lintasan dengan barisan sisi (1,2), (2,4), (4,3).
Panjang lintasan adalah jumlah sisi dalam lintasan tersebut. Lintasan 1, 2, 4, 3 pada G_1 memiliki panjang 3.



G_1 G_2 G_3

7. Siklus (*Cycle*) atau Sirkuit (*Circuit*)

Lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut **sirkuit** atau **siklus**.
Tinjau graf G_1: 1, 2, 3, 1 adalah sebuah sirkuit.
Panjang sirkuit adalah jumlah sisi dalam sirkuit tersebut. Sirkuit 1, 2, 3, 1 pada G_1 memiliki panjang 3.



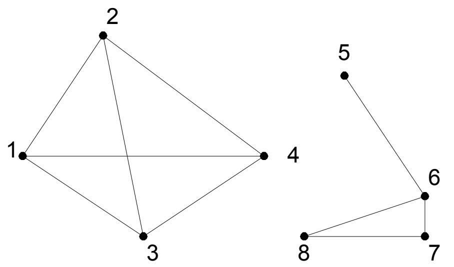
G_1 G_2 G_3

8. Terhubung (*Connected*)

Dua buah simpul v_1 dan simpul v_2 disebut **terhubung** jika terdapat lintasan dari v_1 ke v_2.

G disebut **graf terhubung** (*connected graph*) jika untuk setiap pasang simpul v_i dan v_j dalam himpunan V terdapat lintasan dari v_i ke v_j.

Jika tidak, maka G disebut **graf tak-terhubung** (*disconnected graph*).



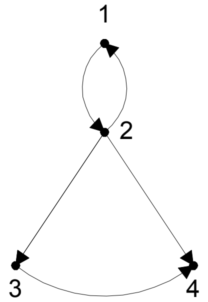
Contoh graf tak-terhubung:

Graf berarah G dikatakan terhubung jika graf tidak berarahnya terhubung (graf tidak berarah dari G diperoleh dengan menghilangkan arahnya).

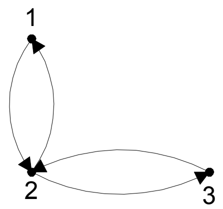
Dua simpul, u dan v, pada graf berarah G disebut **terhubung kuat** (*strongly connected*) jika terdapat lintasan berarah dari u ke v dan juga lintasan berarah dari v ke u.

Jika u dan v tidak terhubung kuat tetapi terhubung pada graf tidak berarahnya, maka u dan v dikatakan **terhubung lemah** (*weakly coonected*).

Graf berarah G disebut **graf terhubung kuat** (*strongly connected graph*) apabila untuk setiap pasang simpul sembarang u dan v di G, terhubung kuat. Kalau tidak, G disebut **graf terhubung lemah**.



graf berarah terhubung lemah



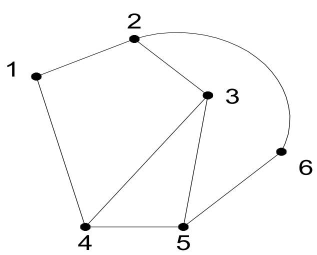
graf berarah terhubung kuat

8. Upagraf (*Subgraph*) dan Komplemen Upagraf

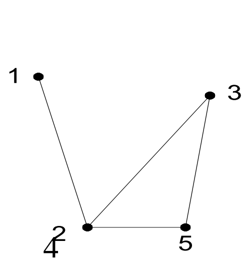
Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf. $G_1 = (V_1, E_1)$ adalah **upagraf** (*subgraph*) dari G jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$.

Komplemen dari upagraf G_1 terhadap graf G adalah graf $G_2 = (V_2, E_2)$ sedemikian sehingga $E_2 = E - E_1$ dan V_2 adalah himpunan simpul yang anggota-anggota E_2 bersisian dengannya.

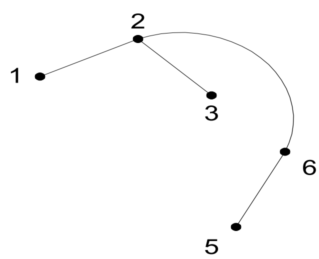
(a) Graf G_1



(b) Sebuah upagraf

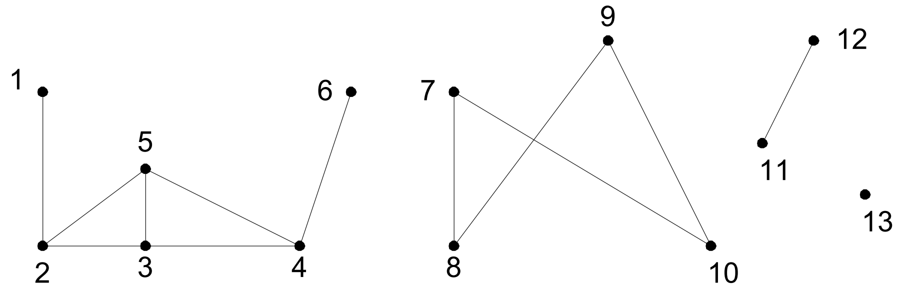


(c) komplemen dari upagraf (b)



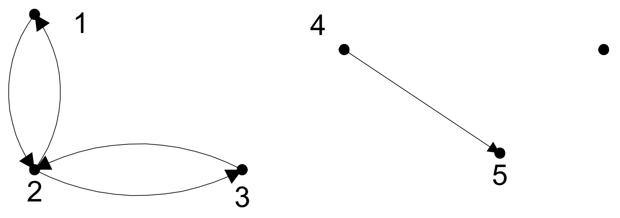
Komponen graf (*connected component*) adalah jumlah maksimum upagraf terhubung dalam graf G.

Graf G di bawah ini mempunyai 4 buah komponen.



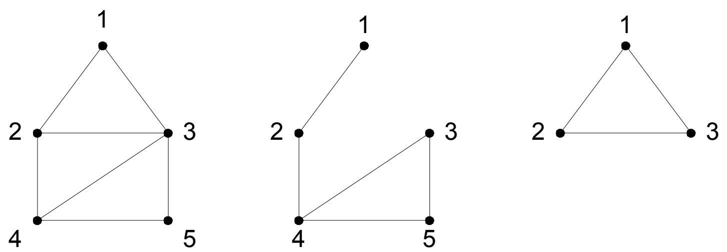
Pada graf berarah, komponen terhubung kuat (*strongly connected component*) adalah jumlah maksimum upagraf yang terhubung kuat.

Graf di bawah ini mempunyai 2 buah komponen terhubung kuat:



9. Upagraf Rentang (*Spanning Subgraph*)

Upagraf $G_1 = (V_1, E_1)$ dari $G = (V, E)$ dikatakan **upagraf rentang** jika $V_1 = V$ (yaitu G_1 mengandung semua simpul dari G).



