

Matakuliah: T KENDALI
Tahun : 2014 Pertemuan 14-15

Tempat Kedudukan Akar (Root Locus Analysis)

Learning Outcomes

Pada akhir pertemuan ini, diharapkan mahasiswa akan mampu :

- menerapkan analisis dan aplikasi Tempat kedudukan Akar dalam desain sistem Pengaturan

Outline Materi

- Konstruksi Tempat Kedudukan Akar
- Asimptot
- Sudut datang
- Sudut berangkat
- Titik pisah
- Akar dominan
- Damping ratio
- Analisis Tempat Kedudukan Akar Analisis Tempat Kedudukan Akar
- Pemahaman Gain maksimum dan cara mencari nilai gain maksimum
- Pemahaman aplikasi Tempat kedudukan Akar untuk analisis sistem orde 2

ROOT LOCUS ANALYSIS

- Kutub-kutub merupakan akar-akar dari persamaan karakteristik.
- Respons transient dari sistem lup tertutup berhubungan dengan letak lokasi dari kutub-kutub (poles).
- Lokasi dari kutub tergantung dari nilai lup gain yang dipilih.
- Metoda tempat kedudukan akar (root locus method) adalah suatu cara untuk mencari akar-akar persamaan karakteristik.

- Pada metoda tempat kedudukan akar (TKA) , akar-akar persamaan karakteristik digambarkan sebagai fungsi dari gain fungsi alih lup terbuka.

Aturan Penggambaran TKA

- Aturan 1 : Titik asal TKA
 - Penguatan $K = 0$
 - Terdapat pada pole - pole sistem lup terbuka
- Aturan 2 : TKA di sumbu riil
 - Terdapat pada titik-titik di sumbu yang berjumlah total pole + zero sebelah kanan titik uji adalah ganjil.

- Aturan 3 : Tempat kedudukan akhir TKA
 - Terdapat pada zero sistem lup terbuka
 - Penguatan tak berhingga
- Aturan 4 : Asimptot
 - Garis yang bertemu / berpotongan di titik tak berhingga
 - Pusat asimtot di sumbu riil
 - Jumlah Asimptot : N
 - Total banyaknya pole dikurangi total banyaknya zero
 - Sistem lup terbuka

– Sudut Asimptot

$$\beta = \frac{\pm (k+1) 180^\circ}{N}$$

k mulai dari 0, 1, 2, 3, ...

N jumlah asimptot (n - m)

▪ Aturan 5 : Pusat Asimptot

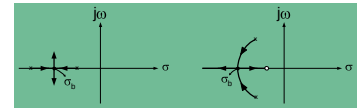
- Titik awal asimptot – asimptot
- Ada N garis asimptot

$$\sigma_c = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m}$$

- p_i adalah pole n : jumlah pole
- z_i adalah zero m : jumlah zero
m dan n dihitung dari fungsi alih lup terbuka GH.

▪ Aturan 6 : Mencari titik breakway

- Titik percabangan TKA
- Titik pertemuan 2 cabang TKA



▪ Aturan 7 :

- Pole kompleks
Sudut berangkat
- Zero kompleks
Sudut datang

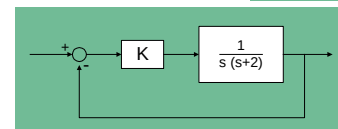
▪ Aturan 8 : Titik potong sumbu imajiner

- Batas kestabilan
- Harga penguatan maksimum sistem tetap stabil
- Dicari dengan tabel Routh
- Persamaan Auxiliary

Contoh :

Fungsi Alih Lup Terbuka

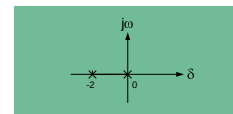
$$GH = \frac{K}{s(s+2)}$$



▪ Persamaan Karakteristik

$$S(S+2) + K = 0$$

▪ TKA di sumbu riil



diantara (-2,0) dan (0,0)

▪ Asimptot

➢ Jumlah asimptot N

➢ N = jumlah pole - zero = 2 - 0 = 2

➢ Sudut Asimptot

$$\beta = \frac{\pm (k+1) 180^\circ}{N} = \frac{\pm 180^\circ}{2} = \pm 90^\circ$$

➢ Pusat Asimptot

$$\sigma_c = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{N} = \frac{0 - 2}{2} = -1$$

Lokasi akar-akar persamaan karakteristik.

$$S^2 + 2S + K = 0$$

$$S_1 = -1 +$$

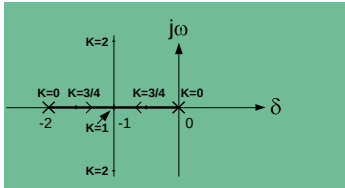
$$S_2 = -1 -$$

K	S1	S2
0	- 0 + j0	- 2 - j0
0.5	- 0.293 + j0	- 1.707 - j0
0.75	- 0.5 + j0	- 1.5 - j0
1.0	- 1.0 + j0	- 1.0 - j0
2.0	- 1.0 + j1.0	- 1.0 - j1.0
3.0	- 1.0 + j1.414	- 1.0 - j1.414

