

BAB VIII

METODA TEMPAT KEDUDUKAN AKAR

Deskripsi : Bab ini memberikan gambaran secara umum mengenai diagram tempat kedudukan akar dan ringkasan aturan umum untuk menggambarkan tempat kedudukan akar serta contoh-contoh soal

Objektif : Memahami bab ini akan menjadi bekal yang penting untuk memahami prinsip-prinsip metoda tempat kedudukan akar

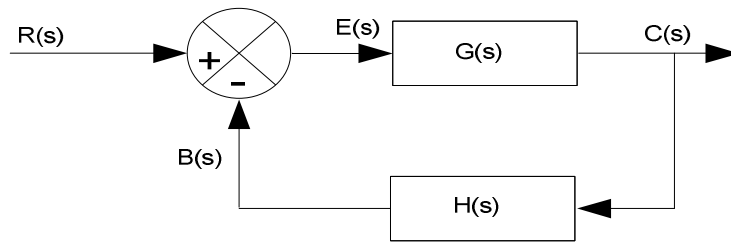
8.1 Pendahuluan

Karakteristik dasar tanggapan peralihan suatu sistem lingkaran tertutup ditentukan oleh pole-pole lingkaran tertutup. Jadi dalam persoalan analisis, perlu ditentukan letak pole-pole lingkaran tertutup pada bidang s . Dalam disain sistem lingkaran tertutup, akan diatur pole dan zero lingkaran terbuka sedemikian rupa sehingga pole dan zero lingkaran tertutup pada posisi yang diinginkan. Pole-pole lingkaran tertutup adalah akar-akar persamaan karakteristik. Untuk mencarinya diperlukan penguraian persamaan polinomial karakteristik atas faktor-faktornya. Pada umumnya ini sulit jika derajat polinomial karakteristiknya tiga atau lebih tinggi. Teknik klasik penguraian polinomial atas faktor-faktornya adalah kurang ampuh karena penguatan fungsi alih lingkaran terbuka berubah maka perhitungan arus diulang.

Metoda tempat kedudukan akar merupakan suatu metoda dengan menggambar akar-akar persamaan karakteristik untuk semua harga dari suatu parameter sistem. Akar-akar untuk suatu harga tertentu dari parameter ini selanjutnya terletak pada grafik yang diperoleh. Perhatikan bahwa parameter ini biasanya adalah penguatan tetapi setiap variabel lain dari fungsi alih lingkaran terbuka juga dapat digunakan. Jika tidak disebutkan, dianggap bahwa penguatan fungsi alih lingkaran terbuka merupakan parameter yang diubah di seluruh daerah harganya yaitu dari nol sampai tak terhingga. Tempat kedudukan akar-akar persamaan karakteristik sistem lingkaran tertutup jika penguatan diubah dari nol sampai tak terhingga memberikan latar belakang pemberian nama metoda ini. Diagram ini secara jelas menunjukkan kontribusi tiap pole dan zero lingkaran terbuka pada letak pole-pole lingkaran tertutup. Metoda tempat kedudukan akar memungkinkan untuk mencari pole-pole lingkaran tertutup dari pole dan zero lingkaran terbuka dengan penguatan sebagai parameter. Metoda ini menghilangkan kesulitan-kesulitan yang timbul pada teknik klasik dengan memberikan peragaan grafis semua pole lingkaran tertutup untuk semua harga penguatan fungsi alih lingkaran terbuka.

8.2 Diagram Tempat Kedudukan Akar

Tinjau sistem yang ditunjukkan pada Gambar 8.1 berikut



Gambar 8.1 Diagram Blok Sistem Kendali Lingkari Tertutup

Fungsi alih lingkari tertutup Gambar 8.1 adalah

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (8.1)$$

Persamaan karakteristik sistem lingkari tertutup adalah

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad (8.2)$$

atau

$$G(s)H(s) = -1 \quad (8.3)$$

Karena $G(s)H(s)$ adalah besaran kompleks maka persamaan (8.2) dapat dipisahkan menjadi dua persamaan dengan menyamakan masing-masing sudut dan besar kedua ruas persamaan tersebut untuk mendapatkan

Syarat sudut

$$\angle G(s)H(s) = \pm 180^\circ (2k+1) \text{ dimana } (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (8.4)$$

Syarat besar

$$|G(s)H(s)| = 1 \quad (8.5)$$

Harga-harga s yang memenuhi syarat sudut dan syarat besar adalah akar-akar persamaan karakteristik atau pole-pole lingkari tertutup. Suatu diagram dari titik-titik pada bidang kompleks yang hanya memenuhi syarat sudut adalah tempat kedudukan akardan akar-akar persamaan karakteristik untuk suatu harga penguatan yang diberikan dapat diperoleh dari syarat besar. Sebelum membahas suatu metoda untuk menggambar diagram tempat kedudukan akar secara terperinci akan diberikan suatu ilustrasi diagram tempat kedudukan akar untuk sistem orde kedua sederhana dengan fungsi alih terbuka berikut