(a) graf G, (b) upagraf rentang dari G, (c) bukan upagraf rentang dari G

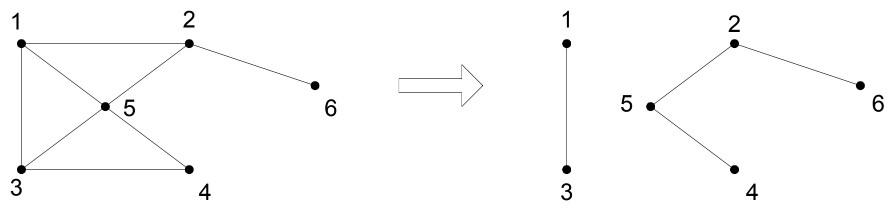
10. *Cut-Set*

Cut-set dari graf terhubung G adalah himpunan sisi yang bila dibuang dari G menyebabkan G tidak terhubung. Jadi, *cut-set* selalu menghasilkan dua buah komponen.

Pada graf di bawah, {(1,2), (1,5), (3,5), (3,4)} adalah *cut-set*. Terdapat banyak *cut-set* pada sebuah graf terhubung.

Himpunan {(1,2), (2,5)} juga adalah *cut-set*, {(1,3), (1,5), (1,2)} adalah *cut-set*, {(2,6)} juga *cut-set*,

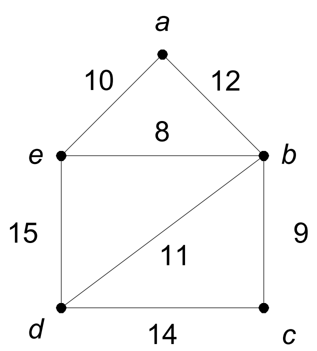
tetapi {(1,2), (2,5), (4,5)} bukan *cut-set* sebab himpunan bagiannya, {(1,2), (2,5)} adalah *cut-set*.



(a) (b)

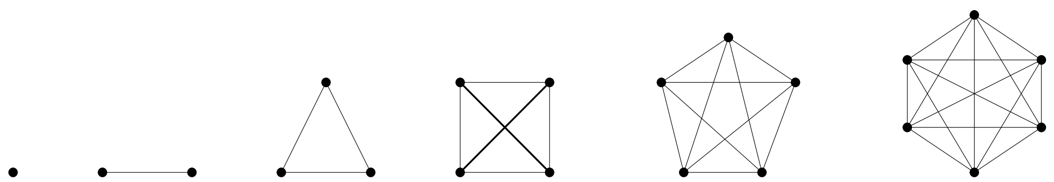
11. Graf Berbobot (*Weighted Graph*)

Graf berbobot adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah harga (bobot).



Beberapa Graf Khusus
a. Graf Lengkap (*Complete Graph*)

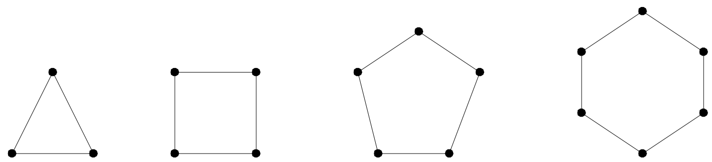
Graf lengkap ialah graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Graf lengkap dengan *n* buah simpul dilambangkan dengan K_n. Jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari *n* buah simpul adalah $n(n-1)/2$.



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6

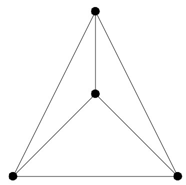
b. Graf Lingkaran

Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n simpul dilambangkan dengan C_n.



c. Graf Teratur (*Regular Graphs*)

Graf yang setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama disebut **graf teratur**. Apabila derajat setiap simpul adalah r, maka graf tersebut disebut sebagai graf teratur derajat r. Jumlah sisi pada graf teratur adalah $nr/2$.



LATIHAN

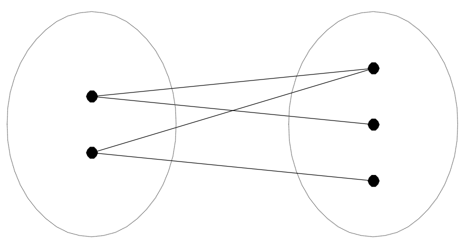
- Berapa jumlah maksimum dan jumlah minimum simpul pada graf sederhana yang mempunyai 16 buah sisi dan tiap simpul berderajat sama dan tiap simpul berderajat ≥ 4 ?
- Jawaban: Tiap simpul berderajat sama -> graf teratur.
- Jumlah sisi pada graf teratur berderajat r adalah e = nr/2. Jadi, n = 2e/r = (2)(16)/r = 32/r.
- Untuk r = 4, jumlah simpul yang dapat dibuat adalah maksimum, yaitu n = 32/4 = 8.
- Untuk r yang lain (r > 4 dan r merupakan pembagi bilangan bulat dari 32):

  r = 8 -> n = 32/8 = 4 -> tidak mungkin membuat graf sederhana.

  r = 16 -> n = 32/16 = 2 -> tidak mungkin membuat graf sederhana.
- Jadi, jumlah simpul yang dapat dibuat adalah 8 buah (maksimum dan minimum).

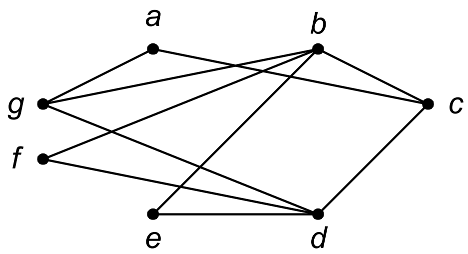
d. Graf *Bipartite* (*Bipartite Graph*)

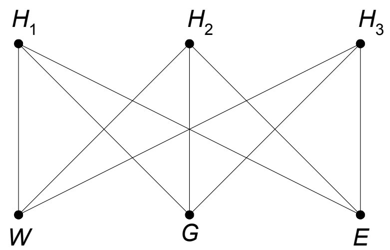
Graf G yang himpunan simpulnya dapat dipisah menjadi dua himpunan bagian V_1 dan V_2, sedemikian sehingga setiap sisi pada G menghubungkan sebuah simpul di V_1 ke sebuah simpul di V_2 disebut **graf bipartit** dan dinyatakan sebagai $G(V_1, V_2)$.



