II

LATAR BELAKANG MATEMATIS

Deskripsi : Bab ini memberikan gambaran tentang latar belakang matematis yang digunakan pada sistem kendali seperti persamaan linear diferensial orde 1 (satu), orde 2 (dua), orde tinggi, transformasi Laplace serta tranformasi Laplace balik beserta sifat-sifatnya serta penyelesaian persamaan linear diferensial dengan menggunakan transformasi Laplace
Objektif : Memahami bab ini akan mempermudah pembaca untuk memahami prinsip dasar sistem kendali.

2.1 Persamaan Linear Diferensial

Suatu persamaan yang mengandung satu atau beberapa turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui disebut persamaan diferensial. Khususnya, suatu persamaan berbentuk

$$F\left(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{2.1}$$

Dimana $y^{(k)}$ menyatakan turunan y terhadap t yang ke-k. Persamaan (2.1) disebut persamaan differensial biasa tingkat n. Contoh-contoh persamaan differensial tingkat 1, 2 dan 3 adalah

$$\frac{dy}{dt} + 2\sin t = 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3t\frac{dy}{dt} - 2y = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - e^t = 0 \tag{2.4}$$

Pada bagian ini akan ditinjau persamaan linear differensial yaitu persamaan yang berbentuk

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = k(t) \tag{2.5}$$

2.1.1 Persamaan Linear Diferensial Orde Tingkat 1 (Satu)

Bentuk umum persamaan linear diferensial orde satu adalah

$$\frac{dy}{dt} + P(t)y = Q(t) \tag{2.6}$$

Pertama-tama mengalikan kedua ruas persamaan dengan faktor integral

$$e^{\int P(t)dt} \tag{2.7}$$

Diperoleh

$$e^{\int P(t)dt}\frac{dy}{dt} + e^{\int P(t)dt}P(t)\,y = e^{\int P(t)dt}Q(t) \tag{2.8}$$

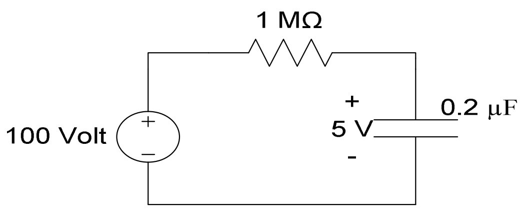
Kemudian dikenali ruas kiri sebagai turunan dari $ye^{\int P(t)dt}$ sehingga persamaan mengambil bentuk

$$\frac{d}{dt}\left(ye^{\int P(t)dt}\right) = e^{\int P(t)dt}Q(t) \tag{2.9}$$

Sehingga

$$y = e^{-\int P(t)dt}\int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt \tag{2.10}$$

Contoh 2.1 : Sebuah rangkaian RC



Gambar 2.1 Rangkaian RC

Dengan

$R = 1\ \text{M}\Omega$
$C = 0.2\ \mu f$
$E = 100\ \text{volt}$
$V(0) = 5\ \text{volt}$

Jawab :
Persamaan linear differensial untuk rangkaian RC

$$Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt = E \tag{2.11}$$

$$RC\frac{dV}{dt} + V = E \tag{2.12}$$

Dengan memasukkan nilai-nilai yang diketahui diperoleh

$$0.2\frac{dV}{dt} + V = 100 \tag{2.13}$$

$$\frac{dV}{dt} + 5V = 500 \tag{2.14}$$

diperoleh

$$a = 5 \quad \text{dan} \quad f(t) = 500 \tag{2.15}$$

Solusi persamaan adalah

$$V(t) = 5e^{-5t} + e^{-5t}\int_0^t e^{5\tau} 500\, d\tau \tag{2.16}$$

dengan asumsi

$$\int_0^t e^{5\tau} 500\, d\tau = 100\int_0^t e^{u}\, du = 100e^{u}\Big|_0^t = 100e^{5t} - 100 \tag{2.17}$$

diperoleh hasil berikut

$$V(t) = 5e^{-5t} + e^{-5t}\left[100e^{5t} - 100\right] = 5e^{-5t} + 100 - 100e^{-5t} \tag{2.18}$$

$$V(t) = 100 - 95e^{-5t} \tag{2.19}$$

Listing program Matlab

```
clc
clear all
close all
% Contoh Soal 2.1
V = dsolve('Dv = -5*v + 500','v(0)=5')
```

Hasil program

```
V =
100-95*exp(-5*t)
```

2.1.2 Persamaan Homogen Tingkat 2 (Dua)

Bentuk umum persamaan linear diferensial orde dua adalah

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_2 y = k \tag{2.20}$$

Dengan asumsi

- a_1 dan a_2 adalah konstanta
- k secara identik bernilai nol (kasus homogen)

Persamaan (2.20) dalam bentuk operator D sebagai berikut

$$\left(D^2 + a_1 D + a_2\right) y = 0 \tag{2.21}$$

Persamaan bantu dari persamaan (2.21) adalah

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0 \tag{2.22}$$

Terdapat tiga kasus yang ditinjau, berpadanan terhadap apakah persamaan bantu mempuyai dua akar riil berlainan, akar tunggal berulang atau akar-akar kompleks saling konjugat.

Kasus 1 : Jika r_1 dan r_2 berlainan maka penyelesaian umum $y'' + a_1y' + a_2y = 0$ adalah

$$y = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t} \tag{2.23}$$

Contoh 2.2 : Tentukan penyelesaian umum dari $y'' + 7y' + 12y = 0$ (2.24)

Jawab :

Persamaan bantu : $r^2 + 7r + 12 = (r+3)(r+4) = 0$ (2.25)

Akar-akar persamaan Bantu : $r_1 = -3$ dan $r_2 = -4$ (2.26)

Penyelesaian umum persamaan differensial

$$y = C_1e^{-3t} + C_2e^{-4t} \tag{2.27}$$

Listing program Matlab

```
clc
clear all
close all
% Contoh Soal 2.2
y = dsolve('D2y = -7*Dy - 12*y')
```

Hasil program

```
y =

C1*exp(-4*t)+ C2*exp(-3*t)
```

Kasus 2 : Jika persamaan bantu mempuyai akar tunggal berulang r maka penyelesaian umum $y'' + a_1y' + a_2y = 0$ adalah

$$y = C_1e^{r_1t} + C_2te^{r_2t} \tag{2.28}$$

Contoh 2.3 : Tentukan penyelesaian umum dari $y'' - 6y' + 9y = 0$ (2.29)

Jawab :

Persamaan bantu : $r^2 - 6r + 9 = (r-3)(r-3) = 0$ (2.30)

Akar-akar persamaan Bantu : $r_1 = 3$ dan $r_2 = 3$ (2.31)

