V

ANALISIS KESTABILAN SISTEM

Deskripsi : Bab ini memberikan gambaran tentang analisis kestabilan sistem kendali dengan menggunakan berbagai metoda seperti persamaan karakteristik, kriteria Routh, kriteria Hurtwitz dan kriteria Continued Fraction

Objektif : Memahami bab ini akan mempermudah pembaca untuk memahami prinsip-prinsip analisis kestabilan sistem kendali.

5.1 Pendahuluan

Sebuah sistem dikatakan tidak stabil jika tanggapannya terhadap suatu masukan menghasilkan osilasi yang keras atau bergetar pada suatu amplitudo/harga tertentu. Sebaliknya suatu sistem disebut stabil jika sistem tersebut akan tetap dalam keadaan diam atau berhenti kecuali jika dirangsang (dieksitasi oleh suatu fungsi masukan dan akan kembali dalam keadaan diam jika eksitasi tersebut dihilangkan). Ketidakstabilan merupakan suatu keadaan yang tidak menguntungkan bagi suatu sistem lingkar tertutup sedangkan pada suatu sistem lingkar terbuka tidak dapat tidak harus stabil. Jelas untuk memperoleh nilai yang memberikan manfaat praktis sebuah sistem kendali harus stabil. Masukan sistem tidak memberikan pengaruh terhadap kestabilan suatu sistem sehingga jika sistem tersebut stabil terhadap suatu masukan maka sistem akan stabil untuk masukan yang ada. Sebaliknya kestabilan hanya bergantung pada karakteristik daripada sistem itu sendiri .

Tanggapan suatu sistem stabil dapat dikenali dari adanya peralihan yang menurun menuju nol terhadap pertambahan waktu. Ini berarti bahwa untuk mendapatkan sebuah sistem yang stabil, koefesien-koefesien dari suku eksponensial yang terdapat dalam tanggapan peralihan tersebut harus merupakan bilangan-bilangan nyata yang negatif atau bilangan kompleks dimana bagian nyata adalah negatif.

Contoh 5.1 :

Sistem orde satu mempuyai persamaan differensial sebagai berikut

$$\frac{dx}{dt} - x = 0 \tag{5.1}$$

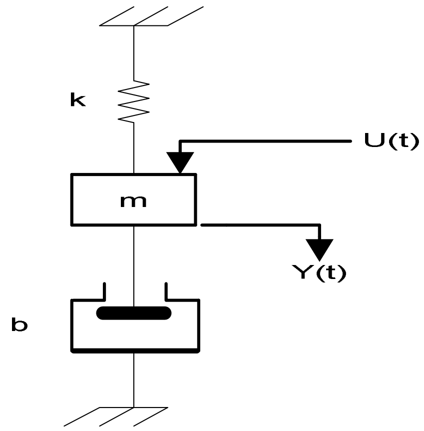
Jawab :

Didapatkan

$$x(t) = Ae^{t} \tag{5.2}$$

Persamaan $x(t)$ adalah solusi dari persamaan differensial yang bersifat tidak stabil karena eksponen dari t adalah positif. Akibatnya tanggapan akan bertambah besar terhadap pertambahan waktu. Dalam praktek, secara aktual tanggapan ini tidak akan terus menjadi tidak terhingga tetapi akan mencapai suatu harga batas yang besarnya ditentukan oleh sifat sistem tersebut.

Contoh 5.2 :



Gambar 5.1 Sistem Mekanik

Persaman dinamik sistem mekanik

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+ky(t)=u(t) \tag{5.3}$$

Dimana $m = 1$ kg, $b = 0.75$ N-sec/m dan $k = 1.25$ N/m dan asumsi pada saat $t = 0$ nilai $y(0) = 0$ dan $\frac{dy(0)}{dt} = \dot{y}(0) = 0$. Tentukan tanggapan sistem terhadap masukan undak satuan.

Jawab :

Dengan menggunakan transformasi Laplace didapatkan

$$m\left[s^2Y(s)-sy(0)-\dot{y}(0)\right]+b\left[sY(s)-y(0)\right]+KY(s)=U(s) \tag{5.4}$$

dengan memasukkan nilai-nilai yang diketahui diperoleh

$$(1)\left[s^2Y(s)-s(0)-0\right]+(0.75)\left[sY(s)-0\right]+(1.25)Y(s)=U(s) \tag{5.5}$$

$$Y(s)\left(s^2+0.75s+1.25\right)=U(s) \tag{5.6}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{s^2+0.75s+1.25} \tag{5.7}$$

Persamaan keluaran sistem mekanik tersebut menjadi jika diberi masukan undak satuan adalah

$$Y(s)=\frac{1}{s^2+0.75s+1.25}U(s) \tag{5.8}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2 + 0.75s + 1.25)} \frac{1}{s} \qquad (5.9)$$