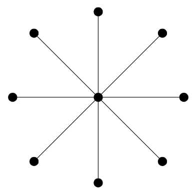
V_1 V_2

Graf G di bawah ini adalah graf bipartit, karena simpul-simpunya dapat dibagi menjadi $V_1 = \{a, b, d\}$ dan $V_2 = \{c, e, f, g\}$





graf persoalan utilitas ($K_{3,3}$),



topologi bintang

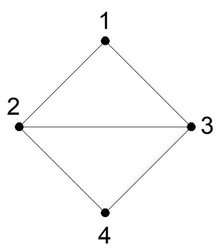
Representasi Graf

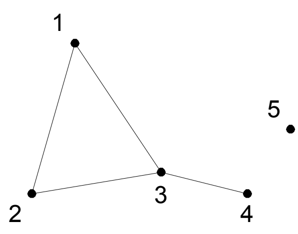
1. Matriks Ketetanggaan (*adjacency matrix*)

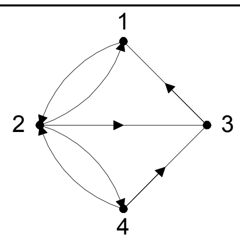
$A = [a_{ij}]$,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ jika simpul } i \text{ dan } j \text{ bertetangga} \\ 0, \text{ jika simpul } i \text{ dan } j \text{ tidak bertetangga} \end{cases}$$

Contoh:





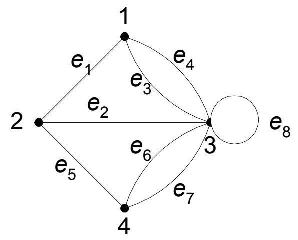


$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(a) (b) (c)



$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

Derajat tiap simpul i:

(a) Untuk graf tak-berarah

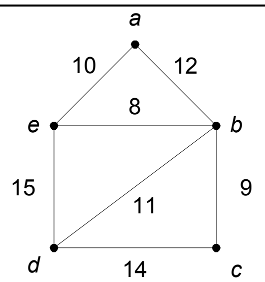
$$d(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

(b) Untuk graf berarah,

$$d_{in}(v_j) = \text{jumlah nilai pada kolom } j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

$$d_{out}(v_i) = \text{jumlah nilai pada baris } i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

a *b* *c* *d* *e*

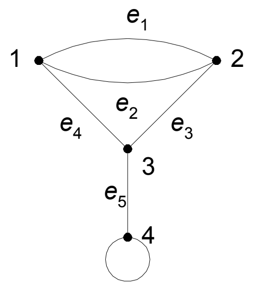


$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}\begin{bmatrix} \infty & 12 & \infty & \infty & 10 \\ 12 & \infty & 9 & 11 & 8 \\ \infty & 9 & \infty & 14 & \infty \\ \infty & 11 & 14 & \infty & 15 \\ 10 & 8 & \infty & 15 & \infty \end{bmatrix}$$

2. Matriks Bersisian (*incidency matrix*)

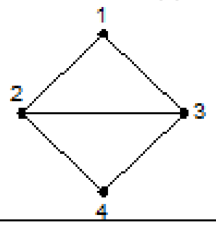
$A = [a_{ij}]$,

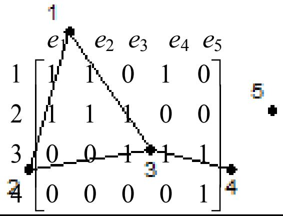
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika simpul } i \text{ bersisian dengan sisi } j \\ 0, & \text{jika simpul } i \text{ tidak bersisian dengan sisi } j \end{cases}$$

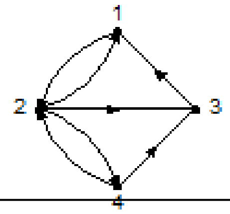


$$\begin{array}{c|ccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Senarai Ketetanggaan







Simpul	Simpul Tetangga
1	2, 3
2	1, 3, 4
3	1, 2, 4
4	2, 3

(a)

Simpul	Simpul Tetangga
1	2, 3
2	1, 3
3	1, 2, 4
4	3
5	-

(b)

Simpul	Simpul Terminal
1	2
2	1, 3, 4
3	1
4	2, 3

(c)

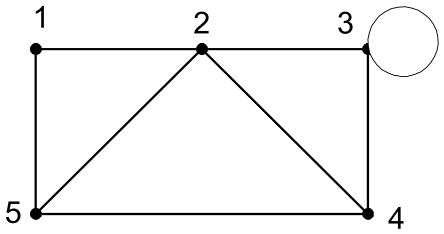
Graf Isomorfik

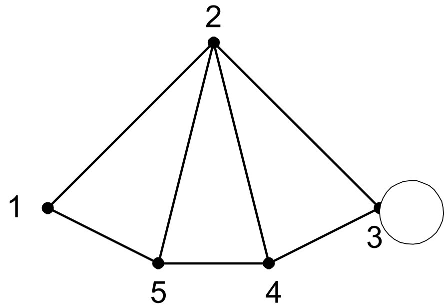
- Diketahui matriks ketetanggaan (*adjacency matrices*) dari sebuah graf tidak berarah. Gambarkan dua buah graf yang yang bersesuaian dengan matriks tersebut.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Jawaban:

- Dua buah graf yang sama (hanya penggambaran secara geometri berbeda)





→ **isomorfik**!

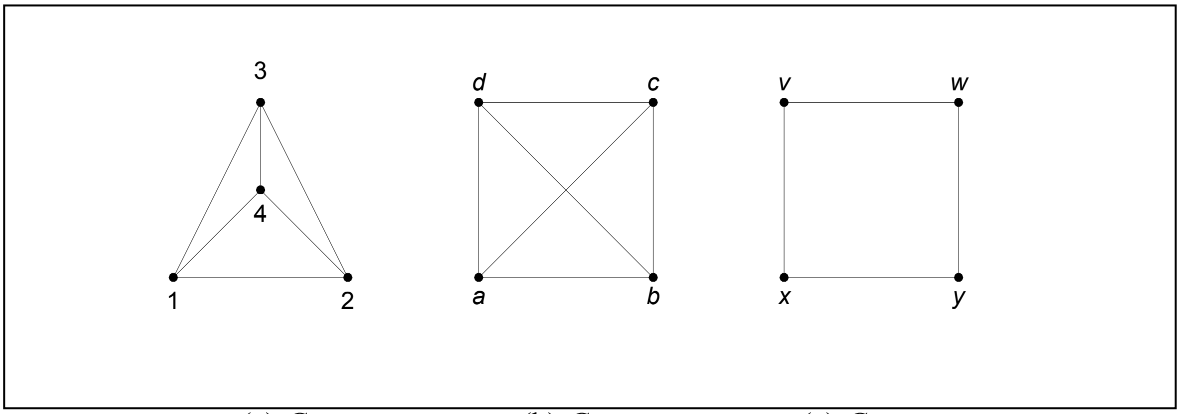
Graf IsomorfikV

- Dua buah graf yang sama tetapi secara geometri berbeda disebut graf yang saling **isomorfik**.

- Dua buah graf, G_1 dan G_2 dikatakan isomorfik jika terdapat korespondensi satu-satu antara simpul-simpul keduanya dan antara sisi-sisi keduaya sedemikian sehingga hubungan kebersisian tetap terjaga.

