

# MATEMATIKA DALAM TEKNIK KENDALI

## 1.1 Matrik

Matrik adalah set bilangan nyata atau bilangan kompleks yang disusun dalam baris dan kolom sehingga membentuk jajaran persegi panjang. Suatu matrik yang memiliki  $m$  baris dan  $n$  kolom disebut matriks  $m \times n$  dan disebut juga sebagai matrik yang memiliki orde  $m \times n$ . Perintah Matlab berikut untuk representasi matrik yang berorde  $3 \times 3$  dengan elemen-elemen bernilai real dan matrik yang berorde  $2 \times 2$  dengan elemen-elemen bernilai kompleks berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$B = \begin{bmatrix} -5x & \log(2x) + 7\sin(3y) \\ 3i & 4 - 2i \end{bmatrix} \quad (2)$$

Adapun kode Matlab untuk persamaan (1) dan (2) adalah

```
clc
clear all
close all
% Matrik A Dengan Elemen-Elemen Matrik Bernilai Real
disp('Matrik A')
A = [ 1 2 3; 4 5 6; 2 4 3]
% Matrik B Dengan Elemen-Elemen Matrik Bernilai Komplek
disp('Matrik B ')
syms x y
B = [ -5*x    log(2*x)+ 7*sin(3*y); 3*i    4 - 2*i]
```

Hasil Program

Matrik A

```
A =
     1     2     3
     4     5     6
     2     4     3
```

Matrik B

```
B =
```

$$\begin{bmatrix} -5*x, \log(2*x) + 7*\sin(3*y) \\ 3*i, 4 - 2*i \end{bmatrix}$$

Untuk vektor baris pada persamaan (3) dan (4) berikut

$$A = [1 \ 2 \ 3 \ 4] \quad (3)$$

$$B = [1 \ 2i \ 3+5i \ 4] \quad (4)$$

Untuk vektor kolom pada persamaan (5) dan (6) berikut

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \\ 3+5i \\ 4 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Adapun kode Matlab untuk membentuk vektor baris dan vektor kolom adalah

```
clc
clear all
close all
% Vektor Baris
disp('Vektor Baris')
A = [ 1  2 3 4]
B = [ i  2*i 3+5*i  4]
%
disp('Vektor Kolom')
C = [ 1; 2; 3; 4]
D = [ i;  2*i; 3+5*i;  4]
```

Hasil program

Vektor Baris

```
A =
    1         2         3         4
B =
    1.0000    0 + 2.0000i    3.0000 + 5.0000i    4.0000
```

Vektor Kolom

```
C =
    1
    2
    3
```

$$D = \begin{bmatrix} 4 \\ 1.0000 \\ 0 + 2.0000i \\ 3.0000 + 5.0000i \\ 4.0000 \end{bmatrix}$$

### 1.1.1 Penjumlahan Matrik

Penjumlahan untuk matrik A dan matrik B pada persamaan (7) dan (8) berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Diperoleh hasil penjumlahan pada persamaan (9) berikut

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Adapun kode Matlab untuk melakukan penjumlahan matrik adalah

```
clc
clear all
close all
%
disp('Matrik A')
A = [1 2 3; 2 1 1; 3 2 1]
disp('Matrik B')
B = [1 4 1; 1 2 2; 4 2 2]
%
disp('Penjumlahan Matrik')
C = A + B
```

Hasil program

Matrik A

```
A =
     1     2     3
     2     1     1
     3     2     1
```

Matrik B

B =

1	4	1
1	2	2
4	2	2

Penjumlahan Matrik

C =

2	6	4
3	3	3
7	4	3

### 1.1.2 Perkalian Matrik

Perkalian untuk matrik A dan matrik B pada persamaan (10) dan (11) adalah

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Diperoleh hasil perkalian pada persamaan (12) berikut

$$C = AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 14 & 11 \\ 7 & 12 & 6 \\ 9 & 18 & 9 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Kode Matlab untuk melakukan perkalian matrik adalah

```
clc
clear all
close all
%
disp('Matrik A')
A = [1 2 3; 2 1 1; 3 2 1]
disp('Matrik B')
B = [1 4 1; 1 2 2; 4 2 2]
%
disp('Perkalian Matrik')
C = A * B
```

Hasil program

Matrik A

A =

1	2	3
2	1	1
3	2	1

Matrik B

B =

1	4	1
1	2	2
4	2	2

Perkalian Matrik

C =

15	14	11
7	12	6
9	18	9

Perkalian matrik dengan bilangan skalar pada persamaan (13) s/d (15) berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$B = 2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$C = 2A - 1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Kode Matlab untuk melakukan perkalian matrik dengan bilangan skalar adalah

```
clc
clear all
close all
%
disp('Matrik A')
A = [1 2 3; 2 1 1; 3 2 1]
%
disp('Perkalian Matrik Dengan Skalar')
B = 2 * A
C = (2 * A) - 1
```