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)} \quad (8.6)$$

Fungsi alih lingkari tertutupnya

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + s + K} \quad (8.7)$$

Persamaan karakteristik sistem adalah

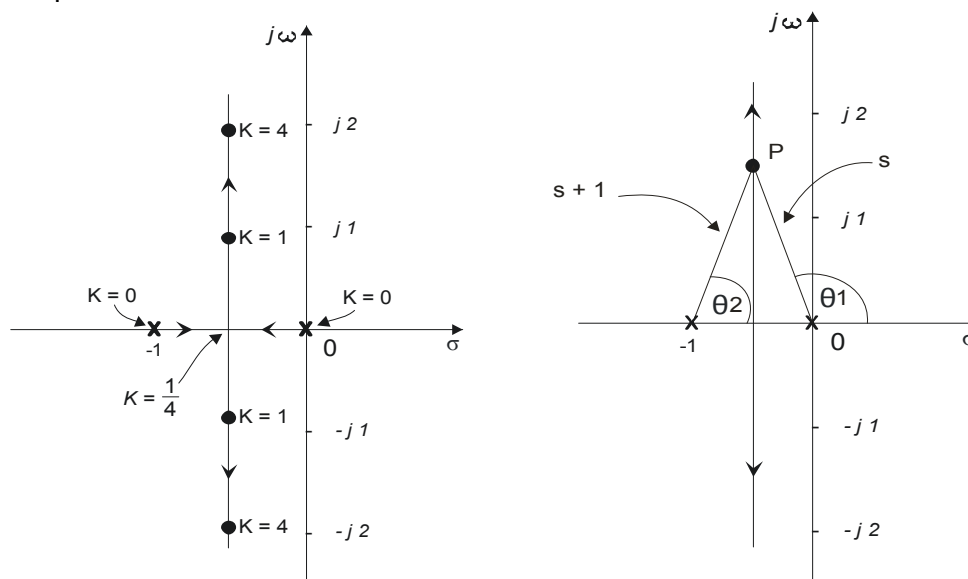
$$s^2 + s + K = 0 \quad (8.8)$$

Akan ditentukan tempat kedudukan akar-akar persamaan (8.8) jika K diubah dari nol sampai tidak terhingga. Untuk memberikan gambaran yang jelas mengenai rupa diagram tempat kedudukan akar sistem ini, pertama-tama akan dicari akar-akar persamaan karakteristik secara analitis dalam bentuk K dan kemudian mengubah K dari nol sampai tidak terhingga. Harus diingat bahwa ini bukan merupakan cara yang benar untuk menggambar diagram tempat kedudukan akar. Cara yang benar adalah menggunakan pendekatan coba-coba secara grafis dan pekerjaan ini dapat disederhanakan dengan menerapkan aturan-aturan umum yang akan diberikan pada Bagian 8.3. Akar-akar persamaan karakteristik persamaan (8.8) adalah

$$s_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4K} \quad (8.9)$$

$$s_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4K} \quad (8.10)$$

Akar-akar persamaan (8.9) dan (8.10) adalah nyata untuk $K \leq \frac{1}{4}$ dan kompleks untuk $K > \frac{1}{4}$.



Gambar 8.2 Diagram Tempat Kedudukan Akar Persamaan (8.6)

Tempat kedudukan akar-akar untuk semua harga K ditunjukkan pada Gambar 8.2. Tempat kedudukan akar-akar tersebut diberi skala dengan K sebagai parameter. Setelah diagram tersebut digambar maka dengan segera dapat ditentukan harga K yang akan menghasilkan suatu akar atau pole-pole lingkaran tertutup pada suatu titik yang diinginkan. Dari analisis ini, jelas bahwa pole-pole lingkaran tertutup untuk $K = 0$ adalah sama dengan pole-pole dari $G(s)H(s)$. Jika harga K diperbesar dari nol sampai $\frac{1}{4}$ maka pole-pole lingkaran tertutup bergerak menuju titik $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. Untuk

harga K dari nol sampai $\frac{1}{4}$ semua pole-pole lingkaran tertutup terletak pada sumbu

nyata. Ini berkaitan dengan sistem redaman lebih sehingga tanggapan impuls tidak berosilasi. Pada $K = \frac{1}{4}$, kedua pole-pole lingkaran tertutup nyata tersebut bersatu. Ini berkaitan dengan redaman kritis. Jika K diperbesar dari $\frac{1}{4}$ maka pole-pole lingkaran tertutup tersebut bergerak meninggalkan sumbu nyata dan menjadi kompleks dan karena bagian nyata dari pole lingkaran tertutup adalah konstan untuk $K > \frac{1}{4}$ maka pole-pole lingkaran tertutup tersebut bergerak sepanjang garis $s = -\frac{1}{2}$. Oleh karena itu untuk $K > \frac{1}{4}$ sistem menjadi redaman kurang. Untuk suatu harga K yang diberikan, satu dari pole-pole lingkaran tertutup konjugasi bergerak menuju $s = -\frac{1}{2} + j\infty$ sedangkan yang lain bergerak menuju $s = -\frac{1}{2} - j\infty$. Untuk syarat sudut ditentukan dengan persamaan

$$\angle \frac{K}{s(s+1)} = -\angle s - \angle s + 1 = \pm 180^\circ (2k+1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (8.11)$$

Tinjau titik P pada tempat kedudukan akar yang ditunjukkan pada Gambar 8.2. Jika titik P terletak pada sumbu nyata antara 0 dan -1 maka $\theta_1 = 180^\circ$ dan $\theta_2 = 0$. Dengan demikian setiap titik pada tempat kedudukan akar tersebut memenuhi syarat sudut. Juga dapat dilihat bahwa jika titik P bukan merupakan titik pada tempat kedudukan akar maka jumlah θ_1 dan θ_2 tidak sama dengan $\pm 180^\circ (2k+1)$ dimana $k = 0, 1, 2, \dots$. Jadi titik-titik yang tidak terletak pada tempat-tempat kedudukan akar, tidak memenuhi syarat sudut sehingga bukan merupakan pole-pole lingkaran tertutup. Jika pole-pole lingkaran tertutup ditentukan dari tempat kedudukan akar maka harga K yang berkaitan dengan pole tersebut ditentukan dari syarat besar seperti yang dinyatakan pada persamaan (8.5). Sebagai contoh jika pole lingkaran tertutup yang dipilih adalah $s = -\frac{1}{4} + j1$ maka harga K untuk kondisi ini adalah

$$|G(s)H(s)| = \left| \frac{K}{s(s+1)} \right|_{s = -\frac{1}{4} + j} \quad (8.12)$$