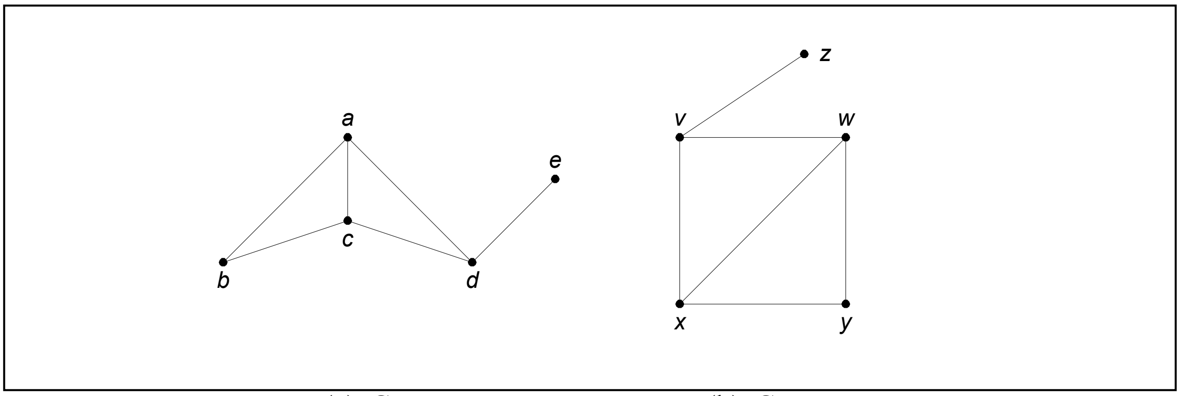
- Dengan kata lain, misalkan sisi e bersisian dengan simpul u dan v di G_1, maka sisi e' yang berkoresponden di G_2 harus bersisian dengan simpul u' dan v' yang di G_2.

- Dua buah graf yang isomorfik adalah graf yang sama, kecuali penamaan simpul dan sisinya saja yang berbeda. Ini benar karena sebuah graf dapat digambarkan dalam banyak cara.



(a) G_1 (b) G_2 (c) G_3

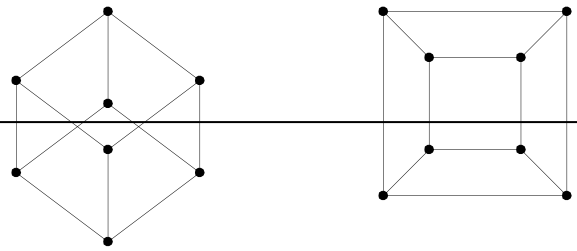
Gambar 6.35 G_1 isomorfik dengan G_2, tetapi G_1 tidak isomorfik dengan G_3



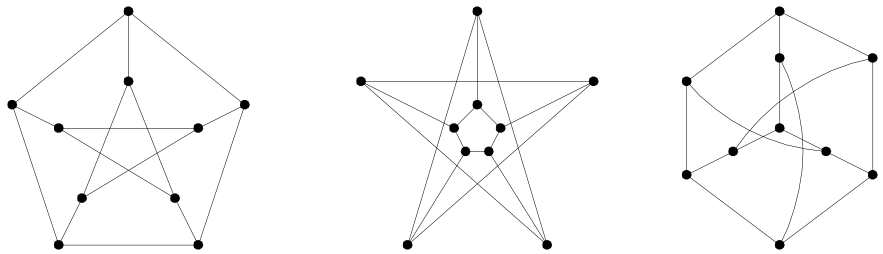
(a) G_1 (b) G_2

Gambar 6.36 Graf (a) dan graf (b) isomorfik [DEO74]

$$A_{G1} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad A_{G2} = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ w \\ v \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & w & v & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



(a)



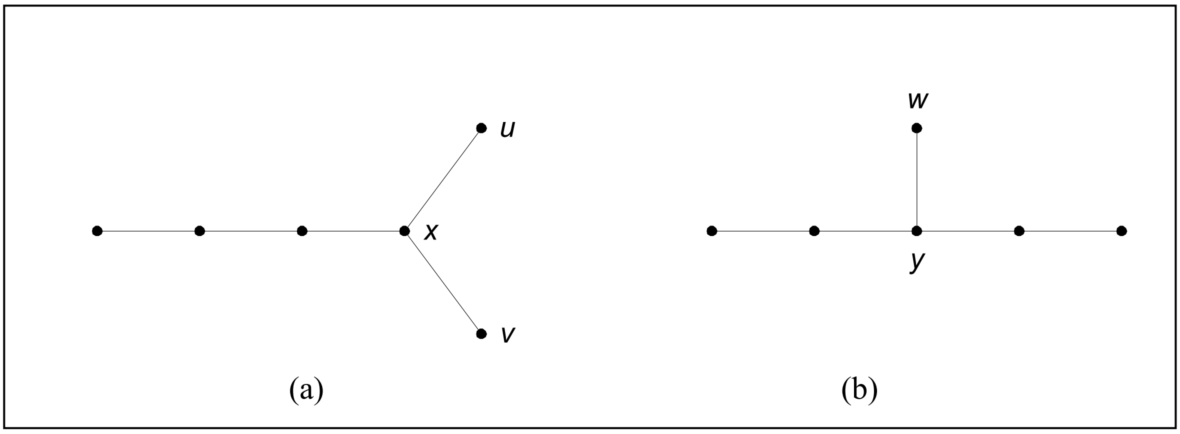
(b)

Gambar 6.38 (a) Dua buah graf isomorfik, (b) tiga buah graf isomorfik

Dari definisi graf isomorfik dapat dikemukakan bahwa dua buah graf isomorfik memenuhi ketiga syarat berikut [DEO74]:

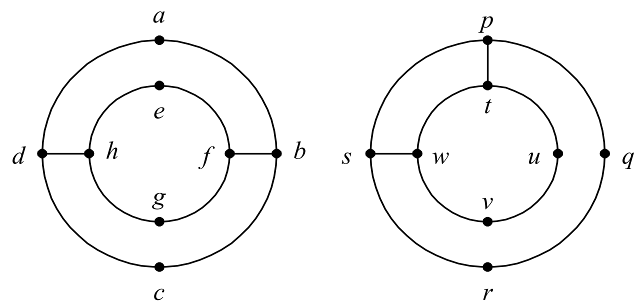
1. Mempunyai jumlah simpul yang sama.
2. Mempunyai jumlah sisi yang sama
3. Mempunyai jumlah simpul yang sama berderajat tertentu

Namun, ketiga syarat ini ternyata belum cukup menjamin. Pemeriksaan secara visual perlu dilakukan.

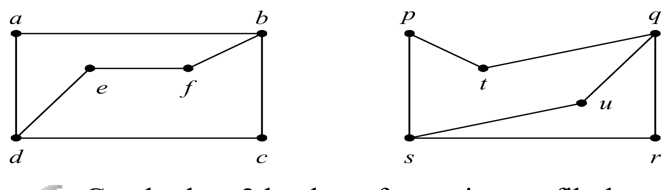


LATIHAN

- Apakah pasangan graf di bawah ini isomorfik?

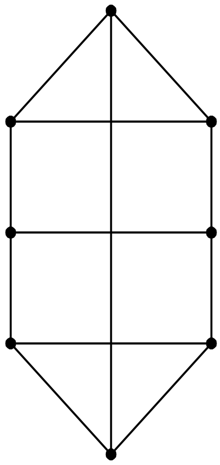


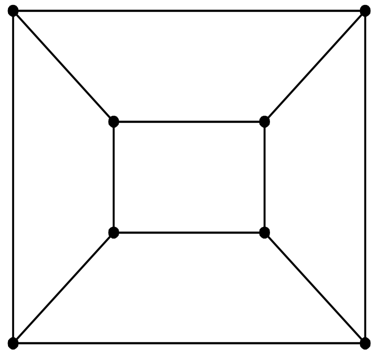
- Apakah pasangan graf di bawah ini isomorfik?