Dengan menggunakan metoda pecahan bagian kecil diperoleh

$$Y(s) = \frac{0.8}{s} + \frac{-0.4000 + j0.1424}{(s + 0.375 - j1.0533)} + \frac{-0.4000 - j0.1424}{(s + 0.375 + j1.0533)} \qquad (5.10)$$

dengan menggunakan transformasi Laplace balik didapatkan

$$y(t) = \frac{4}{5} - \frac{4}{5} e^{-\frac{3}{8}t} \cos \frac{\sqrt{71}t}{8} - \frac{12}{355}\sqrt{71} e^{-\frac{3}{8}t} \sin \frac{\sqrt{71}t}{8} \quad \text{untuk} \quad t \geq 0 \qquad (5.11)$$

Persamaan $y(t)$ ini menyatakan suatu tanggapan yang berosilasi dengan amplitudo yang berkurang terhadap waktu secara eksponensial. Berdasarkan pengertian kestabilan maka sistem mekanik ini bersifat stabil.

Listing program Matlab

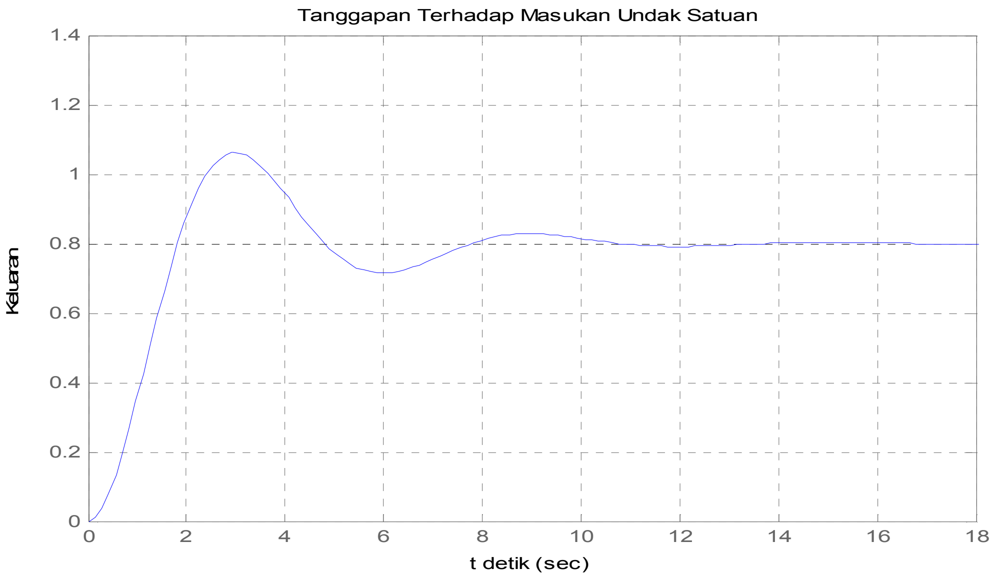
```
clc
clear all
close all
% Contoh Soal 5.2
num = [ 0  0     1];
den = [ 1  0.75  1.25];
%
num1 = [ 0  0   0   1];
den1 = [ 1  0.75  1.25  0];
%
[z,p,k] = residue(num1,den1)
step(num,den)
grid on
title('Tanggapan Terhadap Masukan Undak Satuan ')
ylabel('Keluaran')
xlabel('t detik')
%
syms s t ;
Fs= 1/(s^3 + 0.75*s^2 + 1.25*s); ft=ilaplace(Fs)
```

Hasil program

```
z =
   -0.4000 + 0.1424i
   -0.4000 - 0.1424i
    0.8000

p =

   -0.3750 + 1.0533i
   -0.3750 - 1.0533i
        0
k =
```

```
        []

ft =

4/5-4/5*exp(-3/8*t)*cos(1/8*71^(1/2)*t)-12/355*71^(1/2)*exp(-
3/8*t)*sin(1/8*71^(1/2)*t)
```

Plot grafik



Gambar 5.2 Tanggapan Keluaran Sistem Mekanik Terhadap Masukan Undak Satuan

Untuk menentukan apakah suatu sistem bersifat stabil atau tidak terdapat beberapa cara yang dapat digunakan berbagai metoda diantaranya