Penyelesaian umum persamaan differensial

$$y = C_1e^{3t} + C_2te^{3t} \tag{2.32}$$

Listing program Matlab

```
clc
clear all
close all
% Contoh Soal 2.3
y = dsolve('D2y = 6*Dy - 9*y')
```

Hasil program

```
y =
C1*exp(3*t)+C2*exp(3*t)*t
```

Kasus 3 : Jika persamaan bantu mempuyai akar kompleks saling konjugat $\alpha \pm \beta i$ maka penyelesaian umum terhadap $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ adalah

$$y = C_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t \tag{2.33}$$

Contoh 2.4 : Tentukan penyelesaian umum dari $y'' - 4y' + 13y = 0$ (2.34)

Jawab :

Persamaan bantu : $r^2 - 4r + 13 = (r + 2 - 3i)(r + 2 + 3i) = 0$ (2.35)

Akar-akar persamaan Bantu : $r_1 = 2 + 3i$ dan $r_2 = 2 - 3i$ (2.36)

Penyelesaian umum persamaan differensial

$$y = C_1 e^{2t} \cos 3t + C_2 e^{2t} \sin 3t \tag{2.37}$$

Listing program Matlab

```
clc
clear all
close all
% Contoh Soal 2.4
y = dsolve('D2y = 4*Dy - 13*y')
```

Hasil program

```
y =
C1*exp(2*t)*sin(3*t)+C2*exp(2*t)*cos(3*t)
```

Persamaan Lebih Tinggi

Adapun bentuk bentuk umum persamaan linear differensial

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{2.38}$$

Persamaan bantu

$$r^{(n)} + a_1 r^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0 \tag{2.39}$$

Misalnya, jika persamaan bantu adalah

$$(r - r_1)(r - r_2)^3 \left[r - (\alpha + \beta i)\right]\left[r - (\alpha - \beta i)\right] = 0 \tag{2.40}$$

Penyelesaian umum persamaan differensial adalah

$$y = C_1 e^{r_1 t} + \left(C_2 + C_3 t + C_4 t^2\right) e^{r_2 t} + \left[C_5 \cos \beta t + C_6 \sin \beta t\right] e^{\alpha t} \tag{2.41}$$

Contoh 2.5 : Tentukan penyelesaian umum dari $y'''' - y''' - 20y'' = 0$ (2.42)

Jawab :

Persamaan bantu : $r^4 - r^3 - 20r^2 = r^2(r-5)(r+4) = 0$ (2.43)

Akar-akar persamaan Bantu :

$$r_1 = 0,\ r_2 = 0,\ r_3 = 5 \text{ dan } r_4 = -4 \quad (2.44)$$

Penyelesaian umum persamaan differensial

$$y = C_1 + C_2t + C_3e^{-4t} + C_4e^{5t} \quad (2.45)$$

Listing program Matlab

```
clc
clear all
close all
% Contoh Soal 2.5
y = dsolve('D4y = D3y + 20*D2y')
```

Hasil program

```
y =
C1+C2*t+C3*exp(-4*t)+C4*exp(5*t)
```

2.1.3 Persamaan Tak Homogen

Bentuk umum persamaan linear tak homogen umum dengan koefesien konstan adalah

$$y'' + a_1y' + a_2\ y = k(t) \quad (2.46)$$

Penyelesaian persamaan (2.46) ini dapat direduksi atas tiga langkah

1. Tentukan penyelesaian umum

$$y_h = C_1u_1(t) + C_2u_2(t) + C_3u_3(t) + \ldots + C_nu_n(t) \quad (2.47)$$

2. Tentukan penyelesaian khusus y_p
3. Tambahkan penyelesaian langkah 1 dan langkah 2

Metoda Koefesien Tak Tentu

Persamaan : $y'' + a_1y' + a_2y = k(t)$ (2.48)

Ternyata bahwa fungsi $k(t)$ yang paling mungkin muncul dalam penerapan berupa polinom, eksponen, sinus dan kosinus. Untuk fungsi-fungsi ditawarkan suatu prosedur penentuan y_p berdasarkan penyelesaian coba-coba sebagai berikut

Jika $k(t) = b_mt^m + \ldots + b_1t + b_o$ (2.49)

dicoba $y_p = B_mt^m + \ldots + B_1t + B_o$ (2.50)

Jika $k(t) = b_m e^{\alpha t}$

dicoba $y_p = Be^{\alpha x}$ (2.51)

Jika $k(t) = b \cos \beta t + c \sin \beta t$ (2.52)

dicoba $y_p = B \cos \beta t + C \sin \beta t$ (2.53)

Contoh

1. $y'' - 3y' - 4y = 3t^2 + 2$ maka $y_p = B_2 t^2 + B_1 t + B_o$ (2.54)
2. $y'' - 3y' - 4y = e^{2t}$ maka $y_p = Be^{2t}$ (2.55)
3. $y'' + 4y = 2 \sin t$ maka $y_p = B \cos \beta t + C \sin \beta t$ (2.56)
4. $y'' + 2y' = 3t^2 + 2$ maka $y_p = B_2 t^3 + B_1 t^2 + B_o t$ (2.57)
5. $y'' - 3y' - 4y = e^{4t}$ maka $y_p = Bte^{4t}$ (2.58)
6. $y'' + 4y = \sin 2t$ maka $y_p = Bt \cos 2t + Ct \sin 2t$ (2.59)

Contoh 2.6 : Selesaikan

$$y'' + y' - 2y = 2t^2 - 10t + 3 \quad (2.60)$$

Jawab :

Persamaan bantu : $r^2 + r - 2 = 0$ (2.61)

Akar-akar persamaan Bantu : $r_1 = -2$, $r_2 = 1$ (2.62)

Penyelesaian umum persamaan differensial

$$y_h = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t \quad (2.63)$$

Penyelesaian khusus terhadap persamaan tak-homogen dicoba

$$y_p = At^2 + Bt + C \quad (2.64)$$

$$\frac{dy_p}{dt} = y' = 2At + B \quad (2.65)$$

$$\frac{d^2 y_p}{dt^2} = y'' = 2A \quad (2.66)$$

diperoleh

$$2A + 2At + B - 2\left(At^2 + Bt + C\right) = 2t^2 - 10t + 3 \quad (2.67)$$

$$-2A = 2 \rightarrow A = -1 \quad (2.68)$$

$$2A - 2B = -10 \rightarrow B = 4 \quad (2.69)$$

$$2A + B - 2C = 3 \rightarrow C = -\frac{1}{2} \quad (2.70)$$

Sehingga

$$y_p = At^2 + Bt + C = -t^2 + 4t + \frac{1}{2} \quad (2.71)$$

Maka

$$y = y_p + y_h = C_1e^{-2t} + C_2e^{t} + -t^2 + 4t + \frac{1}{2} \tag{2.72}$$

Listing program Matlab

```
clc
clear all
close all
% Contoh Soal 2.6
y = dsolve('D2y = -Dy + 2*y + 2*t^2 -10*t + 3 ')
```