▪ Titik breakaway

$$\frac{dK}{ds} = - (s^2 + 2s)$$

$$0 = -2s - 2 \Rightarrow s = -1$$



Contoh :

Gambarkan TKA untuk $K > 0$ yang mempunyai fungsi alih lup terbuka sbb:

$$GH = \frac{K}{(s+1)(s+3-j2)(s+3+j2)}$$

▪ Persamaan Karakteristik

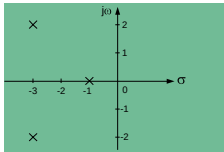
$$(s+1)(s+3-j2)(s+3+j2) + K = 0$$

$$s^3 + 7s^2 + 19s + 13 + K = 0$$

▪ Letak pole dan zero di bidang s

▪ Zero tidak ada

▪ Pole di -1 , $-3+j2$ dan $-3-j2$



▪ Asimptot

➢ Jumlah asimptot N

➢ $N = \text{jumlah pole} - \text{zero} = 3 - 0 = 3$

➢ Sudut Asimptot

$$\beta = \frac{\pm (k+1) 180^\circ}{N}$$

$$\beta = \pm 60^\circ, 180^\circ$$

▪ Pusat Asimptot

$$\sigma_c = \frac{\sum P_i - \sum Z_i}{N}$$

$$\sigma_c = \frac{(-2) + (-1) + (0) - (-3) - (-1)}{3 - 0}$$

$$\sigma_c = \frac{-7}{3} = -2,33$$

▪ Titik breakaway pada sumbu riil

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{d}{ds} (s^3 + 7s^2 + 19s + 13) = 0$$

$$s^2 + 14s + 19 = 0$$

$$s_1 = -2,33 + j0,94$$

$$s_2 = -2,33 - j0,94$$

Tidak ada titik breakaway pada sb. riil

1. Sudut berangkat

$\theta_{D1} + \theta_1 + \theta_2 = 180^\circ$ (untuk zero tanda θ negatif)

$$\theta_{D1} + 135^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

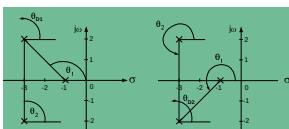
$$\theta_{D1} = -45^\circ$$

$$\theta_{D2} + \theta_1 + \theta_2 = 180^\circ$$

$$\theta_{D2} + 225^\circ + 270^\circ = 180^\circ$$

$$\theta_{D2} = -315^\circ \text{ atau } +45^\circ$$

Jadi sudut berangkat di pole $s = -3+j2$ dan $s = -3-j2$ besarnya -45° dan $+45^\circ$



▪ Tabel Routh memberikan titik potong dengan sumbu imajiner $j\omega$ dan nilai dari K di titik potong itu.

Persamaan Karakteristik

$$s^3 + 7s^2 + 19s + 13 + K = 0$$

Tabel Routh

s^3	1	19
s^2	7	$13+K$
s^1	$(120-K)/7$	0
s^0	$13+K$	

Titik potong dengan sumbu $j\omega$ dapat diperoleh dengan membuat semua elemen pada baris s^1 sama dengan nol.

$$(120-K)/7 = 0$$

$$K = 120$$

Tabel Routh

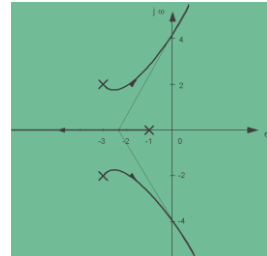
s ³	1	19
s ²	7	133
s ¹	0	0
s ⁰	133	

Persamaan Auxiliary (bantu) diambil diatas baris yang semua elemennya nol.

$$7s^2 + 133 = 0$$

$s = \pm j.4,36 \Rightarrow$ titik potong dengan sumbu imajiner.

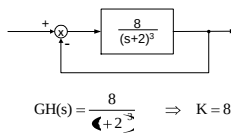
Tempat Kedudukan Akar



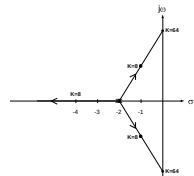
•GAIN MARGIN

Gain margin adalah faktor pengali dimana nilai desain dari faktor gain K yang dapat diberikan sebelum sistem lup tertutup mulai menjadi tidak stabil.