1. Persamaan karakteristik
2. Kriteria Routh
3. Kriteria Hurwitz
4. Kriteria Continued Fraction

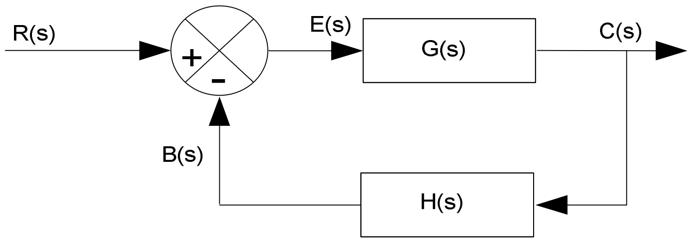
5.2 Persamaan Karakteristik

Fungsi alih sebuah elemen atau sistem disebut juga fungsi karakteristik sistem. Fungsi ini menentukan kelakuan tanggapan peralihan dan dapat memberikan informasi mengenai kestabilan sistem tersebut. Pada Gambar 5.3 diperlihatkan blok diagram umum untuk suatu sistem umpan balik dimana fungsi alihnya adalah

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \tag{5.12}$$

Sehingga

$$C(s)=\frac{G(s)R(s)}{1+G(s)H(s)} \tag{5.13}$$



Gambar 5.3 Diagram Blok Sistem Lingkar Tertutup

Dengan demikian persamaan (5.3) menunjukkan bahwa tanggapan keluaran adalah perkalian antara fungsi sistem terhadap fungsi masukan. Selanjutnya karena fungsi masukan tidak mempengaruhi terhadap bentuk fungsi transien maka tidak ada hubungan apakah sistem tersebut stabil atau tidak. Dengan demikian fungi masukan yaitu pembilang dalam persamaan (5.3) dapat dibuat nol tanpa mempengaruhi bentuk peralihan sehingga

$$G(s)R(s)=C(s)\left[1+G(s)H(s)\right]=0 \tag{5.14}$$

atau

$$1+G(s)H(s)=0 \tag{5.15}$$

Persamaan (5.15) disebut persamaan karakteristik sistem lingkar tertutup, dimana dari persamaan (5.15) ini dapat ditentukan apakah suatu sistem bersifat stabil atau tidak. Fungsi alih lingkar terbuka yang dinyatakan oleh $G(s)H(s)$ dan dituliskan dalam bentuk perbandingan dua buah polinomial yaitu $N(s)$ dan $D(s)$ berikut

$$G(s)H(s)=\frac{N(s)}{D(s)} \tag{5.16}$$

Dengan menggantikan harga ini ke dalam persamaan (5.15) diperoleh

$$1+G(s)H(s)=1+\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{D(s)+N(s)}{D(s)} \tag{5.17}$$

karena menurut persamaan (5.15), $1+G(s)H(s)=0$ maka dari persamaan (5.17) berlaku

$$\frac{D(s)+N(s)}{D(s)}=0 \tag{5.18}$$

atau

$$D(s)+N(s)=0 \tag{5.19}$$

Faktor $D(s)$ dan $N(s)$ dalam persamaan (5.19) dapat dikalikan bersama, maka persamaan karakteristik dapat dituliskan dalam bentuk yang lebih umum untuk orde-n sebagai berikut

$$a_o s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0 \tag{5.20}$$

Akar-akar persamaan ini dapat ditentukan sehingga bentuknya dapat diuraikan sebagai berikut

$$D(s)+N(s)=(s+r_1)(s+r_2)\ldots(s+r_n)=0 \qquad (5.21)$$

Dimana : $-r_1$, $-r_2$, …, $-r_n$ adalah akar-akar polinomial yang dinyatakan oleh persamaan (5.20) atau (5.21) yang disebut juga akar-akar persamaan karakteristik. Selanjutnya dari persamaan (5.21) dapat ditentukan kestabilan sistem dengan cara melihat apakah akar-akar persamaan karakteristik tersebut memenuhi terhadap syarat kestabilan yaitu agar suatu sistem bersifat stabil maka bagian nyata dari akar-akar persamaan karakteristiknya harus bernilai negatif

Contoh 5.3 :

Jika pada Gambar 5.3 fungsi alihnya adalah

$$G(s)=\frac{4}{s(s+5)} \text{ dan } H(s) = 1 \qquad (5.22)$$

Jawab :
Persamaan karakteristik adalah

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{4}{s(s+5)} = \frac{s^2 + 5s + 4}{s^2 + 5s} = 0 \qquad (5.23)$$

berubah menjadi

$$s^2 + 5s + 4 = 0 \qquad (5.24)$$

maka akar-akarnya : $r_1 = -4$ dan $r_1 = -1$ (5.25)

Karena bagian nyata dari kedua akar-akar dari persamaan karakteristik ini semuanya bernilai negatif maka sistem bersifat stabil.