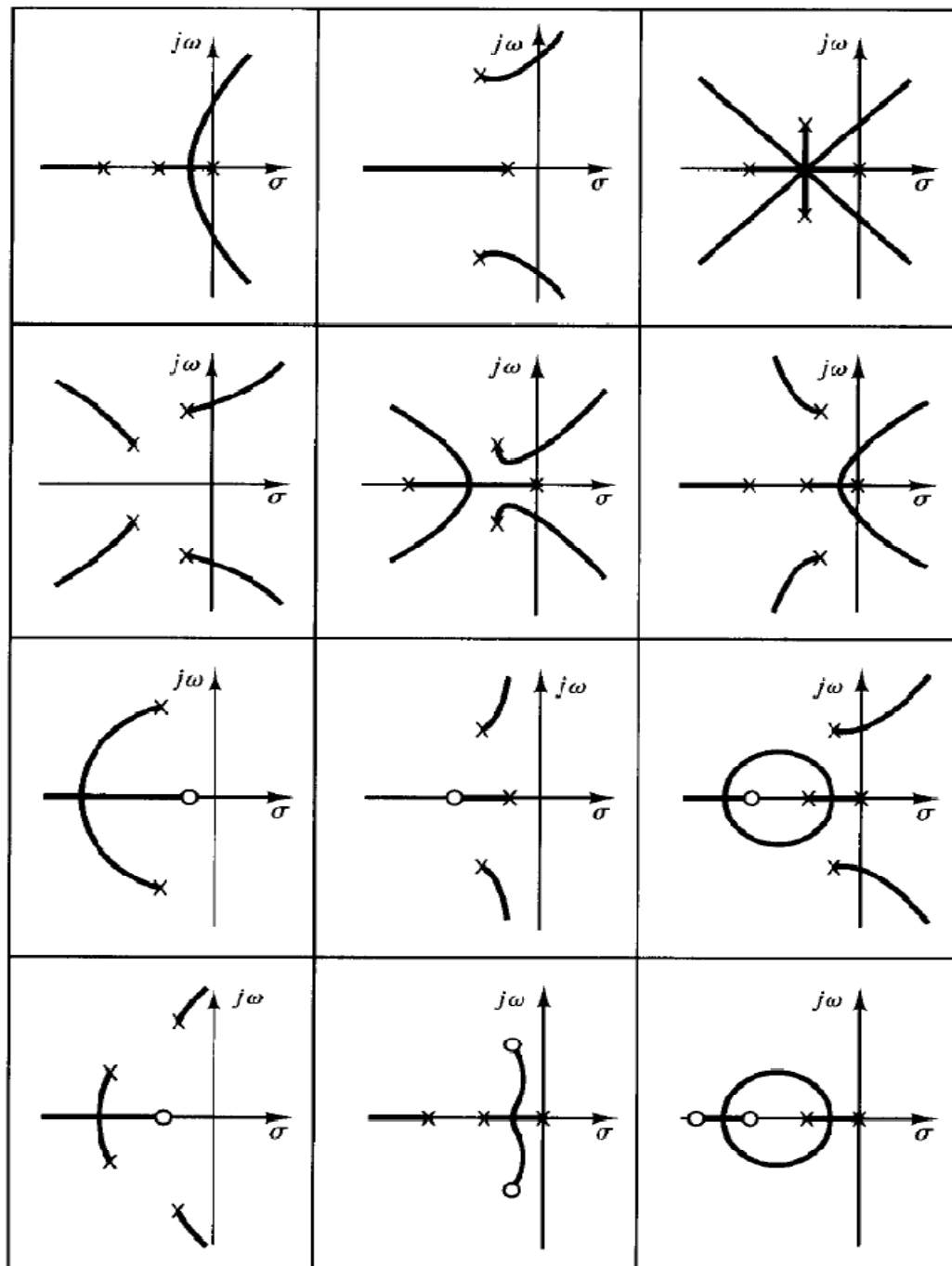
$$K = |s(s+1)|_{s = -\frac{1}{4} + j} = \left| -\frac{1}{4} + j \left(-\frac{1}{4} + j + 1 \right) \right| = 1.2885 \quad (8.13)$$

Karena pole-pole kompleks saling berpasangan maka jika salah satu diantaranya misalnya $s = -\frac{1}{4} + j$ telah diperoleh maka yang lain dapat diperoleh secara otomatis.

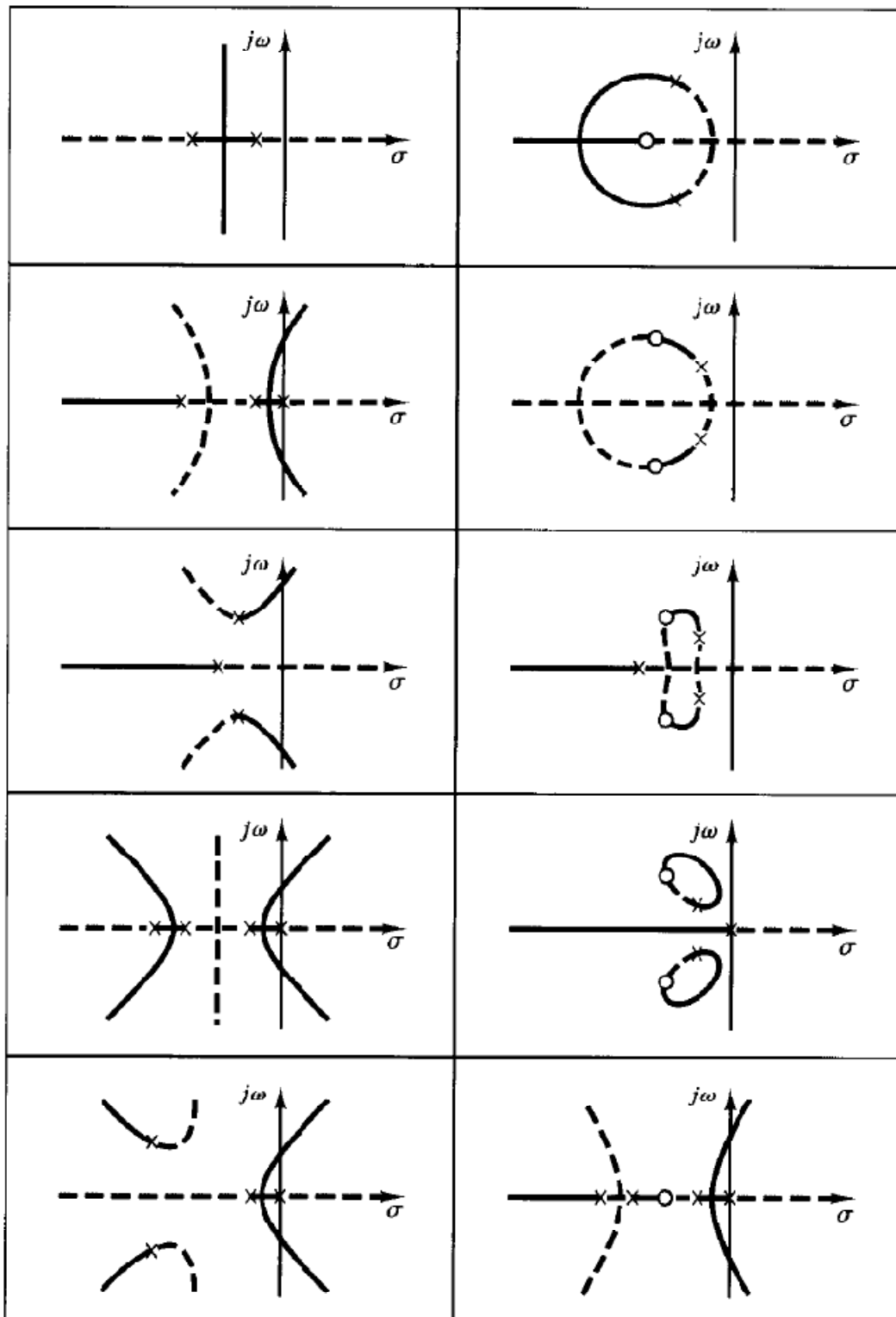
Dalam menghitung harga K dapat digunakan salah satu saja dari pasangan kompleks tersebut. Dari diagram tempat kedudukan akar pada Gambar 8.2 secara jelas terlihat bahwa pengaruh perubahan harga K pada perilaku tanggapan peralihan sistem orde kedua. Kenaikan harga K akan memperkecil rasio redaman ζ sehingga memperbesar lewatan dari respon. Kenaikan harga K juga akan memperbesar frekuensi alamiah