Hasil program

```
y =
exp(-2*t)*C2+exp(t)*C1-1/2+4*t-t^2
```

Contoh 2.7 : Selesaikan

$$y'' - 2y' - 3y = 8e^{3t} \tag{2.73}$$

Jawab :

Persamaan bantu : $r^2 - 2r - 3 = 0$ (2.74)

Akar-akar persamaan Bantu : $r_1 = 3,\ r_2 = -1$ (2.75)

Penyelesaian umum persamaan differensial

$$y_h = C_1e^{3t} + C_2e^{-t} \tag{2.76}$$

Penyelesaian khusus terhadap persamaan tak-homogen dicoba

$$y_p = Bte^{3t} \tag{2.77}$$

$$\frac{dy_p}{dt} = y' = 3Bte^{3t} + Be^{3t} \tag{2.78}$$

$$\frac{d^2y_p}{dt^2} = y'' = 9tBe^{3t} + 6Be^{3t} \tag{2.79}$$

diperoleh

$$\left(9tBe^{3t} + 6Be^{3t}\right) - 2\left(3Bte^{3t} + Be^{3t}\right) - 3Bte^{3t} = 8e^{3t} \tag{2.80}$$

$$4Be^{3t} = 8e^{3t} \rightarrow B = 2 \tag{2.81}$$

Sehingga

$$y_p = Be^{3t} = 2te^{3t} \tag{2.82}$$

Maka

$$y = y_p + y_h = C_1e^{3t} + C_2e^{-t} + 2te^{3t} \tag{2.83}$$

Listing program Matlab

```
clc
clear all
close all
% Contoh Soal 2.7
y = dsolve('D2y = 2*Dy + 3*y + 8*exp(3*t)')
```

Hasil program

```
y =
exp(-t)*C2+exp(3*t)*C1+2*t*exp(3*t)
```

Contoh 2.8 : Selesaikan

$$y'' - 2y' - 3y = \cos 2t \tag{2.84}$$

dengan kondisi awal: $y(0) = 0$ dan $\frac{dy}{dt}(0) = 0$

Jawab :

Persamaan bantu : $r^2 - 2r - 3 = 0$ (2.85)

Akar-akar persamaan bantu

$$r_1 = 3 \text{ dan } r_2 = -1 \tag{2.86}$$

Penyelesaian umum persamaan differensial

$$y_h = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} \tag{2.87}$$

Penyelesaian khusus terhadap persamaan tak-homogen dicoba

$$y_p = B \cos 2t + C \sin 2t \tag{2.88}$$

$$\frac{dy_p}{dt} = y' = -2B \sin 2t + 2C \cos 2t \tag{2.89}$$

$$\frac{d^2y_p}{dt^2} = y'' = -4B \cos 2t - 4C \sin 2t \tag{2.90}$$

diperoleh

$$(-4B \cos 2t - 4C \sin 2t) - 2(-2B \sin 2t + 2C \cos 2t) - 3B \cos 2t - 3C \sin 2t = \cos 2t \tag{2.91}$$

$$(-7B - 4C) \cos 2t + (4B - 7C) \sin 2t = \cos 2t \tag{2.92}$$

$$-7B - 4C = 1 \text{ dan } 4B - 7C = 0 \tag{2.93}$$

$$B = -\frac{7}{65} \text{ dan } C = -\frac{4}{65} \tag{2.94}$$

Sehingga

$$y_p = -\frac{7}{65} \cos 2t - \frac{4}{65} \sin 2t \tag{2.95}$$

Maka

$$y = y_p + y_h = -\frac{7}{65}\cos 2t - \frac{4}{65}\sin 2t + C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} \qquad (2.96)$$

Untuk kondisi awal : $y(0) = 0$

$$y = -\frac{7}{65}\cos 2(0) - \frac{4}{65}\sin 2(0) + C_1 e^{-(0)} + C_2 e^{3(0)} = 0 \qquad (2.97)$$

$$C_1 + C_2 = \frac{7}{65} \qquad (2.98)$$

Untuk kondisi awal : $\frac{dy}{dt}(0) = 0$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{14}{65}\sin 2t - \frac{8}{65}\cos 2t - C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{3t} \qquad (2.99)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{14}{65}\sin 2(0) - \frac{8}{65}\cos 2(0) - C_1 e^{-(0)} + 3C_2 e^{3(0)} = 0 \qquad (2.100)$$

$$-C_1 + 3C_2 = \frac{8}{65} \qquad (2.101)$$

diperoleh $C_1 = 0.05$ dan $C_2 = 0.058$ maka

$$y = -\frac{7}{65}\cos 2t - \frac{4}{65}\sin 2t + 0.05e^{-t} + 0.058e^{3t} \qquad (2.102)$$

Listing program Matlab

```
clc
clear all
close all
% Contoh Soal 2.8
y =
dsolve('D2y = 2*Dy+3*y cos(2*t)','y(0)=0','Dy(0)=0')
```

Hasil program

```
y =
1/20*exp(-t)+3/52*exp(3*t)-7/65*cos(2*t)-4/65*sin(2*t)
```

2.2 Transformasi Laplace

Transformasi Laplace adalah metoda operasional yang dapat digunakan secara mudah untuk menyelesaikan persamaan linier diferensial. Dengan menggunakan transformasi Laplace, dapat dirubah beberapa fungsi umum seperti fungsi sinusoida, fungsi sinusoida teredam dan fungsi eksponensial menjadi fungsi-fungsi aljabar kompleks. Kelebihan metoda transformasi Laplace adalah metoda ini memungkinkan penggunaan teknik grafis untuk meramal performansi sistem tanpa menyelesaikan persamaan diferensial sistem. Kelebihan lain metoda transformasi Laplace adalah diperolehnya secara serentak baik komponen peralihan maupun komponen keadaan mantap solusi persamaan diferensial.