Listing program Matlab

```
clear all
close all
% Contoh Soal 5.3
%
p = [1 5 4]
roots(p)
```

Hasil program

```
K =
     -4
     -1
```

Contoh 5.4 :

Fungsi alih lingkar terbuka sebuah sistem kendali adalah

$$G(s)=\frac{211}{s(0.01s+1)(0.02s+1)} \text{ dan } H(s) = 1 \qquad (5.26)$$

Tentukan apakah sistem tersebut stabil atau tidak

Jawab :

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{211}{s(0{,}01s + 1)(0{,}02s + 1)} = 0 \qquad (5.27)$$

$$s(0{,}01s + 1)(0{,}02s + 1) + 211 = 0 \qquad (5.28)$$

$$0{,}0002s^3 + 0{,}03s^2 + s + 211 = 0 \qquad (5.29)$$

$$s^3 + 150s^2 + 5000s + 1.056.10^6 = 0 \qquad (5.30)$$

Jika diuraikan akan menghasilkan

$$(s+160)(s\text{-}5\text{-}j81)(s\text{-}5\text{+}j81) = 0 \qquad (5.31)$$

sehingga akar-akar persamaan karakteristik adalah

$$r_1 = -160 \qquad (5.32)$$

$$r_2 = 5 + j81{,}0864 \qquad (5.33)$$

$$r_3 = 5 - j81{,}0864 \qquad (5.34)$$

dari akar-akar persamaan karakteristik sistem dapat dilihat bahwa akar r_2 dan akar r_3 mempuyai bagian nyata yang positif yang menyebabkan sistem menjadi tidak stabil.

Listing program Matlab

```
clear all
close all
% Contoh Soal 5.4
%
p = [1 150 5000  1056000];
K = roots(p)
```

Hasil program

```
K =
  1.0e+002 *
  -1.6000
   0.0500 + 0.8109i
   0.0500 - 0.8109i
```

5.3 Kriteria Routh

Penentuan kestabilan suatu sistem berdasarkan persamaan karakteristik akan mengakibatkan kesulitan bagi persamaan yang tingkatannya (orde) yang lebih tinggi yaitu dalam menentukan akar-akar persamaan karakteristik tersebut. Suatu cara lain untuk menentukan kestabilan suatu sistem tanpa menghitung akar-akar persamaan karakteristiknya adalah menggunakan kriteria Routh. Kriteria ini merupakan metode aljabar untuk menentukan kestabilan dalam wawasan s (Laplace). Cara ini akan menunjukkan adanya akar-akar yang tidak stabil beserta jumlahnya tetapi tidak menentukan nilai atau kemungkinan cara untuk mencegah ketidakstabilan.

Prosedur penentuan stabilitas berdasarkan kriteria Routh berikut

a. Tuliskan persamaan karakteristik sistem dalam bentuk polinomial berikut

$$a_o s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0 \tag{5.35}$$

Dimana

$a_o, a_1, \ldots$dst adalah koefesien dari persamaan tersebut.

b. Koefesien – koefesien persamaan tersebut disusun dalam suatu barisan yang menyerupai sebuah matriks dengan bentuk berikut

$$\begin{array}{l} a_o, a_2, a_4, a_6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1, a_3, a_5, a_7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_1, b_3, b_5, b_7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1, c_3, c_5, c_7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_1, d_3, d_5, d_7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad \text{dst} \end{array} \tag{5.36}$$

Dimana cara penyusunannya

- Baris pertama adalah koefesien-koefesien yang terdiri dari indeks genap $(a_o, a_2, a_4, a_6, \ldots\ldots \text{dst})$
- Baris kedua adalah koefesien-koefesien yang terdiri dari indeks ganjil $(a_1, a_3, a_5, a_7, \ldots\ldots \text{dst})$ yang dimulai dari angka satu
- Baris ketiga dinyatakan oleh $b_1, b_3, b_5, b_7, \ldots\ldots \text{dst}$, dimana harga $b_1, b_3, b_5, b_7, \ldots\ldots \text{dst}$ ditentukan dari harga-harga dari baris pertama dan kedua
- Baris ketiga dinyatakan oleh $c_1, c_3, c_5, c_7, \ldots\ldots \text{dst}$, dimana harga $c_1, c_3, c_5, c_7, \ldots\ldots \text{dst}$ ditentukan dari harga-harga dari baris kedua dan ketiga
- Baris keempat dinyatakan oleh $d_1, d_3, d_5, d_7, \ldots\ldots \text{dst}$, dimana harga $d_1, d_3, d_5, d_7, \ldots\ldots \text{dst}$ ditentukan dari harga-harga dari baris ketiga dan keempat
- Demikian seterusnya

Jumlah baris ini bergantung pada orde persamaan karakteristik tersebut. Susunan barisan ini disebut barisan Routh. Untuk menentukan harga-harga $b_1, b_3, b_5, b_7, \ldots\ldots$; $c_1, c_3, c_5, c_7, \ldots\ldots \text{dst}$. Susunan barisan ini dianggap suatu determinan sehingga harga-harga tersebut dapat ditentukan berikut