- Gambarkan 2 buah graf yang isomorfik dengan graf teratur berderajat 3 yang mempunyai 8 buah simpul

JAWABAN



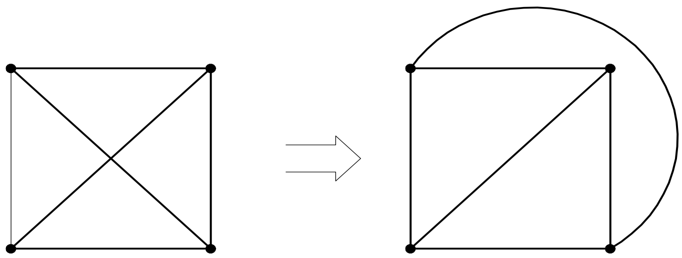


Graf Planar (*Planar Graph*) dan Graf Bidang (*Plane Graph*)

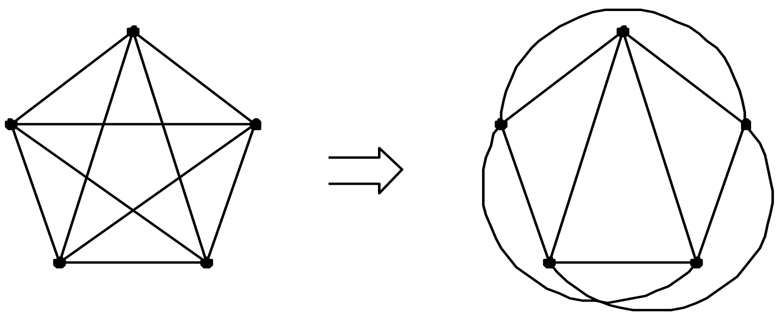
- Graf yang dapat digambarkan pada bidang datar dengan sisi-sisi tidak saling memotong (bersilangan) disebut **graf planar**,

- jika tidak, maka ia disebut **graf tak-planar**.

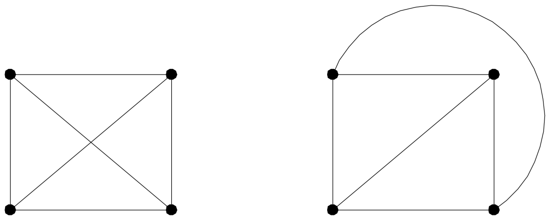
- K_4 adalah graf planar:



- K_5 adalah graf tidak planar:

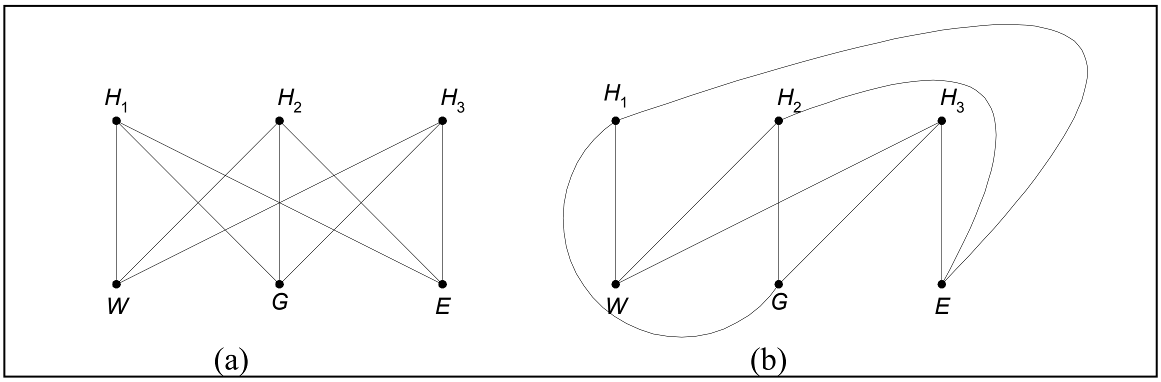


Graf planar yang digambarkan dengan sisi-sisi yang tidak saling berpotongan disebut **graf bidang** (*plane graph*).



(a) (b) (c)

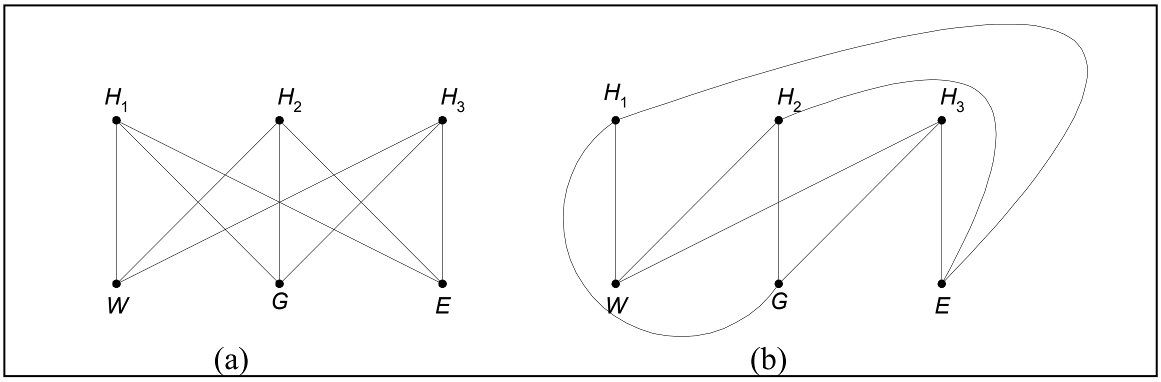
Persoalan utilitas (*utility problem*)



(a) Graf persoalan utilitas ($K_{3,3}$), (b) graf persoalan utilitas bukan graf planar.

Tiga buah graf planar. Graf (b) dan (c) adalah graf bidang

Persoalan utilitas (*utility problem*)

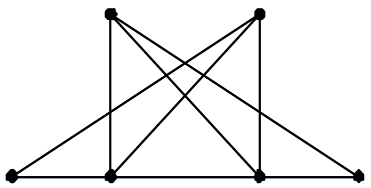


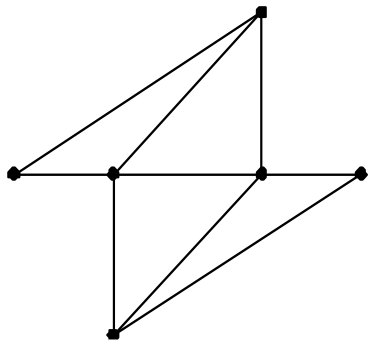
(a) Graf persoalan utilitas ($K_{3,3}$), (b) graf persoalan utilitas bukan graf planar.