Tranformasi Laplace dari $f(t)$ didefinisikan oleh

$$L\left[f(t)\right] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \tag{2.103}$$

Transformasi Laplace suatu fungsi $f(t)$ ada jika $f(t)$ secara sepotong-sepotong kontinu pada setiap selang terhingga dalam daerah $t > 0$ dan jika fungsi tersebut mempuyai orde eksponensial dengan membesarnya t menuju tak terhingga. Dengan kata lain, integral Laplace harus konvergen. Suatu fungsi $f(t)$ mempuyai orde eksponensial jika ada suatu konstanta nyata positif σ sedemikian rupa sehingga fungsi $e^{\sigma t}\left|f(t)\right|$ mendekati nol jika t mendekati tak terhingga. Jika suatu fungsi $f(t)$ mempuyai transformasi Laplace maka transformasi Laplace dari $Af(t)$ dimana A adalah suatu konstanta diberikan

$$L\left[Af(t)\right] = AL\left[f(t)\right] \tag{2.104}$$

Hubungan ini secara mudah dapat diturunkan dari definisi transformasi Laplace. Dengan cara yang sama jika $f_1(t)$ dan $f_2(t)$ mempuyai transformasi Laplace maka transformasi Laplace dari $f_1(t) + f_2(t)$ diberikan oleh

$$L\left[f_1(t) + f_2(t)\right] = L\left[f_1(t)\right] + L\left[f_2(t)\right] \tag{2.105}$$

Berikut ini akan diturunkan transformasi Laplace untuk beberapa fungsi yang sering digunakan. Transformasi Laplace dari setiap fungsi $f(t)$ yang dapat ditransformasi dengan integral Laplace, diperoleh dengan mengalikan $f(t)$ dan e^{-st} kemudian mengintegrasikan hasil perkalian ini dari $t = 0$ sampai $t = \infty$. Diantaranya

Contoh 2.9 : Fungsi tangga dinyatakan sebagai berikut

$$f(t) = 0 \text{ untuk } t < 0 \text{ dan } f(t) = A \text{ (konstanta) untuk } t > 0$$

Jawab :
Transformasi Laplace dari $f(t)$ diberikan oleh

$$L\left[f(t)\right] = F(s) = \int_0^{\infty} Ae^{-st}dt = \frac{A}{s} \tag{2.106}$$

Contoh 2.10 : Fungsi tangga dinyatakan sebagai berikut

$$f(t) = 0 \text{ untuk } t < 0 \text{ dan } f(t) = A \text{ (konstanta) untuk } t > 0$$

Jawab :

Transformasi Laplace dari $f(t)$ diberikan oleh

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} Ae^{-st}dt = \frac{A}{s} \qquad (2.107)$$

Contoh 2.11 : Fungsi tangga dinyatakan sebagai berikut

$$f(t) = 0 \ \text{ untuk } \ t < 0 \ \text{ dan } \ f(t) = At \ \text{ untuk } \ t > 0$$

Jawab :

Transformasi Laplace dari $f(t)$ diberikan oleh

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} Ate^{-st}dt \qquad (2.108)$$

$$L[f(t)] = A\int_0^{\infty} te^{-st}dt = At\left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\frac{Ae^{-st}}{-s}dt \qquad (2.109)$$

$$L[f(t)] = A\int_0^{\infty} te^{-st}dt = \frac{A}{s}\int_0^{\infty} e^{-st}dt = \frac{A}{s^2} \qquad (2.110)$$

2.2.1 Sifat-Sifat Transformasi Laplace

Beberapa sifat-sifat transformasi Laplace adalah

Tabel 2.1 Sifat-Sifat Transformasi Laplace

No	Transformasi Laplace
1	$L[Af(t)] = AF(s)$
2	$L[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$
3	$L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0)$
4	$L\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$
5	$L\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} \overset{(k-1)}{f}(0)$ dimana $\overset{(k-1)}{f}(t) = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}f(t)$
6	$L\left[\int f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{\left[\int f(t)dt\right]_{t=0}}{s}$
7	$L\left[\int\int f(t)dt\, dt\right] = \frac{F(s)}{s^2} + \frac{\left[\int f(t)dt\right]_{t=0}}{s^2} + \frac{\left[\int\int f(t)dt\, dt\right]_{t=0}}{s}$
8	$L\left[\int\ldots\int\int f(t)\ (dt)^n\right] = \frac{F(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s^{n-k+1}}\left[\int\ldots\int f(t)(dt)^k\right]_{t=0}$
9	$L\left[e^{-at}f(t)\right] = F(s+a)$
10	$L\left[f(t-a)1(t-a)\right] = e^{-as}F(s)$

11	$L\left[tf(t)\right]=-\frac{F(s)}{ds}$
12	$L\left[\frac{1}{t}f(t)\right]=\int_s^\infty F(s)\,ds$
13	$L\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right]=a\,F(as)$

Teorema Nilai Awal . Teorema nilai awal memungkinkan untuk mencari harga $f(t)$ pada $t=0^+$ secara langsung dari $f(t)$. Teorema nilai awal tidak memberikan harga $f(t)$ tepat pada $t=0$ tetapi harga fungsi $f(t)$ pada saat t sedikit lebih besar dari nol. Adapun rumusan matematisnya

$$\lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{s\to\infty} sF(s) \tag{2.111}$$

Contoh 2.12 : Tentukan $f(0)$ dari fungsi alih

$$F(s)=\frac{2s+3}{s^2+4.25s+1} \tag{2.112}$$

Jawab :
Dengan menggunakan teorema nilai awal didapatkan

$$f(0)=\lim_{s\to\infty} sF(s)=\lim_{s\to\infty} s\frac{2s+3}{s^2+4.25s+1}=\lim_{s\to\infty}\frac{2s^2+3s}{s^2+4.25s+1} \tag{2.113}$$

$$f(0)=\lim_{s\to\infty} sF(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{\frac{2s^2}{s^2}+\frac{3s}{s^2}}{\frac{s^2}{s^2}+\frac{4.25s}{s^2}+\frac{1}{s^2}}=\lim_{s\to\infty}\frac{2+\frac{3}{s}}{1+\frac{4.25}{s}+\frac{1}{s^2}}=2 \tag{2.114}$$

Dalam menggunakan teorema nilai awal, tidak dibatasi oleh letak pole dari $sF(s)$ sehingga teorema nilai awal berlaku untuk fungsi sinusoida.

Teorema Nilai Akhir . Teorema harga akhir menyatakan bahwa perilaku keadaan tunak $f(t)$ adalah sama dengan perilaku $sF(s)$ disekitar $s=0$. Dengan demikian dapat diperoleh harga $f(t)$ pada $t=\infty$ secara langsung dari $sF(s)$. Adapun rumusan matematisnya adalah

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s) \tag{2.115}$$

Contoh 2.13 : Tentukan $f(\infty)$ dari fungsi alih

$$F(s)=\frac{10(s-1)}{s(s+1)} \tag{2.116}$$

Jawab :
Dengan menggunakan teorema nilai akhir diperoleh

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0} sF(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{10(s-1)}{s(s+1)}=\lim_{s\to 0}\frac{10(s-1)}{(s+1)}=-10 \tag{2.117}$$

Teorema nilai awal dan teorema nilai akhir memberikan hasil pengecekan secara mudah pada suatu solusi yang memungkinkan untuk meramal perilaku sistem dalam wawasan waktu tanpa melakukan transformasi balik dari fungsi dalam wawasan s ke fungsi waktu

Tabel 2.2 berikut ini memberikan suatu daftar pasangan transformasi Laplace. Tabel tersebut dapat digunakan untuk mencari transformasi Laplace suatu fungsi waktu yang diberikan. Adapun pasangan-pasangan transformasi Laplace sebagai berikut