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \tag{5.37}$$

$$b_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \tag{5.38}$$

$$b_5 = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} \tag{5.39}$$

dan seterusnya

Selanjutnya harga-harga $c_1, c_3, c_5, c_7, \ldots\ldots$ dst ditentukan berikut

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_3 \text{-} a_1 b_3}{b_1} \tag{5.40}$$

$$c_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_5 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_5 \text{-} a_1 b_5}{b_1} \tag{5.41}$$

$$c_5 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_7 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_7 \text{-}\ a_1 b_7}{b_1} \tag{5.42}$$

dan seterusnya

Selanjutnya harga $d_1, d_3, d_5, \ldots;$ ditentukan dengan cara yang sama. Dengan demikian pada pada akhirnya akan diperoleh suatu susunan barisan yang lengkap berbentuk segitiga dimana jumlah baris adalah sebanyak pangkat tertinggi dari s ditambah satu. Berarti untuk persamaan orde-dua jumlah baris adalah 3 (tiga), untuk persamaan orde-tiga menjadi 4 (empat) dan seterusnya. Setelah itu periksa kolom pertama dari persamaan (5.36) apakah terjadi perubahan tanda. Jika tidak terjadi perubahan tanda pada kolom pertama berarti sistem bersifat stabil dan begitu pula sebaliknya jika terjadi perubahan tanda pada kolom pertama berarti sistem tidak stabil

Contoh Soal 5.5 :

Persamaan karakteristik

$$s^3 + 6s^2 + 12s + 8 = 0 \tag{5.43}$$

Periksa kestabilan sistem dengan menggunakan kriteria Routh

Jawab :

Disusun dalam barisan Routh menjadi

$$\begin{array}{ccc} 1 & 12 & 0 \\ 6 & 8 & 0 \\ \frac{64}{8} & 0 & \\ 8 & & \end{array} \tag{5.44}$$

karena pada kolom pertama tidak terdapat perubahan tanda maka semua akar-akar persamaan karakteristik mempuyai bagian nyata yang negatif dan sistem bersifat stabil.

Listing program Matlab
```
clc
clear all
close all
% Contoh Soal 5.5
%
p = [1 6 12 8]
routh(p)
```

Hasil program
```
p =
     1     6    12     8

Routh Array
  1.0000e+000  1.2000e+001
  6.0000e+000  8.0000e+000
  1.0667e+001            0
  8.0000e+000            0
System is stable
```

Contoh 5.6 :

Persamaan karakteristik

$$s^3 + 4s^2 + 8s - 12 = 0 \tag{5.45}$$

Periksa kestabilan sistem dengan menggunakan kriteria Routh

Jawab :
Disusun dalam barisan Routh menjadi

$$\begin{array}{ccc} 1 & 8 & 0 \\ 4 & -12 & 0 \\ 4 & 0 & \\ -12 & & \end{array} \tag{5.46}$$

karena pada kolom pertama terdapat perubahan tanda sebanyak 1 kali maka pada persamaan karakteristik terdapat satu buah akar yang mempuyai bagian nyata yang positif dan sistem bersifat tidak stabil

Listing program Matlab
```
clc
clear all
close all
% Contoh Soal 5.6
p = [1 4 8 -12]
routh(p)
```

Hasil program

```
p =
     1     4     8   -12
Routh Array
     1     8
     4   -12
    11     0
   -12     0
There are 1 roots in the right half s-plane
```

Contoh 5.7 :

Persamaan karakteristik

$$s^3 - 4s^2 + 8s - 12 = 0 \tag{5.47}$$

Periksa kestabilan sistem dengan menggunakan kriteria Routh

Jawab :
Disusun dalam barisan Routh menjadi

$$\begin{array}{ccc} 1 & 8 & 0 \\ -4 & -12 & 0 \\ 4 & 0 & \\ -12 & & \end{array} \tag{5.48}$$

karena pada kolom pertama terdapat perubahan tanda sebanyak 3 kali maka pada persamaan karakteristik terdapat 3 buah akar yang mempuyai bagian nyata yang positif dan sistem bersifat tidak stabil

Listing program Matlab

```
clc
clear all
close all
% Contoh Soal 5.7
p = [1 -4 8 -12]
routh(p)
```

Hasil program

```
p =

     1    -4     8   -12

Routh Array

     1     8
    -4   -12
     5     0
   -12     0
```

```
There are 3 roots in the right half s-plane
```

Contoh 5.8 :

Persamaan karakteristik

$$s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + K = 0 \tag{5.49}$$

Periksa kestabilan sistem dengan menggunakan kriteria Routh

Jawab :

Disusun dalam barisan Routh menjadi

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1+K & 0 \\ \frac{8-K}{3} & 0 & \\ 1+K & & \end{array} \tag{5.50}$$

Agar sistem bersifat stabil maka kolom pertama tidak boleh terjadi perubahan tanda oleh karena harus dipenuhi $8-K>0$ dan $1+K>0$. Jika suku kolom pertama pada suatu baris sama dengan nol tetapi suku-suku berikutnya tidak sama dengan nol atau memang tidak ada suku berikutnya maka suku tersebut diganti dengan suatu bilangan positif yang sangat kecil ε yang selanjutnya digunakan untuk menghitung suku-suku berikutnya.