$$\text{Gain Margin} = \frac{K_{\max}}{K}$$



Tempat kedudukan akar



Persamaan Karakteristik
 $S^3 + 6S^2 + 12S + 8 + K = 0$
 Tabel Routh

S ³	1	12	0
S ²	6	8 + K	0
S ¹	(64 - K) / 6	0	0
S ⁰	8 + K	0	0

Titik potong dengan sumbu imajiner merupakan nilai K yang maksimum.
 $(64 - K_{\max}) / 6 = 0$
 $64 - K_{\max} = 0 \Rightarrow K_{\max} = 64$
 Gain Margin = $64/8 = 8$

PHASE MARGIN

Phase margin merupakan ukuran kestabilan relatif dan didefinisikan sebagai 180 ditambah sudut fasa ϕ_1 dari fungsi alih lup terbuka pada gain sebesar $\phi_{PM} = [180^\circ + \arg GH(j\omega_1)]$

dimana $|GH(j\omega_1)| = 1$ dan ω_1 disebut gain crossover frequency.

Contoh :

Tentukan phase margin dari sistem dengan fungsi alih lup terbuka sbb :

$$|GH(j\omega_1)| = |8/(j\omega_1+2)^3| = 1$$

untuk $\omega_1 = 0$

Sudut fasa $GH(j0) = 0^\circ$

$$\phi_{PM} = [180^\circ + \arg GH(j\omega_1)]$$

$$\phi_{PM} = 180^\circ + 0^\circ$$

$$\phi_{PM} = 180^\circ$$

Contoh :

Carilah Margin Fasa (ϕ_{PM}) dari sistem berikut ini :

$$\left| GH(j\omega_1) \right| = \left| \frac{24}{j\omega_1(j\omega_1 + 4)} \right| = 1$$

terjadi pada $\omega_1 = 1.35$

argumen $GH(j\omega_1) = -129,6^\circ$

$$\phi_{PM} = 180^\circ + (-129,6^\circ) = 50,4^\circ$$

Besar (Magnitude) GH ($j\omega$)

■ DAMPING RATIO

- Faktor gain K yang diperlukan untuk memberikan damping ratio sebesar ξ atau sebaliknya dapat ditentukan dari TKA.
- ini dilakukan dengan cara menarik garis dari titik asal yang membentuk sudut plus atau minus θ dengan sumbu riil negatif dimana $\theta = \cos^{-1} \xi$.
- Faktor gain pada titik potong garis tersebut di atas dengan TKA merupakan nilai K yang diperlukan.

Bentuk Standar Sistem Orde 2

$$F(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

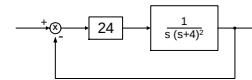
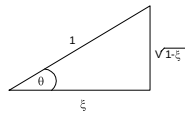
$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$|s_1| = |s_2| = \omega_n$$

$$\arg s_{1,2} = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right)$$

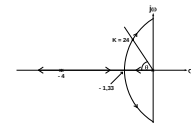
$$\cos \theta = \frac{\xi\omega_n}{\omega_n} = \xi$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

**Contoh :**

Tentukanlah damping ratio dari sistem dibawah ini untuk faktor gain K = 24.

TKA sistem diatas
 $\xi = \cos \theta = 0,5$

**DESAIN DENGAN TKA**

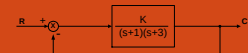
Metoda TKA dapat digunakan untuk sistem pengaturan berumpan balik karena TKA menggambarkan secara grafis variasi dari pole lup tertutup sebagai fungsi dari faktor gain K. Desain dilakukan dengan memilih nilai K yang akan menghasilkan kelakuan sistem seperti yang diinginkan. Cara seperti ini dinamakan *gain factor compensation*.

Contoh :

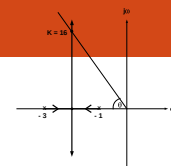
Desain faktor gain K yang memenuhi syarat dibawah ini.

- 1. $\xi > 0,45$
- 2. $K_p > 4$
- 3. 5% settling time < 2 detik.

- 1. $\xi > 0,45$
- 2. $K_p > 4$
- 3. 5% settling time < 2 detik.



$\xi > 0,45$ berarti sudut θ harus lebih kecil dari $\cos^{-1} 0,45 = 70,28^\circ$



syarat 1 akan dipenuhi jika $K < 16$

$$K_p = \lim_{t \rightarrow \infty} G(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K}{(s+1)(s+3)} = \frac{K}{3}$$

$$K = 3K_p \quad \Rightarrow \quad \text{syarat } K_p \geq 4$$

$$K \geq 12$$

Syarat 2 akan terpenuhi untuk $K \geq 12$.

Nilai dari K agar syarat 1 dan 2 terpenuhi :

$$12 \leq K < 16$$

Jika diambil $K = 13$, maka akan diperoleh : $\xi = 13$ dan $\omega_n = 4$

$$t_s = \frac{3}{\xi \omega_n} = \frac{3}{0,5 \cdot 4} = 1,5 \text{ det} < 2 \text{ det} \quad \text{syarat 3 terpenuhi}$$