teredam maupun frekuensi alamiah tidak teredam. Berikut ini kumpulan dari beberapa diagram tempat kedudukan akar sederhana

Tabel 8.1 Kumpulan Diagram Tempat Kedudukan Akar



Tabel 8.2 Kumpulan Diagram Tempat Kedudukan Akar Untuk Umpan Balik Positif dan Umpan Balik Negatif



Keterangan : Garis tebal menunjukan umpan balik negatif dan garis putus-putus menunjukan umpan balik positif.

Berikut ini contoh ilustrasi untuk menggambar diagram tempat kedudukan akar. Dalam ilustrasi akan digunakan perhitungan grafis digabung dengan pemeriksaan untuk menentukan tempat kedudukan akar-akar dari persamaan karakteristik sistem lingkaran tertutup. Langkah

pertama dari prosedur penggambaran diagram tempat kedudukan akar adalah mencari tempat kedudukan dari akar-akar yang mungkin dengan menggunakan syarat sudut kemudian tempat kedudukan diberi skalan penguatan dengan menggunakan syarat besar .

Contoh 8.1 Tinjau sistem yang berikut

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \text{ dan } H(s) = 1 \quad (8.14)$$

Buat sketsa diagram tempat kedudukan akar dan kemudian tentukan harga K sedemikian sehingga rasio redaman dari sepasang pole lingkaran tertutup konjugasi kompleks yang berpengaruh adalah 0.5

Jawab :

Untuk sistem yang dinyatakan oleh persamaan (8.14) dimana syarat sudut menjadi

$$\angle \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = -\angle s - \angle s+1 - \angle s+2 = \pm 180^\circ (2k+1) \quad (8.15)$$

Syarat besar

$$|G(s)H(s)| = \left| \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \right| = 1 \quad (8.16)$$

Adapun prosedur dalam membuat sketsa diagram tempat kedudukan akar adalah

1. Tentukan tempat kedudukan akar pada sumbu nyata. Langkah pertama dalam menggambar diagram tempat kedudukan akar adalah meletakkan pole-pole lingkaran terbuka $s=0$ $s=-1$ $s=-2$ pada bidang kompleks. Letak pole-pole lingkaran terbuka akan ditunjukkan dengan tanda silang sedangkan letak-letak zero lingkaran terbuka akan ditunjukkan dengan tanda lingkaran kecil. Perhatikan bahwa titik awal tempat kedudukan akar adalah pole-pole lingkaran terbuka. Banyaknya cabang tempat kedudukan akar untuk sistem ini adalah tiga yaitu sama dengan banyaknya pole lingkaran terbuka. Untuk menentukan tempat kedudukan akar pada sumbu nyata, dipilih suatu titik uji s . Jika titik uji ini terletak pada sumbu nyata positif maka

$$\angle s = \angle s+1 = \angle s+2 = 0^\circ \quad (8.17)$$

Ini menunjukkan bahwa syarat sudut terpenuhi, oleh karena itu tempat kedudukan akar tidak terletak pada sumbu nyata positif. Kemudian pilih suatu titik uji pada sumbu nyata negatif antara 0 dan -1 selanjutnya didapatkan

$$\angle s = 180^\circ, \angle s+1 = \angle s+2 = 0^\circ \quad (8.18)$$

Maka

$$-\angle s - \angle s+1 - \angle s+2 = -180^\circ \quad (8.19)$$

Sehingga syarat sudut terpenuhi oleh karena itu bagian sumbu nyata negatif antara 0 dan -1 merupakan bagian tempat kedudukan akar. Jika suatu titik uji dipilih antara -1 dan -2 maka

$$\angle s = \angle s+1 = 180^\circ \quad (8.20)$$

$$\angle s+2 = 0^\circ \quad (8.21)$$

Pada persamaan (8.20) dan (8.21) terlihat bahwa syarat sudut tidak terpenuhi. Oleh karena itu sumbu nyata negatif dari -1 sampai -2 bukan merupakan bagian dari tempat kedudukan akar. Dengan cara yang sama, jika suatu titik uji diletakkan pada sumbu nyata negatif dari -2 sampai $-\infty$ maka syarat sudut terpenuhi. Jadi tempat kedudukan akar pada sumbu nyata negatif antara 0 dan -1 serta -2 sampai $-\infty$

2. Tentukan asimtot tempat kedudukan akar. Asimtot tempat kedudukan akar jika s mendekati tak terhingga dapat ditentukan sebagai berikut : Jika suatu titik uji s dipilih sangat jauh dari titik asal maka

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{K}{s^3} \quad (8.22)$$

Sehingga syarat sudut menjadi

$$-3\angle s = \angle s + 1 = \pm 180^\circ (2k+1) \text{ dengan } (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (8.23)$$

atau

$$\text{Sudut asimtot : } \frac{\pm 180^\circ (2k+1)}{3} \quad (8.24)$$

Karena sudut tersebut berulang jika k diubah maka sudut-sudut asimtot yang berbeda ditentukan sebagai 60° , -60° dan 180° . Jadi ada tiga asimtot dimana asimtot yang mempunyai sudut 180° adalah sumbu nyata negatif. Selain itu sebelum menggambar asimtot-asimtot ini pada bidang kompleks harus ditentukan titik potong asimtot tersebut pada sumbu nyata dimana persamaan karakteristik sistem adalah

$$\frac{K}{s(s+1)(s+2)} = -1 \quad (8.25)$$

$$s^3 + 3s^2 + 2s = -K \quad (8.26)$$

Jika s dianggap besar maka persamaan karakteristik dapat didekati dengan persamaan