Contoh 5.9 :

Persamaan karakteristik

$$s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0 \tag{5.51}$$

Periksa kestabilan sistem dengan menggunakan kriteria Routh

Jawab :

Disusun dalam barisan Routh menjadi

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 \sim \varepsilon & 0 & \\ 2 & & \end{array} \tag{5.52}$$

Jika tanda koefesien di tas nol (ε) sama dengan tanda koefesien di bawah nol berarti ada sepasang akar imaginer.

Jika semua koefesien pada suatu baris turunan sama dengan nol maka berarti ada akar-akar yang besarnya sama terletak berlawanan arah secara radial pada bidang s yaitu dua akar nyata dengan besar sama dan tanda berlawanan atau dua akar imaginer konjugasi. Pada kasus semacam ini, perhitungan koefesien-koefesien berikutnya pada susunan tersebut dapat dilanjutkan dengan membentuk suatu polinomial pembantu dengan koefesien dari baris terakhir dan kemudian menggunakan koefesien dari turunan polinomial ini untuk membentuk koefesien-koefesien baris berikutnnya. Akar-akar dengan besar sama dan terletak berlawanan secara radial pada bidang s tersebut dapat diperoleh dengan menyelesaikan polinomial pembantu yang selalu genap. Untuk polinomial pembantu derajat $2n$ serta ada n pasang akar yang besarnya sama dan berlawanan secara radial.

Contoh 5.10 :

Persamaan karakteristik

$$s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0 \tag{5.53}$$

Jawab :
Disusun dalam barisan Routh menjadi

$$\begin{array}{ccc} 1 & 24 & -25 \\ 2 & 48 & -50 \\ 0 & 0 & \end{array} \tag{5.54}$$

Semua suku pada baris s^3 sama dengan nol. Selanjutnya polinomial pembantu dibentuk dari koefesien baris s^4 dan diperoleh

$$P(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50 \tag{5.55}$$

yang menunjukkan bahwa ada dua pasang akar yang besarnya sama dan berlawanan tanda. Pasangan ini diperoleh dengan menyelesaikan persamaan polinomial pembantu $P(s) = 0$. Turunan $P(s)$ terhadap s adalah

$$\frac{dP(s)}{ds} = 8s^3 + 96s \tag{5.56}$$

Suku-suku pada baris s^3 diganti dengan koefesien-koefesien persamaan yang terakhir ini yaitu 8 dan 96. Selanjutnya susunan koefesien-koefesien menjadi :

$$\begin{array}{cccc} s^5 & 1 & 24 & -25 \\ s^4 & 2 & 48 & -50 \\ s^3 & 8 & 96 & \\ s^2 & 24 & -50 & \\ s^1 & 112.70 & 0 & \\ s^0 & -50 & & \end{array} \tag{5.57}$$

Terlihat bahwa ada satu perubahan tanda pada kolom pertama susunan koefesien-koefesien tersebut. Jadi persamaan asal mempuyai satu akar dengan bagian nyata positif. Dengan menyelesaikan akar-akar persamaan polinomial

$$2s^4 + 48s^2 - 50 = 0 \tag{5.58}$$

diperoleh

$$s^2 = 1 \rightarrow s = \pm 1 \quad (5.59)$$

$$s^2 = -25 \rightarrow s = \pm j5 \quad (5.60)$$

Dua pasang akar diatas aadalah sebahagian akar-akar dari persamaan asal. Sebenarnya persamaan asal dapat ditulis

$$(s+1)(s-1)(s+j5)(s-j5)(s+2) \quad (5.61)$$

Jelas terlihat bahwa persamaan asal mempuyai satu akar dengan bagian nyata positif

5.4 Kriteria Hurwitz

Cara lain menetukan stabilitas sebuah sistem adalah metoda Hurwitz. Dengan metoda Hurtwitz ini dilakukan pemeriksaan apakah semua akar-akar persamaan karakteristik memiliki bagian nyata yang negatif. Hal ini ditentukan dengan cara menggunakan determinan. Persamaan karakteristik dibuat dalam bentuk determinan berikut

$$\Delta_1 = a_{n-1} \quad (5.62)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} = a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3} \quad (5.63)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \quad (5.64)$$