- Perancangan IC (*Integrated Circuit*)
- Tidak boleh ada kawat-kawat di dalam *IC-board* yang saling bersilangan → dapat menimbulkan interferensi arus listrik → *malfunction*
- Perancangan kawat memenuhi prinsip graf planar

LATIHAN

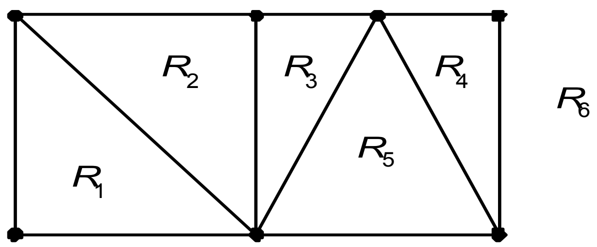
- Gambarkan graf (kiri) di bawah ini sehingga tidak ada sisi-sisi yang berpotongan (menjadi graf bidang). (Solusi: graf kanan)





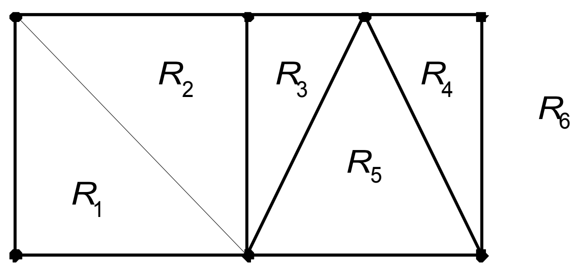
- Sisi-sisi pada graf bidang membagi bidang datar menjadi beberapa wilayah (*region*) atau muka (*face*).

- Graf bidang pada gambar di bawah initerdiri atas 6 wilayah (termasuk wilayah terluar):



- Hubungan antara jumlah simpul (n), jumlah sisi (e), dan jumlah wilayah (f) pada graf bidang:

$$n - e + f = 2 \quad \text{(Rumus Euler)}$$



- Pada Gambar di atas, $e = 11$ dan $n = 7$, $f = 6$, maka

$$11 - 7 + 6 = 2.$$

LATIHAN

- Misalkan graf sederhana planar memiliki 24 buah simpul, masing-masing simpul berderajat 4. Representasi planar dari graf tersebut membagi bidang datar menjadi sejumlah wilayah atau muka. Berapa banyak wilayah yang terbentuk?

JAWABAN

- Diketahui n = jumlah simpul = 24, maka jumlah derajat seluruh simpul = $24 \times 4 = 96$.

- Menurut *lemma* jabat tangan,

$$\text{jumlah derajat} = 2 \times \text{jumlah sisi},$$

sehingga

$$\text{jumlah sisi} = e = \text{jumlah derajat}/2 = 96/2 = 48$$

- Dari rumus Euler, $n - e + f = 2$, sehingga

  $f = 2 - n + e = 2 - 24 + 48 = 26$ buah.

- Pada graf planar sederhana terhubung dengan f buah wilayah, n buah simpul, dan e buah sisi ($e > 2$) selalu berlaku:

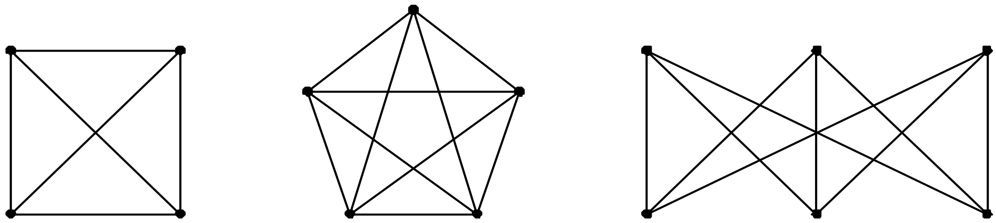
$$e \leq 3n - 6$$

- Ketidaksamaan yang terakhir dinamakan **ketidaksamaan Euler**,
- yang dapat digunakan untuk menunjukkan keplanaran suatu graf sederhana
- kalau graf planar, maka ia memenuhi ketidaksamaan Euler, sebaliknya jika tidak planar maka ketidaksamaan tersebut tidak dipenuhi.
- Contoh: Pada K_4, $n = 4$, $e = 6$, memenuhi ketidaksamaan Euler, sebab

$$6 \leq 3(4) - 6. \quad \text{Jadi, } K_4 \text{ adalah graf planar.}$$

Pada graf K_5, $n = 5$ dan $e = 10$, tidak memenuhi ketidaksamaan Euler sebab

$$10 \geq 3(5) - 6. \quad \text{Jadi, } K_5 \text{ tidak planar}$$



K_4 K_5 $K_{3,3}$

Ketidaksamaan $e \leq 3n - 6$ tidak berlaku untuk $K_{3,3}$
karena

$e = 9$, $n = 6$

$9 \leq (3)(6) - 6 = 12$ (jadi, $e \leq 3n - 6$)

padahal graf $K_{3,3}$ bukan graf planar!
Buat asumsi baru: setiap daerah pada graf planar dibatasi oleh paling sedikit empat buah sisi,
Dari penurunan rumus diperoleh

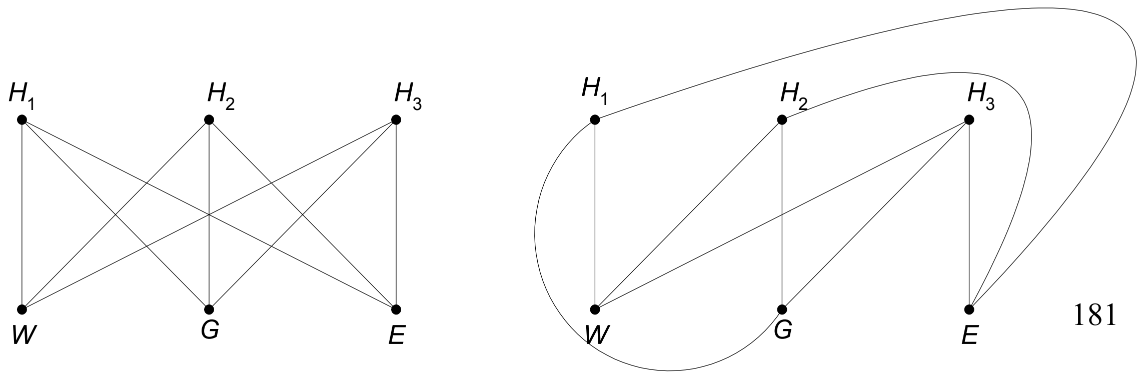
$e \leq 2n$ - 4

Contoh Graf $K_{3,3}$ pada Gambar di bawah memenuhi ketidaksamaan $e \leq 2n - 6$, karena

$e = 9$, $n = 6$

$9 \leq (2)(6) - 4 = 8$ (salah)

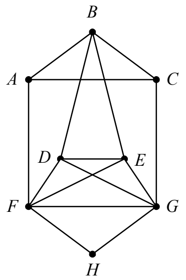
yang berarti $K_{3,3}$ bukan graf planar.



latihan Graph

1. Banyaknya jumlah minimum simpul yang diperlukan agar sebuah graf dengan 11 buah sisi menjadi planar adalah?

2.Diberikan gambar sebuah graf seperti di bawah ini.