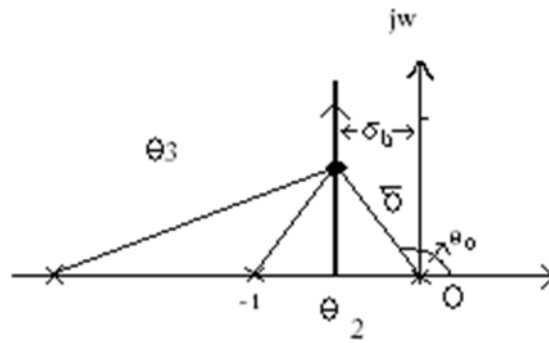
$$(s+1)^3 = 0 \quad (8.27)$$

Absis dari perpotongan asimtot dan sumbu nyata dapat diperoleh dengan menyatakan $s = \sigma_a$ diperoleh

$$\sigma_a = -1 \quad (8.28)$$

Titik asal dari asimtot adalah $(-1, 0)$. Asimtot – asimtot tersebut hampir merupakan bagian dari tempat kedudukan akar di daerah yang sangat jauh dari titik asal.

3. Tentukan titik “breakaway”. Untuk menggambar tempat kedudukan akar dengan teliti harus dicari titik “breakaway” dimana cabang tempat kedudukan akar yang berasal dari pole-pole di 0 dan -1 menjauhi sumbu nyata dan bergerak di dalam bidang kompleks. Titik “breakaway” berkaitan dengan suatu titik pada bidang s yang mempunyai akar persamaan karakteristik rangkap. Titik “breakaway” $(-\sigma_a, 0)$ dapat diperoleh sebagai berikut : tinjau suatu titik uji yang terletak di dekat sumbu nyata negatif antara 0 dan -1 seperti yang ditunjukkan pada Gambar 8.3 berikut



Gambar 8.3 Penentuan Titik “breakway”

Jika jarak vertikal dari titik uji yang diukur dari sumbu nyata negatif dinyatakan dengan δ maka sudut-sudut θ_1 , θ_2 dan θ_3 dari besaran s , $s + 1$ dan $s + 2$ dapat ditulis

$$\theta_1 = 180^\circ - \tan^{-1} \left(\frac{\delta}{\sigma_b} \right) \quad (8.29)$$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \left(\frac{\delta}{-\sigma_b - (-1)} \right) \quad (8.30)$$

$$\theta_3 = \tan^{-1} \left(\frac{\delta}{-\sigma_b - (-2)} \right) \quad (8.31)$$

Untuk harga δ yang kecil diperoleh

$$\theta_1 = 180^\circ - \left(\frac{\delta}{\sigma_b} \right) \quad (8.32)$$

$$\theta_2 = \left(\frac{\delta}{-\sigma_b + 1} \right) \quad (8.33)$$

$$\theta_3 = \left(\frac{\delta}{-\sigma_b + 2} \right) \quad (8.34)$$

Syarat sudut

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 180^\circ \quad (8.35)$$

Menjadi

$$-\left(\frac{\delta}{\sigma_b} \right) + \left(\frac{\delta}{-\sigma_b + 1} \right) + \left(\frac{\delta}{-\sigma_b + 2} \right) = 0^\circ \quad (8.36)$$

Atau

$$\left(\frac{1}{\sigma_b} \right) + \left(\frac{1}{\sigma_b - 1} \right) + \left(\frac{1}{\sigma_b - 2} \right) = 0^\circ \quad (8.37)$$

Dengan menyelesaikan persamaan (8.38) diperoleh

$$3\sigma_b^2 - 6\sigma_b + 2 = 0 \quad (8.38)$$

Serta menghasilkan

$$\sigma_b = 0.4230 \quad (8.39)$$

$$\sigma_b = 1.5770 \quad (8.40)$$

Karena $0 > -\sigma_b > -1$ maka titik “breakaway” haruslah $(-0.4230, 0)$. Jika banyaknya suku pada persamaan (8.37) ada empat atau lebih maka untuk mencari harga σ_b dapat digunakan pendekatan coba – coba. Pendekatan ini dapat dipermudah jika dicari suatu harga pendekatan dari σ_b dengan mengabaikan pole dan zero yang terletak jauh dari titik “breakaway” kemudian memberikan koreksi kecil pada harga σ_b pendekatan ini.

4. Tentukan titik potong tempat kedudukan akar dengan sumbu khayal. Titik-titik ini dapat diperoleh dari kriteria kestabilan Routh. Adapun persamaan karakteristik sistem

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0 \quad (8.41)$$

Disusun menjadi

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K \\ s^1 & \frac{6-K}{3} & \\ s^0 & K & \end{array} \quad (8.42)$$

Harga K yang membuat koefisien dari s^1 pada kolom pertama sama dengan nol adalah $K = 6$. Titik potong pada sumbu khayal selanjutnya dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan pembantu yang diperoleh dari baris s^2 yakni

$$3s^2 + K = 3s^2 + 6 = 0 \quad (8.43)$$

Menghasilkan

$$s = \pm j\sqrt{2} \quad (8.44)$$

Jadi frekuensi pada titik potong dengan sumbu khayal adalah $\omega = \pm\sqrt{2}$. Harga penguatan pada titik potong ini adalah $K = 6$. Cara lain untuk mencari titik potong tempat kedudukan akar dengan sumbu khayal adalah dengan memasukkan $s = j\omega$ pada persamaan karakteristik. Menyamakan bagian nyata maupun bagian khayal dengan nol kemudian mencari mencari ω dan K . Untuk sistem yang sedang ditinjau, persamaan karakteristik dengan $s = j\omega$ adalah

$$(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 2(j\omega) + K = 0 \quad (8.45)$$