Dan seterusnya sampai Δ_{n-1} maka semua akar-akar persamaan karakteristik mempuyai bagian nyata yang negatif hanya dan hanya jika $\Delta_i > 0$ untuk $i=1,2,3,\ldots,n$. Sebagai ilustrasi bila $n = 3$ diperoleh

$$\Delta_1 = a_{n-1} = a_2 \quad (5.65)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_2 a_1 - a_3 a_0 \quad (5.66)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_2 a_1 a_0 - a_0^2 a_3 \quad (5.67)$$

Agar semua akar-akar memiliki bagian nyata yang negatif, harus dipenuhi

$$\Delta_1 > 0 \rightarrow a_2 > 0 \quad (5.68)$$

$$\Delta_2 > 0 \rightarrow a_2 a_1 - a_3 a_0 > 0 \quad (5.69)$$

$$\Delta_3 > 0 \rightarrow a_2 a_1 a_0 - a_0^2 a_3 > 0 \quad (5.70)$$

Contoh 5.11:

Suatu persamaan karakteristik

$$s^3 + 8s^2 + 14s + 24 = 0 \tag{5.71}$$

Periksa kestabilan sistem dengan menggunakan kriteria Hurwitz

Jawab :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 24 & 0 \\ 1 & 14 & 0 \\ 0 & 8 & 24 \end{vmatrix} = 2112 \tag{5.72}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 24 \\ 1 & 14 \end{vmatrix} = 88 \tag{5.73}$$

$$\Delta_1 = a_{n-1} = a_2 = 8 \tag{5.74}$$

Menurut kriteria Hurwitz sistem bersifat stabil karena setiap determinan Δ_3, Δ_2 dan Δ_1 bernilai positif

Listing program Matlab

```
clc
clear all
close all
% Contoh Soal 5-11
hurwitz3(1,8,14,24)
```

Hasil program

```
delta_3 =
        2112
delta_2 =
        88
delta_1 =
        8
Sistem stabil
```

Contoh 5.12 :

Suatu persamaan karakteristik

$$4s^3 + 8s^2 + 14s - 24 = 0 \tag{5.75}$$

Periksa kestabilan sistem dengan menggunakan kriteria Hurwitz

Jawab :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -24 & 0 \\ 4 & 14 & 0 \\ 0 & 8 & -24 \end{vmatrix} = -4992 \qquad (5.76)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -24 \\ 4 & 14 \end{vmatrix} = 208 \qquad (5.77)$$

$$\Delta_1 = a_{n-1} = a_2 = 8 \qquad (5.78)$$

maka menurut kriteria Hurwitz sistem bersifat tidak stabil karena determinan Δ_3 bernilai negatif

Listing program Matlab

```
clc
clear all
close all
% Soal Contoh-5-12
hurwitz3(4,8,14,-24)
```

Hasil program

```
delta_3 =
       -4992
delta_2 =
       208
delta_1 =
       8
Sistem tidak stabil
```

Contoh 5.13 :

Suatu persamaan karakteristik

$$s^2 + Ks + 2K\text{-}1 = 0 \qquad (5.79)$$

Dengan menggunakan kriteria Hurwitz tentukan nilai K agar sistem berisfat stabil.

Jawab :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K & 0 \\ 1 & 2K\text{-}1 \end{vmatrix} = K(2K\text{-}1) \qquad (5.80)$$

$$\Delta_1 = a_{n-1} = a_1 = K \qquad (5.81)$$

Agar sistem bersifat stabil maka determinan Δ_2 dan Δ_1 harus bernilai positif. Untuk mendapatkan determinan yang bernilai positif maka $K > 0$ dan $(2K\text{-}1) > 0$.

5.5 Kriteria Continued Fraction

Persamaan karakteristik

$$Q(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 \tag{5.82}$$

Persamaan (5.82) kemudian dibagi menjadi bagian genap dan ganjil dengan bentuk berikut

$$Q_1(s) = a_n s^n + a_{n-2}s^{n-2} + \ldots \tag{5.83}$$

$$Q_2(s) = a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-3}s^{n-3} + \ldots \tag{5.84}$$

Kemudian persamaan (5.83) dan (5.84) menjadi

$$\frac{Q_1(s)}{Q_2(s)} = \frac{a_n s}{a_{n-1}} + \frac{\left(a_{n-2} - \frac{a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}\right)s^{n-2} + \left(a_{n-4} - \frac{a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}\right)s^{n-4} + \ldots}{Q_2} \tag{5.85}$$

$$\frac{Q_1(s)}{Q_2(s)} = h_1 s + \cfrac{1}{h_2 s + \cfrac{1}{h_3 s + \cfrac{1}{h_4 s + \cfrac{1}{\ddots\, h_n s}}}} \tag{5.86}$$

Sistem akan bersifat stabil jika koefesien $h_1,\ h_2, \ldots,\ h_n$ bernilai positif. Hal ini akan mengakibatkan akar-akar persamaan karakteristik $Q(s) = 0$ akan mempuyai bagian nyata yang negatif.