Tabel 2.2 Pasangan – Pasangan Transformasi Laplace

No	$f(t)$	$F(s)$
1	impulsa satuan $\delta(t)$	1
2	Tangga satuan $1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
6	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
7	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
8	$t^n \quad (n = 1,2,3,\ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
9	$t^n e^{-at} \quad (n = 1,2,3,\ldots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	$\frac{1}{b-a}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
11	$\frac{1}{b-a}\left(be^{-bt} - ae^{-at}\right)$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
12	$\frac{1}{ab}\left[1+\frac{1}{a-b}\left(be^{-bt} - ae^{-at}\right)\right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
13	$e^{-at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
14	$e^{-at}\cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

15	$\frac{1}{a^2}\left[at - 1 + e^{-at}\right]$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$

Contoh 2.14 : Tentukan transformasi Laplace untuk fungsi $f(t)$ berikut

a. $f(t)=12$ (2.118)

b. $f(t)=10t$ (2.119)

c. $f(t)=6t^2$ (2.120)

d. $f(t)=6e^{-5t}$ (2.121)

e. $f(t)=6e^{-5t}\cos 4t$ (2.122)

Jawab :

Dengan menggunakan Tabel 2.2 diperoleh

a. $f(t)=10t \rightarrow F(s)=\frac{10}{s^2}$ (2.123)

b. $f(t)=6t^2(t) \rightarrow F(s)=\frac{12}{s^3}$ (2.124)

c. $f(t)=6e^{-5t} \rightarrow F(s)=\frac{6}{s+5}$ (2.125)

d. $f(t)=6e^{-5t}\cos 4t \rightarrow F(s)=\frac{6s+30}{(s+5)^2+16}$ (2.126)

Listing program Matlab

```
clc
clear all
close all
% Contoh Soal 2.14
syms s t
f1 = 10*t
f2 = 6*(t^2)
f3 = 6 * exp(-5*t)
f4 = 6 * exp(-5*t) * cos (4*t)
%
L1 = Laplace(f1)
L2 = Laplace(f2)
L3 = Laplace(f3)
L4 = Laplace(f4)
pretty(L4)
```

Hasil program

```
f1 =
10*t
```

```
f2 =
6*t^2

f3 =
6*exp(-5*t)

f4 =
6*exp(-5*t)*cos(4*t)

L1 =
10/s^2

L2 =
12/s^3

L3 =
6/(s+5)

L4 =
3/8*(s+5)/(1/16*(s+5)^2+1)
```

2.2.2 Transformasi Laplace Balik

Transformasi Laplace Balik adalah proses matematik dalam mengubah ekspresi variabel kompleks menjadi ekspresi waktu. Notasi transformasi balik adalah $L^{-1}\left[F(s)\right]$ sehingga

$$L^{-1}\left[F(s)\right] = f(t) \tag{2.127}$$

Dalam menyelesaikan persoalan dengan menggunakan transformasi Laplace balik akan ditemui pada suatu pertanyaan tentang cara menentukan $f(t)$ dari $F(s)$. Secara matematis $f(t)$ diperoleh dari $F(s)$ dengan ekspresi matematis berikut

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}ds \quad \text{untuk } (t > 0) \tag{2.128}$$

Dimana c adalah absis konvergensi yang merupakan konstanta nyata yang dipilih sedemikian rupa sehingga lebih besar dari semua titik singular $F(s)$. Jadi lintasan integrasi sejajar dengan sumbu $j\omega$ dan digeser sejauh c dari sumbu khayal. Lintasan ini berada di sebelah kanan semua titik singuler

Metoda uraian pecahan parsial untuk mencari transformasi Laplace Balik. Jika $F(s)$ transformasi Laplace dari $f(t)$, diuraikan menjadi komponen-komponennya berikut

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \ldots + F_n(s) \tag{2.129}$$

dan jika transformasi Laplace balik dari $F_1(s)$, $F_2(s)$,…$F_n(s)$ telah tersedia maka

$$L^{-1}\left[F(s)\right]=L^{-1}\left[F_1(s)\right]+L^{-1}\left[F_2(s)\right]+\ldots+L^{-1}\left[F_n(s)\right]=f_1(t)+f_2(t)+\ldots+f_n(t) \quad (2.130)$$

Dimana $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ masing-masing adalah transformasi Laplace balik dari $F_1(s), F_2(s), \ldots F_n(s)$. Untuk soal-soal dalam teori kendali, $F(s)$ sering mempuyai bentuk berikut

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)} \quad (2.131)$$

Dimana $A(s)$ dan $B(s)$ adalah polinomial dalam s dan derajat $B(s)$ tidak lebih tinggi dari $A(s)$. Dalam menggunakan teknik uraian pecahan parsial untuk mencari transformasi Laplace balik dari $F(s)=B(s)/A(s)$ terlebih dahulu harus diketahui akar-akar polinomial $A(s)$. Kelebihan pendekatan uraian pecahan parsial adalah masing-masing suku dari $F(s)$ merupakan hasil penguraian ke dalam bentuk pecahan parsial dan merupakan fungsi s yang sangat sederhana.

Tinjau fungsi $F(s)$ yang ditulis dalam bentuk faktor berikut

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{K(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)} \quad (2.132)$$

dimana $p_1, p_2, p_3 \ldots, p_n$ dan $z_1, z_2, \ldots z_n$ adalah besaran nyata atau besaran kompleks. Asumsi pangkat tertinggi s dari $A(s)$ dianggap lebih tinggi dari $B(s)$. Dalam penguraian $F(s)=B(s)/A(s)$ ke dalam bentuk pecahan, pangkat tertinggi s pada $A(s)$ harus lebih tinggi dari pangkat tertinggi s pada $B(s)$. Jika tidak demikian maka pembilang $B(s)$ harus dibagi terlebih dahulu dengan penyebut $A(s)$ sehingga diperoleh suatu polinomial s ditambah dengan sisa (perbandingan antara polinomial s yang derajat pembilangnya lebih rendah dari penyebutnya).