Jumlah bilangan kromatis pada graf di atasadalah?

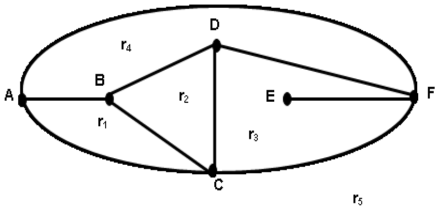
3.Dept. IF mempunyai 6 kelompok kerja yang setiap bulannya masing-masing selalu mengadakan rapat satu kali. Keenam kelompok kerja dengan masing-masing anggotanya adalah: K1 = {Amir, Budi, Yanti}, K2 = {Budi, Hasan, Tommy}, K3 = {Amir, Tommy, Yanti}, K4 = {Hasan, Tommy, Yanti}, K5 = {Amir, Budi}, K6 = {Budi, Tommy, Yanti}. Banyaknya waktu rapat berbeda yang harus direncanakan sehingga tidak ada anggota kelompok kerja yang dijadwalkan rapat pada waktu yang sama adalah?

4.Sebuah perusahaan ingin membangun system telekomunikasi yg menhubungkan 7 cabangnya. Jarak antar cabang dinyatakan dalam table berikut :

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	20	42	31	28	29	33
B		0	25	35	29	24	31
C			0	41	33	22	38
D				0	34	36	40
E					0	41	32
F						0	25
G							0

Biaya termurah dari kasus di atas adalah?

5. Perhatikan graf berikut!



Banyaknya derajat pada graf di atas adalah?

SATUAN ACARA PENGAJARAN

(SAP)

Mata Kuliah	: Matematika Diskrit
Kode	: TIS 4223
Semester	: III
Waktu	: 2 x 50 Menit
Pertemuan	: 16

A. Kompetensi

1. Utama

   Mahasiswa dapat memahami tentang pengertian induksi matematik, rekursi, relasi dan kombinasi.

2. Pendukung

   Untuk mengevaluasi pemahaman mahasiswa terhadap materi 9 s.d 15.

B. Pokok Bahasan

Evaluasi pemahaman mahasiswa terhadap materi 9 s.d 15.

C. Sub Pokok Bahasan

Ujian Akhir Semester

D. Kegiatan Belajar Mengajar

n Kegiatan	an Pengajaran	an mahasiswa	& Alat Peraga
uluan	mberikan informasi peraturan ujian Akhir Semester	engarkan dan memberikan komentar	E
ian	mberikan soal ujian Akhir Semester	lesaikan soal ujian dengan tenang.	ian
p	ngumpulkan Lembaran jawaban ujian	erthatikan, memcatat dan memberikan komentar, mengajukan pertanyaan	

E. Evaluasi

Evaluasi dilakukan dengan cara memberikan pertanyaan langsung dan memberikan latihan tertulis pada satu jam terakhir

RENCANA KEGIATAN BELAJAR MINGGUAN

(RKBM)

Mata Kuliah : Matematika Diskrit

Kode : TIS 4223

Semester : III

Waktu : 2 x 50 Menit

Pertemuan : 16

u Ke-		DE PEMBELAJAR AN	i Waktu)	& Alat Peraga
16	an Akhir Semester	acatan		gkapan ujian

UJIAN AKHIR SEMESTER GANJIL 2013/2014

Mata Kuliah : Matematik Diskrik dan Logika
Kode/ SKS : TIS3233
Program Studi : Teknik Informatika
Hari/Tanggal : ………………………
Ruangan : ……………………….
Dosen : Harison, M.Kom

1. Berapa banyak bilangan ganjil antara 1000 dan 9999 (termasuk 1000 dan 9999 itu sendiri) yang

(a) semua angkanya berbeda

(b) boleh ada angka yang berulang.

2. Berapakah jumlah kemungkinan membentuk 3 angka dari 5 angka berikut: 1,2,3,4 ,5, jika:

(a) tidak boleh ada pengulangan angka, dan
(b) boleh ada pengulangan angka.

3. Misalkan $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (b, d), (c, \mathrm{a}), (c, d), (d, b)\}$ adalah relasi pada himpunan $\{a, b, c, d\}$.

4. Misalkan

$$R = \{(1, 2), (1, 6), (2, 4), (3, 4), (3, 6), (3, 8)\}$$

adalah relasi dari himpunan $\{1, 2, 3\}$ ke himpunan $\{2, 4, 6, 8\}$ dan

$$S = \{(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)\}$$

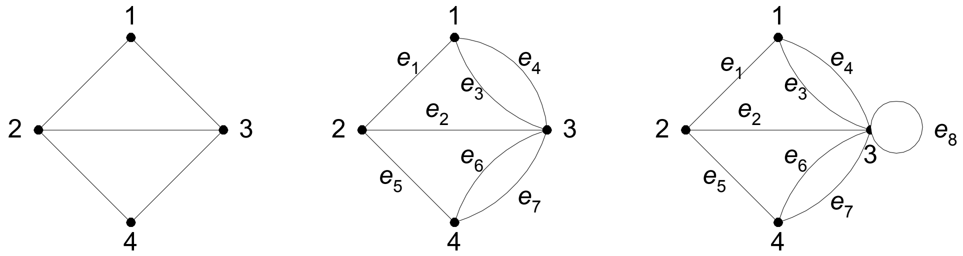
adalah relasi dari himpunan $\{2, 4, 6, 8\}$ ke himpunan $\{s, t, u\}$.

Maka komposisi relasi R dan S adalah

$$S \circ R = \{(1, u), (1, t), (2, s), (2, t), (3, s), (3, t), (3, u) \}$$

Komposisi relasi R dan S lebih jelas jika diperagakan dengan diagram panah adalah?

5. Tentukanlah himpunan graf dibawah ini



6. Mungkinkah dibuat graf-sederhana 5 simpul dengan derajat masing-masing simpul adalah:

(a) 5, 2, 3, 2, 4
(b) 4, 4, 3, 2, 3
(c) 3, 3, 2, 3, 2
(d) 4, 4, 1, 3, 2

Jika mungkin, berikan satu contohnya, jika tidak mungkin, berikan alasan singkat.

Institut Teknologi Padang
Jl.Gajah Mada Kandis Nanggalo Padang Telp 0751-7055202.email:info@itp.ac.id

JAWABAN UJIAN AKHIR SEMESTER GANJIL 2013/2014

Mata Kuliah : Matematik Diskrik dan Logika
Kode/ SKS : TIS3233
Program Studi : Teknik Informatika
Hari/Tanggal : ………………………
Ruangan : ……………………….
Dosen : Harison, M.Kom

1. Berapa banyak bilangan ganjil antara 1000 dan 9999 (termasuk 1000 dan 9999 itu sendiri) yang

(a) semua angkanya berbeda

(b) boleh ada angka yang berulang.