Atau

$$(K - 3\omega^3) + j(2\omega - \omega^3) = 0 \quad (8.46)$$

Dengan menyamakan baik bagian nyata maupun bagian khayal persamaan (8.46) sama dengan nol diperoleh :

$$K - 3\omega^3 = 0 \quad (8.47)$$

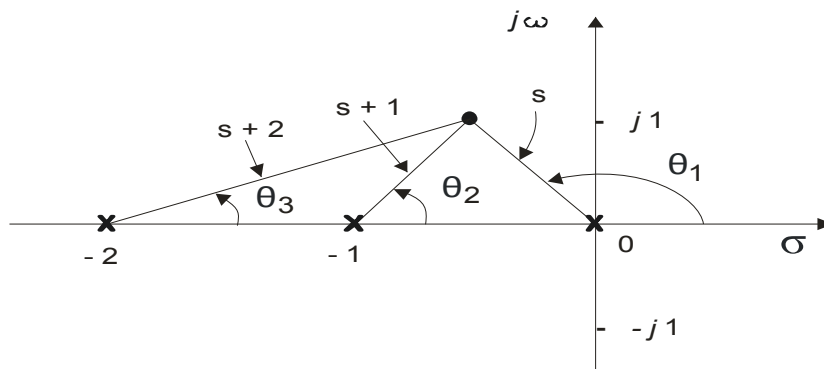
$$2\omega - \omega^3 = 0 \quad (8.48)$$

Sehingga akhirnya diperoleh

$$\omega = \pm\sqrt{2} \quad \text{dan} \quad K = 6 \quad (8.49)$$

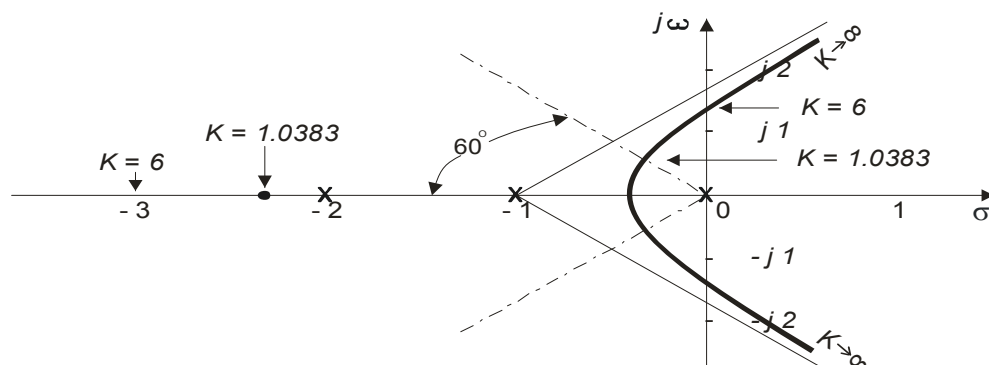
Jadi tempat kedudukan akar-akar memotong sumbu khayal di $\omega = \pm\sqrt{2}$ dan harga K pada titik potong ini adalah 6

5. Pilih suatu titik uji yang cukup jauh dari sumbu $s = j\omega$ dan titik asal seperti yang ditunjukkan pada Gambar 8.4 kemudian terapkan syarat sudut. Jika suatu titik uji terletak pada tempat kedudukan maka jumlah tiga sudut $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ harus sama dengan 180° . Jika titik uji tersebut tidak memenuhi syarat sudut, pilih titik uji yang lain sampai memenuhi syarat tersebut. (Jumlah sudut pada titik uji akan menunjukkan arah pergerakan titik uji). Lanjutkan proses ini dan letakkan titik-titik secukupnya yang memenuhi syarat sudut.



Gambar 8.4 Penggambaran Tempat Kedudukan Akar

6. Berdasarkan informasi yang diperoleh pada langkah diatas, gambarlah diagram tempat kedudukan akar lengkap seperti ditunjukkan pada Gambar 8.5 berikut



Gambar 8.5 Diagram Tempat Kedudukan Akar

7. Tentukan sepasang pole lingkaran tertutup konjugasi kompleks dominan sedemikian rupa sehingga rasio redaman ζ sama dengan 0.5. Pole lingkaran tertutup dengan $\zeta = 0.5$ terletak pada garis yang melalui titik asal dan membentuk sudut

$\beta = \pm \cos^{-1} \zeta = \pm \cos^{-1}(0.5) = \pm 60^\circ$ dengan sumbu khayal negatif. Pada Gambar 8.5, pole lingkaran tertutup yang mempunyai $\zeta = 0.5$ diperoleh

$$s_1 = -0.33 + j0.58 \quad \text{dan} \quad s_2 = -0.33 - j0.58 \quad (8.50)$$

Harga K yang menghasilkan pole-pole tersebut diperoleh dari syarat besar

$$K = \left| s(s+1)(s+2) \right|_{s=-0.33+j0.58} = 1.06 \quad (8.51)$$

Dengan menggunakan harga K ini pole ketiga diperoleh $s_3 = -2.33$. Dengan demikian dari langkah 4 dapat dilihat bahwa untuk $K = 6$ pole-pole lingkaran tertutup dominan terletak pada sumbu khayal yaitu $s = \pm j\sqrt{2}$. Dengan harga K ini sistem akan berosilasi terus-menerus. Untuk $K > 6$ pole lingkaran tertutup dominan terletak di sebelah kanan sumbu khayal bidang s sehingga sistem menjadi tidak stabil. Akhirnya jika diperlukan tempat kedudukan akar secara mudah dapat diberi skala dalam bentuk K dengan menggunakan syarat besar. Hanya ditentukan suatu titik pada tempat kedudukan akar kemudian mengukur besar dari tiga besaran kompleks s , $s+1$ dan $s+2$, mengalikannya dan menyamakan hasil perkalian ini dengan harga penguatan K pada titik tersebut atau

$$|s||s+1||s+2| = K \quad (8.52)$$

8.3 Ringkasan Aturan Umum Untuk Menggambarkan Tempat Kedudukan Akar

Aturan dan prosedur umum untuk menggambar tempat kedudukan akar dari sistem yang ditunjukkan pada Gambar 8.1 adalah

1. Tentukanlah cari persamaan karakteristik sistem

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad (8.53)$$

dan susun kembali persamaan ini sehingga parameter yang diinginkan tampak sebagai faktor pengali dalam bentuk

$$1 + \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\dots+(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots+(s+p_m)} = 0 \quad (8.54)$$

Pada pembahasan ini, dianggap bahwa parameter yang ingin ditinjau adalah penguatan K dimana $K > 0$. Dari fungsi alih lingkaran terbuka dalam bentuk perkalian faktor-faktornya, letakkan pole dan zero lingkaran terbuka pada bidang s .