Uraian pecahan parsial jika $F(s)$ hanya melibatkan pole-pole yang berbeda. Pada kasus ini $F(s)$ selalu dapat diuraikan menjadi suatu penjumlahan pecahan parsial sederhana berikut

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{a_1}{s+p_1}+\frac{a_2}{s+p_2}+\ldots+\frac{a_n}{s+p_n} \quad (2.133)$$

Dimana a_k adalah konstanta. a_k disebut residu pada pole $s=-p_k$. Harga a_k dapat diperoleh dengan mengalikan kedua persamaan (2.133) dengan $(s+p_k)$ dan memasukkan harga $s=-p_k$ berikut

$$\frac{B(s)}{A(s)}(s+p_k)=\left[\frac{a_1}{s+p_1}(s+p_k)+\frac{a_2}{s+p_2}(s+p_k)+\ldots+\frac{a_n}{s+p_n}(s+p_k)\right]_{s=-p_k}=a_k \quad (2.134)$$

Semua suku uraian pada persamaan (2.134) menjadi nol kecuali a_k. Jadi residu a_k diperoleh dari

$$a_k = \left[\frac{B(s)}{A(s)} (s+p_k) \right]_{s=-p_k} \tag{2.135}$$

Berdasarkan persamaan (2.133) dan dengan memperhatikan bahwa

$$L^{-1}\left[\frac{a_k}{s+p_k} \right] = a_k e^{-p_k t} \tag{2.136}$$

Diperoleh $f(t) = L^{-1}\left[F(s)\right]$ sebagai berikut

$$f(t) = a_1 e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + a_3 e^{-p_3 t} + \ldots + a_n e^{-p_n t} \text{ dimana } (t \geq 0) \tag{2.137}$$

Contoh 2.15 : Carilah transformasi Laplace balik dari

$$Y(s) = \frac{\frac{6}{s} + 2s + 21}{\left(s^2 + 8s + 12\right)} = \frac{2s^2 + 21s + 6}{s\left(s^2 + 8s + 12\right)} \tag{2.138}$$

diperoleh

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 21s + 6}{s\left(s^2 + 8s + 12\right)} = \frac{2s^2 + 21s + 6}{s(s+2)(s+6)} \tag{2.139}$$

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+2)} + \frac{C}{(s+6)} \tag{2.140}$$

Penentuan konstanta A

$$A = sY(s)\Big|_{s=0} \tag{2.141}$$

$$A = s\frac{2s^2 + 21s + 6}{s(s+2)(s+6)}\Bigg|_{s=0} \tag{2.142}$$

$$A = \frac{2s^2 + 21s + 6}{(s+2)(s+6)}\Bigg|_{s=0} = \frac{2(0)^2 + 21(0) + 6}{(0+2)(0+6)} = 0.5 \tag{2.143}$$

Penentuan konstanta B

$$B = (s+2)Y(s)\Big|_{s=-2} \tag{2.144}$$

$$B = (s+2)\frac{2s^2 + 21s + 6}{s(s+2)(s+6)}\Bigg|_{s=-2} \tag{2.145}$$

$$B = \frac{2s^2 + 21s + 6}{s(s+6)}\Bigg|_{s=-2} = \frac{2(-2)^2 + 21(-2) + 6}{(-2)(-2+6)} = \frac{8 - 42 + 6}{-8} = 3.5 \tag{2.146}$$

Penentuan konstanta C

$$C=(s+6)\,Y(s)\Big|_{s=-6} \tag{2.147}$$

$$C=(s+6)\frac{2s^2+21s+6}{s(s+2)(s+6)}\Bigg|_{s=-6} \tag{2.148}$$

$$C=\frac{2s^2+21s+6}{s(s+2)}\Bigg|_{s=-6}=\frac{2(-6)^2+21(-6)+6}{(-6)(-6+2)}=\frac{72-126+6}{24}=-2 \tag{2.149}$$

diperoleh

$$Y(s)=\frac{0.50}{s}+\frac{3.50}{(s+2)}-\frac{2}{(s+6)} \tag{2.150}$$

Dengan menggunakan transformasi Laplace balik diperoleh

$$y(t)=0.50+3.50e^{-2t}-2.00e^{-6t} \text{ untuk } (t\geq 0) \tag{2.151}$$

Listing program Matlab

```
clc
clear all
close all
% Contoh Soal 2.15
syms s
f1 = (2*s^2) + (21*s) + (6);
f2 = (s^3) + (8*s^2) + (12*s);
f = f1/f2
%
L  = ilaplace(f)
```

Hasil program

```
f =
(2*s^2+21*s+6)/(s^3+8*s^2+12*s)
L =
-2*exp(-6*t)+7/2*exp(-2*t)+1/2
```

Uraian pecahan parsial jika $F(s)$ hanya melibatkan pole-pole konjugasi kompleks. Jika p_1 dan p_2 adalah pole konjugasi kompleks, maka dapat digunakan uraian berikut

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{\alpha_1 s+\alpha_2}{(s+p_1)(s+p_2)}+\frac{a_3}{s+p_3}+\ldots+\frac{a_n}{s+p_n} \tag{2.152}$$

Harga α_1 dan α_2 diperoleh dengan mengalikan kedua ruas persamaan (2.152) dengan $(s+p_1)(s+p_2)$ dan memasukkan harga $s=-p_1$ sebagai berikut

$$\left[\frac{B(s)}{A(s)}(s+p_1)(s+p_2)\right]_{s=-p_1} \tag{2.153}$$

$$\left[\frac{B(s)}{A(s)}(s+p_1)(s+p_2)\right]_{s=-p_1} = \left[(\alpha_1 s+\alpha_2)+\frac{a_3}{s+p_3}(s+p_1)(s+p_2)+\ldots+\frac{a_n}{s+p_n}(s+p_1)(s+p_2)\right]_{s=-p_1} \tag{2.154}$$

Terlihat bahwa semua suku uraian menjadi nol kecuali suku $(\alpha_1 s+\alpha_2)$. Dengan demikian

$$(\alpha_1 s+\alpha_2)_{s=-p_1} = \left[\frac{B(s)}{A(s)}(s+p_1)(s+p_2)\right]_{s=-p_1} \tag{2.155}$$

Karena p_1 adalah besaran kompleks, maka kedua ruas persamaan (2.155) merupakan besaran kompleks. Dengan menyamakan bagian nyata kedua ruas persamaan (2.155) diperoleh satu persamaan. Dengan cara yang sama, dengan menyamakan bagian khayal kedua ruas persamaan (2.155) akan diperoleh persamaan yang lain. Dari kedua persamaan dapat ditentukan Harga α_1 dan α_2