Contoh 5.14 :

Suatu persamaan karakteristik

$$s^3 + 6s^2 + 12s + 8 = 0 \tag{5.87}$$

Periksa apakah sistem bersifat stabil atau tidak dengan menggunakan kriteria Continued Fraction.

Jawab :

$$Q(s) = s^3 + 6s^2 + 12s + 8 \tag{5.88}$$

Persamaan karakteristik diatas dibagi menjadi

$$Q_1(s) = s^3 + 12s \tag{5.89}$$

$$Q_2(s) = 6s^2 + 8 \tag{5.90}$$

diperoleh

$$\frac{Q_1(s)}{Q_2(s)}=\frac{s^3+12s}{6s^2+8}=\frac{1}{6}s+\frac{\frac{32}{3}s}{6s^2+8}=\frac{1}{6}s+\cfrac{1}{\frac{9}{16}s+\cfrac{1}{\frac{4}{3}s}} \tag{5.91}$$

didapatkan

$$h_1=\frac{1}{6},\ h_2=\frac{9}{16},\ h_3=\frac{4}{3} \tag{5.92}$$

Sistem bersifat stabil karena koefesien h_1, h_2 dan h_3 bernilai positif

Listing program Matlab

```
clc
clear all
close all
% Contoh Soal 5-14
fraction3(1,6,12,8)
```

Hasil program

```
h1 =
    0.1667
h2 =
    0.5625
h3 =
    1.3333
Sistem stabil
```

Contoh 5.15 :

Suatu persamaan karakteristik

$$s^4+4s^3+8s^2+16s+32=0 \tag{5.93}$$

Periksa apakah sistem bersifat stabil atau tidak dengan menggunakan kriteria Continued Fraction.

Jawab :

$$Q(s)=s^4+4s^3+8s^2+16s+32=0 \tag{5.94}$$

Persamaan karakteristik diatas dibagi menjadi

$$Q_1(s)=s^4+8s^2+32 \tag{5.95}$$

$$Q_2(s)=4s^3+16s \tag{5.96}$$

diperoleh

$$\frac{Q_1(s)}{Q_2(s)} = \frac{s^4 + 8s^2 + 32}{4s^3 + 16s} = \frac{1}{4}s + \frac{4s^2 + 32}{4s^3 + 16s} = \frac{1}{4}s + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{-\frac{1}{4}s + \cfrac{1}{-\frac{1}{2}s}}} \tag{5.97}$$

didapatkan

$$h_1 = \frac{1}{4},\ h_2 = 1,\ h_3 = -\frac{1}{4}\ \text{dan}\quad h_4 = -\frac{1}{2} \tag{5.98}$$

Sistem tidak bersifat stabil karena koefesien h_3 dan h_4 bernilai negatif.

Listing program Matlab

```
clc
clear all
close all
% Contoh Soal 5-15
fraction4(1,4,8,16,32)
```

Hasil program

```
h1 =
    0.2500
h2 =
     1
h3 =
   -0.2500
h4 =
   -0.5000
Sistem tidak stabil
```

5.6 Rangkuman

Untuk suatu sistem linier yang tidak berubah dengan waktu masukan terbatas dan keluaran terbatas definisi kestabilan telah didefinisikan. Untuk menentukan kestabilan ini ada beberapa cara yang digunakan antara lain persamaan karakteristik, kriteria Routh, kriteria Hurwitz dan kriteria Continued Fraction. Dengan persamaan karakteristik dapat ditentukan kestabilan sistem dengan cara melihat apakah bagian nyata dari akar-akar persamaan karakteristik bernilai negatif, kalau bagian nyata dari akar-akar persamaan karakteristik bernilai negatif maka sistem bersifat stabil begitu pula sebaliknya. Kriteria Routh merupakan metoda aljabar untuk menentukan kestabilan dalam wawasan S. Cara ini akan menunjukkan adanya akar-akar yang tidak stabil beserta jumlahnya tetapi tidak menentukan nilai atau kemungkinan cara untuk mencegah ketidakstabilan. Kriteria Hurtwitz merupakan metoda untuk menentukan kestabilan suatu sistem dengan cara memeriksa apakah semua akar-akar persamaan karakteristik memiliki bagian nyata yang negatif dengan menggunakan determinan. Kriteria Continued Fraction juga merupakan metoda untuk menentukan kestabilan suatu sistem dengan cara membagi persamaan karakteristik menjadi bagian genap dan bagian ganjil sehingga nantinya didapatkan beberapa konstanta. Jika semua konstanta bernilai positif maka sistem bersifat stabil tetapi sebaliknya jika ada salah satu konstanta yang bernilai negatif maka sistem tidak bersifat stabil.