2. Carilah titik awal dan titik akhir dari tempat kedudukan akar dan carilah juga banyaknya cabang tempat kedudukan akar. Titik-titik pada tempat kedudukan untuk $K=0$ adalah pole-pole lingkaran terbuka. Ini dapat dilihat dari syarat sudut dengan memasukkan harga K mendekati nol atau

$$\lim_{K \rightarrow 0} \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\dots+(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots+(s+p_m)} = \lim_{K \rightarrow 0} \frac{1}{K} = \infty \quad (8.55)$$

Persamaan terakhir ini secara tidak langsung menunjukkan bahwa harga s harus mendekati salah satu pole lingkaran terbuka. Setiap tempat kedudukan akar dimulai dari

suatu pole fungsi alih lingkaran terbuka $G(s)H(s)$. Jika K diperbesar hingga mendekati tak terhingga maka setiap tempat kedudukan akar akan menuju ke suatu zero fungsi alih lingkaran terbuka atau menuju tak terhingga pada bidang kompleks. Ini dapat dilihat sebagai berikut jika dimasukkan K mendekati tak terhingga pada syarat besar maka

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_m)} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} = 0 \quad (8.56)$$

Oleh karena itu harga s harus mendekati salah satu zero lingkaran terbuka atau suatu zero lingkaran terbuka di tak terhingga. Diagram tempat kedudukan akar mempunyai cabang sebanyak akar persamaan karakteristiknya karena banyaknya pole lingkaran terbuka biasanya lebih besar dari zeronya maka banyaknya cabang sama dengan banyaknya pole. Jika banyaknya pole lingkaran tertutup sama dengan banyaknya pole lingkaran terbuka maka banyaknya cabang tempat kedudukan akar yang berakhir di zero lingkaran terbuka yang besarnya terhingga sama dengan banyaknya m zero lingkaran terbuka. $n - m$ cabang lainnya berakhir di tak terhingga sepanjang asimtotnya.

3. Tentukan tempat kedudukan akar pada sumbu nyata. Tempat kedudukan akar pada sumbu nyata ditentukan oleh pole dan zero lingkaran terbuka yang terletak pada sumbu nyata. Pole dan zero konjugasi kompleks fungsi alih lingkaran terbuka tidak berpengaruh pada letak tempat kedudukan akar pada sumbu nyata karena kontribusi sudut dari sepasang pole atau zero konjugasi kompleks pada sumbu nyata adalah 360° . Setiap bagian tempat kedudukan akar pada sumbu nyata mempunyai daerah dari suatu pole atau zero ke pole atau zero lain. Dalam menggambar tempat kedudukan akar pada sumbu nyata, pilih suatu titik uji padanya, jika jumlah total banyaknya pole dan zero di sebelah kanan titik uji ini ganjil maka titik ini terletak pada tempat kedudukan akar. Tempat kedudukan akar dan komplemennya membentuk segmen-segmen yang bergantian pada sumbu nyata.

4. Tentukan asimtot- asimtot tempat kedudukan akar. Jika titik uji s terletak jauh dari titik asal maka sudut setiap besaran kompleks dapat dianggap sama. Selanjutnya satu zero lingkaran terbuka dan satu pole lingkaran terbuka saling menghilangkan. Oleh karena itu, tempat kedudukan akar untuk harga s yang sangat besar harus menuju ke garis asimtot yang mempunyai sudut (kemiringan) sebagai berikut

$$\text{Sudut asimtot : } \frac{\pm 180(2k+1)}{n-m} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (8.57)$$

Dimana

n : Banyaknya pole terhingga dari $G(s)H(s)$

m : Banyaknya zero terhingga dari $G(s)H(s)$

Disini $k=0$ merupakan asimtot dengan sudut terkecil terhadap sumbu nyata. Walaupun k dapat mempunyai tak terhingga harga, jika k membesar akan tetapi sudut asimtot kemudian akan berulang sehingga banyaknya asimtot yang berbeda adalah $n - m$. Semua asimtot berpotongan pada sumbu nyata. Titik potong ini dapat diperoleh jika pembilang maupun penyebut fungsi alih lingkaran terbuka diuraikan maka hasilnya adalah

$$G(s)H(s) = \frac{K[s^m + (z_1 + z_2 + \dots + z_m)s^{m-1} + \dots + z_1 z_2 \dots z_m]}{s^n + (p_1 + p_2 + \dots + p_n)s^{n-1} + \dots + p_1 p_2 \dots p_n} \quad (8.58)$$

Jika suatu titi uji terletak sangat jauh dari titik asal maka $G(s)H(s)$ dapat ditulis

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^{n-m} + [(p_1 + p_2 + \dots + p_n) - (z_1 + z_2 + \dots + z_n)]s^{n-m-1} + \dots} \quad (8.59)$$

Karena persamaan karakteristik adalah

$$G(s)H(s) = -1 \quad (8.60)$$

Maka persamaan (8.60) dapat ditulis menjadi

$$s^{n-m} + [(p_1 + p_2 + \dots + p_n) - (z_1 + z_2 + \dots + z_n)]s^{n-m-1} + \dots = -K \quad (8.61)$$

Untuk harga s yang besar persamaan (8.60) dapat didekati dengan

$$\left[s + \frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_n) - (z_1 + z_2 + \dots + z_n)}{n - m} \right]^{n-m} = 0 \quad (8.62)$$

Jika absis titik potong antara asimtot dengan sumbu nyata dinyatakan dengan

$$-\sigma_a = -\frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_n) - (z_1 + z_2 + \dots + z_n)}{n - m} \quad (8.63)$$

Karena semua pole dan zero kompleks selalu dalam pasangan konjugasi maka $-\sigma_a$ selalu merupakan besaran nyata. Setelah diperoleh titik potong asimtot dengan sumbu nyata maka diagram tempat kedudukan akar telah siap digunakan.