Contoh 2.16 : Carilah transformasi Laplace balik dari

$$F(s)=\frac{s+3}{s^3+5s^2+12s+8} \tag{2.156}$$

Jawab :

$$F(s)=\frac{s+3}{s^3+5s^2+12s+8}=\frac{s+3}{(s+1)(s+2+j2)(s+2-j2)} \tag{2.157}$$

$$F(s)=\frac{s+3}{s^3+5s^2+12s+8}=\frac{r_1}{(s+1)}+\frac{r_2}{(s+2+j2)}+\frac{r_2^*}{(s+2-j2)} \tag{2.158}$$

$$r_1=(s+1)\left.\frac{s+3}{(s+1)(s+2+j2)(s+2-j2)}\right|_{s=-1}=\frac{2}{5} \tag{2.159}$$

$$r_2=(s+2+j2)\left.\frac{s+3}{(s+1)(s+2+j2)(s+2-j2)}\right|_{s=-2-j2} \tag{2.160}$$

$$r_2=\frac{(1-j2)}{(-1-j2)(-j4)}=\frac{1-j2}{-8+j4}=-\frac{1}{5}+j\frac{3}{20} \tag{2.161}$$

$$r_2^*=-\frac{1}{5}-j\frac{3}{20} \tag{2.162}$$

Sehingga

$$F(s)=\frac{2/5}{(s+1)}+\frac{-1/5+j3/20}{(s+2+j2)}+\frac{-1/5-j3/20}{(s+2-j2)} \tag{2.163}$$

$$F(s)=\frac{2/5}{(s+1)}-\frac{1}{5}\frac{(2s+1)}{(s^2+4s+8)} \tag{2.164}$$

Untuk

$$F_1(s)=\frac{2/5}{(s+1)}\rightarrow f_1(t)=\frac{2}{5}e^{-t} \tag{2.165}$$

$$F_2(s)=-\frac{1}{5}\frac{(2s+1)}{(s^2+4s+8)} \tag{2.166}$$

$$F_2(s)=-\frac{2}{5}\frac{\left(s+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\right)}{\left((s+2)^2+2^2\right)}=-\frac{2}{5}\left(\frac{s+2}{\left((s+2)^2+2^2\right)}+\frac{-\frac{3}{2}}{\left((s+2)^2+2^2\right)}\right) \tag{2.167}$$

$$F_2(s)=-\frac{2}{5}\left(\frac{s+2}{(s+2)^2+2^2}\right)+\frac{6/10}{2}\left(\frac{2}{(s+2)^2+2^2}\right) \tag{2.168}$$

$$F_2(s)=-\frac{2}{5}\left(\frac{s+2}{(s+2)^2+2^2}\right)+\frac{3}{10}\left(\frac{2}{(s+2)^2+2^2}\right) \tag{2.169}$$

$$f_2(t)=-\frac{2}{5}e^{-2t}\cos 2t+\frac{3}{10}e^{-2t}\sin 2t \tag{2.170}$$

Sehingga diperoleh

$$f(t)=f_1(t)+f_2(t)=\frac{2}{5}e^{-t}-\frac{2}{5}e^{-2t}\cos 2t+\frac{3}{10}e^{-2t}\sin 2t \tag{2.171}$$

Listing program Matlab

```
clc
clear all
close all
% Contoh Soal 2.16
syms s
f1 = (s + 3);
f2 = (s^3) + (5*s^2) + (12*s) + 8;
f = f1/f2
%
L  = ilaplace(f)
```

Hasil program

```
f =
 (s+3)/(s^3+5*s^2+12*s+8)
L =
2/5*exp(-t)-2/5*exp(-2*t)*cos(2*t)+3/10*exp(-2*t)*sin(2*t)
```

Uraian pecahan parsial jika $F(s)$ hanya melibatkan pole-pole yang berulang. Tinjau $F(s)=B(s)/A(s)$ dimana $A(s)=0$ mempuyai akar p_1 yang berulang r kali. Selanjunya $A(s)$ dapat ditulis sebagai

$$A(s)=(s+p_1)^r(s+p_{r+1})(s+p_{r+2})\ldots+(s+p_n) \tag{2.172}$$

Uraian pecahan parsial dari $F(s)$ adalah

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_r}{(s+p_1)^r}+\frac{b_{r-1}}{(s+p_1)^{r-1}}+\ldots+\frac{b_1}{s+p_1}+\frac{a_{r+1}}{s+p_{r+1}}+\frac{a_{r+2}}{s+p_{r+2}}+\ldots+\frac{a_n}{s+p_n} \tag{2.173}$$

Dimana $b_r,\ b_{r-1},\ldots,b_1$ diberikan oleh

$$b_r=\left[\frac{B(s)}{A(s)}(s+p_1)^r\right]_{s=-p_1} \tag{2.174}$$

$$b_{r-1}=\left\{\frac{d}{ds}\left[\frac{B(s)}{A(s)}(s+p_1)^r\right]\right\}_{s=-p_1} \tag{2.175}$$

$$\vdots$$

$$b_{r-j}=\frac{1}{j\,!}\left\{\frac{d^j}{ds^j}\left[\frac{B(s)}{A(s)}(s+p_1)^r\right]\right\}_{s=-p_1} \tag{2.176}$$

$$b_1=\frac{1}{(r-1)!}\left\{\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}}\left[\frac{B(s)}{A(s)}(s+p_1)^r\right]\right\}_{s=-p_1} \tag{2.177}$$

Sehingga transformasi Laplace balik dari $F(s)$ diperoleh sebagai berikut

$$f(t)=L^{-1}\left[F(s)\right]=\left[\frac{b_r}{(r-1)!}t^{r-1}+\frac{b_{r-1}}{(r-2)!}t^{r-2}+\ldots+b_2t+b_1\right]e^{-p_1t}+a_{r+1}e^{-p_{r+1}t}\ldots+a_ne^{-p_nt}\quad \text{untuk } (t\geq 0) \tag{2.178}$$

Contoh 2.17 : Carilah transformasi Laplace balik dari

$$F(s)=\frac{10}{(s+2)(s+1)^3} \tag{2.179}$$

Jawab :

$$F(s)=\frac{a}{(s+2)}+\frac{b_3}{(s+1)^3}+\frac{b_2}{(s+1)^2}+\frac{b_1}{(s+1)} \tag{2.180}$$

Diperoleh

$$a=\left.\frac{10}{(s+2)(s+1)^3}(s+2)\right|_{s=-2}=\frac{1}{-1}=-10 \tag{2.181}$$

$$b_3=\left[\frac{10}{(s+2)(s+1)^3}(s+1)^3\right]_{s=-1}=\frac{10}{1}=10 \tag{2.182}$$

$$b_2=\left\{\frac{d}{ds}\left[\frac{10}{(s+2)(s+1)^3}(s+1)^3\right]\right\}_{s=-1}=-10 \tag{2.183}$$

$$b_1 = \frac{1}{2\,!}\left\{\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{s+3}{(s+2)(s+1)^3}(s+1)^3\right]\right\}_{s=-1} = 20 \tag{2.184}$$

Selanjutnya

$$F(s) = \frac{-10}{(s+2)} + \frac{10}{(s+1)^3} - \frac{10}{(s+1)^2} + \frac{20}{(s+1)} \tag{2.185}$$

transformasi Laplace balik dari $F(s)$ adalah

$$f(t) = -10e^{-2t} + \frac{10}{2\,!}t^2e^{-t} - \frac{10}{1\,!}te^{-t} + 20e^{-t} \tag{2.186}$$

$$f(t) = -10e^{-2t} + 5t^2e^{-t} - 10te^{-t} + 20e^{-t} \tag{2.187}$$

Listing program Matlab

```
clc
clear all
close all
% Contoh Soal 2.17
syms s
f1 = 10;
f2 = (s^4) + (5*s^3) + (9*s^2) + (7*s) + 2;
f = f1/f2
%
L  = ilaplace(f1/f2)
```