Penyelesaian:

(a) posisi satuan: 5 kemungkinan angka (1, 3, 5, 7, 9)

posisi ribuan: 8 kemungkinan angka

posisi ratusan: 8 kemungkinan angka

posisi puluhan: 7 kemungkinan angka

Banyak bilangan ganjil seluruhnya = (5)(8)(8)(7) = 2240 buah.

(b) posisi satuan: 5 kemungkinan angka (yaitu 1, 3, 5, 7 dan 9);

posisi ribuan: 9 kemungkinan angka (1 sampai 9)

posisi ratusan: 10 kemungkinan angka (0 sampai 9)

posisi puluhan: 10 kemungkinan angka (0 sampai 9)

Banyak bilangan ganjil seluruhnya = (5)(9)(10)(10) = 4500

2. Berapakah jumlah kemungkinan membentuk 3 angka dari 5 angka berikut: 1,2,3,4 ,5, jika:
(a) tidak boleh ada pengulangan angka, dan
(b) boleh ada pengulangan angka.

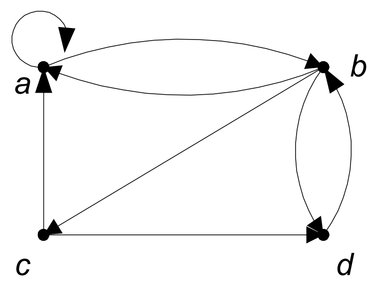
Penyelesaian:
(a) Dengan kaidah perkalian: (5)(4)(3) = 120 buah
Dengan rumus permutasi P(5, 3) = 5!/(5 – 3)! = 120

(b) Tidak dapat diselesaikan dengan rumus permutasi.
Dengan kiadah perkalian: (5)(5)(5) = 5^3 = 125.

3. Misalkan R = {(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (d, b)} adalah relasi pada himpunan {a, b, c, d}.

jawab

R direpresentasikan dengan graf berarah sbb:



4. Misalkan

R = {(1, 2), (1, 6), (2, 4), (3, 4), (3, 6), (3, 8)}

adalah relasi dari himpunan {1, 2, 3} ke himpunan {2, 4, 6, 8} dan

S = {(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)}

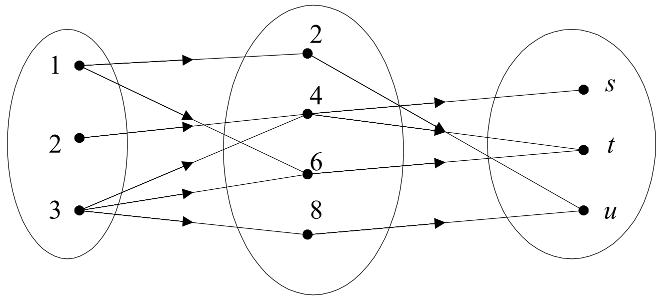
adalah relasi dari himpunan {2, 4, 6, 8} ke himpunan {s, t, u}.

Maka komposisi relasi R dan S adalah

S o R = {(1, u), (1, t), (2, s), (2, t), (3, s), (3, t), (3, u) }

Komposisi relasi R dan S lebih jelas jika diperagakan dengan diagram panah:

Jawab



R = {(1, 2), (1, 6), (2, 4), (3, 4), (3, 6), (3, 8)} adalah relasi dari himpunan {1, 2, 3} ke himpunan {2, 4, 6, 8} dan

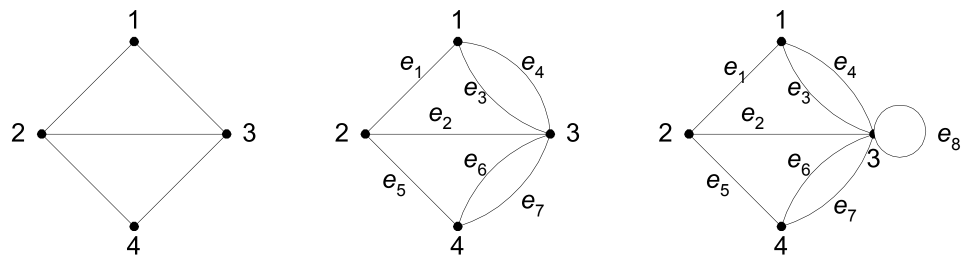
S = {(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)}

adalah relasi dari himpunan {2, 4, 6, 8} ke himpunan {s, t, u}.

Maka komposisi relasi R dan S adalah

$S \circ R$ = {(1, u), (1, t), (2, s), (2, t), (3, s), (3, t), (3, u) }

5. Tentukanlah himpunan graf dibawah ini



Jawab

(a) graf sederhana, (b) graf ganda, dan (c) graf semu

Pada G_1 adalah graf dengan

V = { 1, 2, 3, 4 } E = { (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4) }

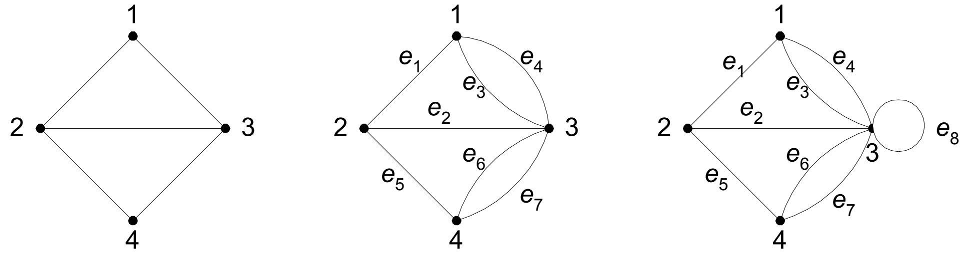
G_2 adalah graf dengan

V = { 1, 2, 3, 4 }

E = { (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 4) }
= { e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7}

G_3 adalah graf dengan

V = { 1, 2, 3, 4 }
E = { (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 4), (3, 3) }
= { e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8}



6. Mungkinkah dibuat graf-sederhana 5 simpul dengan derajat masing-masing simpul adalah:

(a) 5, 2, 3, 2, 4
(b) 4, 4, 3, 2, 3
(c) 3, 3, 2, 3, 2
(d) 4, 4, 1, 3, 2

Jika mungkin, berikan satu contohnya, jika tidak mungkin, berikan alasan singkat.

Jawaban:

(a) 5, 2, 3, 2, 4: Tidak mungkin, karena ada simpul berderajat 5

(b) 4, 4, 3, 2, 3: Mungkin [contoh banyak]

(c) 3, 3, 2, 3, 2: Tidak mungkin, karena jumlah simpul berderajat ganjil ada 3 buah (alasan lain, karena jumlah derajat ganjil)

(d) 4, 4, 1, 3, 2: Tidak mungkin, karena simpul-1 dan simpul-2 harus bertetangga dengan simpul sisanya, berarti simpul-3 minimal berderajat 2 (kontradiksi dengan simpul-3 berderajat 1)