5. Tentukan titik “breakaway” dan “break-in”. Karena simetri konjugasi dari tempat kedudukan akar, maka titik-titik “breakaway” dan titik-titik “break-in” mungkin terletak pada sumbu nyata atau bisa juga merupakan pasangan konjugasi kompleks. Jika suatu tempat kedudukan akar terletak di antara dua pole lingkaran terbuka yang berbatasan pada sumbu nyata maka paling tidak terdapat satu titik “breakaway” diantara dua pole tersebut. Dengan cara yang sama, jika tempat kedudukan akar terletak diantara dua zero yang berbatasan pada sumbu nyata maka paling tidak selalu terdapat satu “break-in” diantara kedua zero tersebut. Jika tempat kedudukan akar terletak di antara suatu pole lingkaran terbuka dan suatu zero lingkaran terbuka pada sumbu nyata maka mungkin tidak terdapat titik “breakway” atau “break-in” atau baik titik “breakway” maupun titik “break in” keduanya ada. Jika persamaan karakteristik dinyatakan oleh

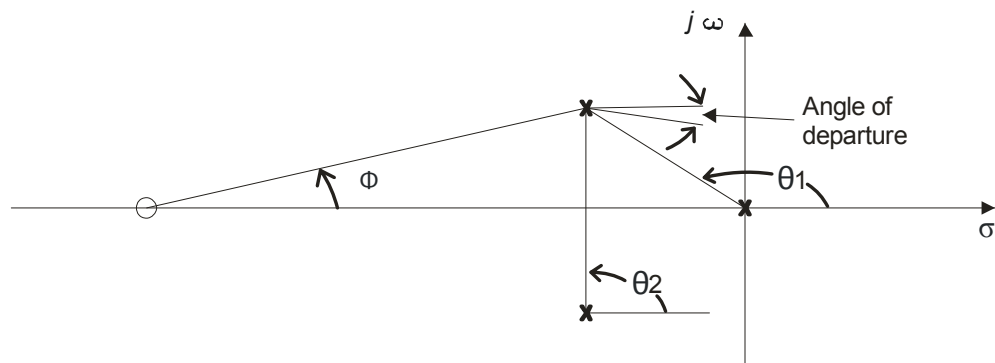
$$A(s) + KB(s) = 0 \quad (8.64)$$

Maka titik “breakway” dan titik “break-in” dapat ditentukan dari akar-akar

$$\frac{dK}{ds} = \frac{A'(s)B(s) - A(s)B'(s)}{B^2(s)} = 0 \quad (8.65)$$

Dimana ini merupakan salah satu cara yang berdasarkan pada diferensiasi terhadap s . Jika harga K yang diperoleh dari akar $s = s_1$ yang memenuhi $\frac{dK}{ds} = 0$ adalah positif, maka titik $s = s_1$ adalah titik “breakway” atau “break-in” tetapi jika harga K yang diperoleh dari akar $s = s_1$ yang memenuhi $\frac{dK}{ds} = 0$ adalah negatif maka titik $s = s_1$ bukan merupakan titik “breakway” atau “break-in”.

6. Carilah sudut berangkat (atau sudut datang) tempat kedudukan akar dari pole-pole kompleks. Untuk membuat sketsa tempat kedudukan akar dengan ketelitian yang layak harus dicari arah tempat kedudukan akar di dekat pole atau zero kompleks. Jika dipilih suatu titik uji dan digerakkan di sekitar pole kompleks (atau zero kompleks) maka jumlah kontribusi sudut dari pole dan zero yang lain dapat dianggap tetap sama. Oleh karena itu, sudut berangkat (atau sudut datang) tempat kedudukan akar dari suatu pole kompleks (atau pada suatu zero kompleks) dapat diperoleh dengan mengurangi 180° dengan jumlah sudut semua besaran kompleks dari semua pole dan zero yang lain ke pole kompleks (atau zero kompleks) yang ditanyakan dengan menggunakan tanda yang sesuai. Sudut berangkat ini ditunjukkan pada Gambar 8.6 berikut



Gambar 8.6 Cara Menggambar Tempat Kedudukan Akar

7. Carilah titik potong tempat kedudukan akar dengan sumbu khayal. Titik potong ini dapat diperoleh secara mudah dengan menggunakan kriteria kestabilan Routh, dengan pendekatan coba-coba atau dengan substitusi $s = j\omega$ pada persamaan karakteristik kemudian menyamakan baik bagian nyata maupun bagian khayal dengan nol dan akhirnya mencari ω dan K . Jadi harga ω yang diperoleh akan memberikan informasi mengenai frekuensi pada saat tempat kedudukan akar memotong sumbu khayal dan mengenai harga K yang merupakan penguatan kritis kestabilan

8. Persamaan karakteristik sistem yang mempunyai fungsi alih lingkaran terbuka

$$G(s)H(s) = \frac{K[s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_m]}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n} \quad \text{untuk } n \geq m \quad (8.66)$$

Adalah persamaan aljabar derajat n dalam s . Jika orde pembilang dari $G(s)H(s)$ lebih rendah dari 2 atau lebih maka koefisien a_1 merupakan penjumlahan negatif dari akar-akar persamaan dan tidak tergantung pada K . Pada kasus ini, jika beberapa akar pada tempat kedudukan bergerak ke arah kiri dengan membesarnya K maka akar-akar yang lain harus bergerak ke arah kanan dengan membesarnya K . Informasi ini berguna dalam mencari bentuk umum tempat kedudukan akar.

9. Tentukan tempat kedudukan akar di dekat sumbu $j\omega$ dan titik asal. Bagian yang paling penting dari tempat kedudukan akar tidak terletak pada sumbu nyata ataupun asimtotnya tetapi terletak di dekat sumbu $j\omega$ dan titik asal. Bentuk tempat kedudukan akar yang terletak pada daerah yang penting ini harus diperoleh dengan ketelitian yang cukup baik .

8.4 Rangkuman

Setiap titik pada tempat kedudukan akar merupakan suatu kemungkinan pole lingkaran tertutup . suatu titik pada tempat kedudukan akar akan merupakan suatu pole lingkaran tertutup jika harga K memenuhi syarat besar. Jadi syarat besar memungkinkan untuk menentukan harga penguatan K di setiap letak akar pada tempat kedudukan. Setelah pole lingkaran tertutup dominan diperoleh dengan metoda tempat kedudukan akar maka pole lingkaran tertutup sisanya dapat diperoleh dengan membagi persamaan karakteristik dengan faktor yang mengandung pole-pole lingkaran tertutup dominan tersebut. Faktor-faktor hasil pembagian ini mengandung pole lingkaran tertutup tidak dominan.