Hasil program

```
f =
10/(s^4+5*s^3+9*s^2+7*s+2)
L =
-10*exp(-2*t)+5*(2+t^2-2*t)*exp(-t)
```

2.2.3 Solusi Persamaan Linear Diferensial dengan Metoda Transformasi Laplace

Metoda transformasi Laplace menghasilkan solusi lengkap (solusi homogen ditambah dengan solusi tak homogen) dari persamaan linear diferensial. Metode klasik untuk menentukan solusi lengkap dari persamaan diferensial memerlukan perhitungan-perhitungan konstanta-konstanta integrasi dengan menggunakan syarat-syarat awal tetapi dengan menggunakan transformasi Laplace perhitungan konstanta integrasi dari syarat awal tidak diperlukan karena syarat awal secara otomatis sudah dimasukkan dalam transformasi Laplace dari persamaan diferensial.

Jika semua syarat awal adalah nol maka tranformasi Laplace dari persamaan diferensial diperoleh hanya dengan mengganti d/dt dengan s , d^2/dt^2 dengan s^2 dan seterusnya . Langkah – langkah dalam penyelesaian persamaan diferensial dengan metoda transformasi Laplace adalah

1. Dengan mencari transformasi Laplace, tiap-tiap suku persamaan diferensial linier yang diberikan, mengubah persamaan diferensial tersebut menjadi suatu persamaan aljabar s, mencari ekspresi transformasi Laplace variabel yang bergantung dengan menyusun kembali persamaan aljabar tersebut
2. Mencari solusi persamaan diferensial dalam domain waktu dengan mencari transformasi Laplace balik dari variabel yang berkaitan

Contoh 2.18 : Tentukan solusi dari persamaan linear differensial dibawah ini dengan menggunakan tranformasi Laplace

$$\frac{d^2y}{dt^2}+8\frac{dy}{dt}+12y=6 \tag{2.188}$$

Dengan kondisi awal : $y(0)=2$ dan $\frac{dy}{dt}(0)=5$

Jawab :

Dengan menggunakan tranformasi Laplace

$$s^2Y(s)-sy(0)-y^1(0)+8sY(s)\text{-}8y(0)+12Y(s)=\frac{6}{s} \tag{2.189}$$

$$s^2Y(s)-2s\text{-}5+8sY(s)-16+12Y(s)=\frac{6}{s} \tag{2.190}$$

$$s^2Y(s)+8sY(s)+12Y(s)=\frac{6}{s}+2s+21 \tag{2.191}$$

$$\left(s^2+8s+12\right)Y(s)=\frac{6}{s}+2s+21 \tag{2.192}$$

$$Y(s)=\frac{\frac{6}{s}+2s+21}{\left(s^2+8s+12\right)}=\frac{2s^2+21s+6}{s\left(s^2+8s+12\right)} \tag{2.193}$$

Dengan menggunakan tranformasi Laplace balik diperoleh

$$Y(s)=\frac{2s^2+21s+6}{s\left(s^2+8s+12\right)}=\frac{2s^2+21s+6}{s(s+2)(s+6)} \tag{2.194}$$

$$Y(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{(s+2)}+\frac{C}{(s+6)} \tag{2.195}$$

Penentuan konstanta A

$$A=sY(s)\Big|_{s=0} \tag{2.196}$$

$$A=s\left.\frac{2s^2+21s+6}{s(s+2)(s+6)}\right|_{s=0} \tag{2.197}$$

$$A = \left.\frac{2s^2+21s+6}{(s+2)(s+6)}\right|_{s=0} = \frac{2(0)^2+21(0)+6}{(0+2)(0+6)} = 0.5 \tag{2.198}$$

Penentuan konstanta B

$$B = (s+2)Y(s)\big|_{s=-2} \tag{2.199}$$

$$B = (s+2)\left.\frac{2s^2+21s+6}{s(s+2)(s+6)}\right|_{s=-2} \tag{2.200}$$

$$B = \left.\frac{2s^2+21s+6}{s(s+6)}\right|_{s=-2} = \frac{2(-2)^2+21(-2)+6}{(-2)(-2+6)} = \frac{8-42+6}{-8} = 3.5 \tag{2.201}$$

Penentuan konstanta C

$$C = (s+6)Y(s)\big|_{s=-6} \tag{2.202}$$

$$C = (s+6)\left.\frac{2s^2+21s+6}{s(s+2)(s+6)}\right|_{s=-6} \tag{2.203}$$

$$C = \left.\frac{2s^2+21s+6}{s(s+2)}\right|_{s=-6} = \frac{2(-6)^2+21(-6)+6}{(-6)(-6+2)} = \frac{72-126+6}{24} = -2 \tag{2.204}$$

diperoleh

$$Y(s) = \frac{0.50}{s} + \frac{3.50}{(s+2)} - \frac{2}{(s+6)} \tag{2.205}$$

dan

$$y(t) = 0.50 + 3.50e^{-2t} - 2.00e^{-6t} \tag{2.206}$$

Listing program Matlab

```
clc
clear all
close all
% Contoh Soal 2.18
y = dsolve('D2y = -8*Dy - 12*y + 6','y(0)=2','Dy(0)=5')
```

Hasil program

```
y =
7/2*exp(-2*t)-2*exp(-6*t)+1/2
```

2.3 Rangkuman

Sistem dikatakan linear jika berlaku prinsip-prinsip superposisi. Prinsip superposisi menyatakan bahwa tanggapan yang dihasilkan dengan mengaplikasikan dua fungsi gaya berbeda secara bersamaan adalah jumlah dari dua tanggapan terhadap dua aplikasi fungsi tadi secara sendiri-sendiri. Prinsip inilah yang memungkinkan membangun penyelesaian yang rumit untuk persamaan linear diferensial linear secara sederhana. Dengan menggunakan transformasi Laplace diperoleh penyelesaian persamaan diferensial linear. Dengan menggunakan transformasi Laplace dapat diubah beberapa fungsi umum seperti fungsi sinusoida, fungsi sinusoida teredam dan fungsi eksponensial menjadi fungsi – fungsi aljabar variabel kompleks. Jadi persamaan diferensial linier dapat ditransformasikan menjadi suatu persamaan aljabar variabel kompleks. Solusi persamaan diferensial selanjutnya dapat diperoleh dengan menggunakan tabel transformasi Laplace atau dengan teknik uraian pecahan parsial. Kelebihan metoda trasnformasi Laplace adalah diperolehnya secara serentak baik komponen transien maupun komponen keadaan mantap dari solusi persamaan linear diferensial.