Hasil program  
Matrik A

A =

1	2	3
2	1	1
3	2	1

Perkalian Matrik Dengan Skalar

B =

2	4	6
4	2	2
6	4	2

C =

1	3	5
3	1	1
5	3	1

### 1.1.3 Transpose Matrik

Matrik A dengan elemen-elemen pada persamaan (16) berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 11 \\ 3 & 2 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Menghasilkan transpose matrik A pada persamaan (17) berikut

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 11 & -5 & 5 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Kode Matlab untuk untuk melakukan transpose matrik adalah

```
clc
clear all
close all
% Matrik A
disp('Matrik A')
A = [1 2 3 3; 2 1 1 11; 3 2 1 -5; 2 1 2 5]
%
disp('Transpose Matrik A')
A_Transpose = A'
```

Hasil program

Matrik A

A =

1	2	3	3
---	---	---	---

2	1	1	11
3	2	1	-5
2	1	2	5

Transpose Matrik A

A\_Transpose =

1	2	3	2
2	1	2	1
3	1	1	2
3	11	-5	

#### 1.1.4 Rank Matrik

Matrik A dengan elemen-elemen pada persamaan (18) berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Diperoleh rank matrik pada persamaan (19) berikut

$$\text{Rank } A = 3 \quad (19)$$

Kode Matlab untuk menghitung rank matrik adalah

```
clc
clear all
close all
%
disp('Matrik A')
A = [1 2 3; 2 1 1; 3 2 1]
%
disp('Hitung Rank Matrik A')
B = rank(A)
```

Hasil program

Matrik A

A =

1	2	3
2	1	1
3	2	1

Hitung Rank Matrik A

B =

3

### 1.1.5 Matrik Invers

Matrik A dengan elemen-elemen pada persamaan (20) berikut

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -3 \\ 2 & 8 & -4 \\ 2 & 5 & 10 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Diperoleh invers matrik A dengan hasil pada persamaan (21) berikut

$$B = \begin{bmatrix} 0.4000 & -0.3000 & 0.0000 \\ -0.1120 & 0.1840 & 0.0400 \\ -0.0240 & -0.0320 & 0.0800 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Kode Matlab untuk menghitung invers matrik adalah

```
clc
clear all
close all
% Matrik a Dimensi 3 x 3
A = [4 6 -3; 2 8 -4; 2 5 10]
disp('Invers Matrik B : ')
B = inv(A)
```

Hasil program

```
A =
     4     6    -3
     2     8    -4
     2     5    10
```

Invers Matrik B :

```
B =
    0.4000   -0.3000   -0.0000
   -0.1120    0.1840    0.0400
   -0.0240   -0.0320    0.0800
```

### 1.1.6 Determinan Matrik

Matrik B dengan elemen-elemen pada persamaan (22) berikut

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -3 \\ 2 & 8 & -4 \\ 2 & 5 & 10 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Determinan matrik B pada persamaan (23) berikut

$$\text{Det B} = -1.0000 \quad (23)$$



Kode Matlab untuk menghitung determinan matrik adalah

```
clc
clear all
close all
% Matrik B Dimensi 3 x 3
B = [2 3 -2; 1 4 -2; 2 10 -5]
%
disp('Nilai Determinan Matrik C : ')
C = det(B)
```

Hasil program

```
B =
     2     3    -2
     1     4    -2
     2    10    -5
```

```
Nilai Determinan Matrik B :
C =
    -1.0000
```

### 1.1.7 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Matrik B dengan elemen-elemen pada persamaan (24) berikut

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 10 & -5 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Diperoleh nilai Eigen dari matriks B pada persamaan (25) s/d (27) berikut

$$\lambda_1 = -1 \quad (25)$$

$$\lambda_2 = 1 \quad (26)$$

$$\lambda_3 = 1 \quad (27)$$

Vektor Eigen dari matrik B pada persamaan (28) berikut

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Kode Matlab untuk menghitung nilai Eigen dan vektor Eigen adalah

```
clc
clear all
close all
%
A = [2 3 -2; 1 4 -2; 2 10 -5]
```

```
[v,d] =eig(A)
```

Hasil program

A =

2	3	-2
1	4	-2
2	10	-5

v =

-0.4082	0.4082	0.3015
-0.4082	0.4082	0.3015
-0.8165	0.8165	0.9045

d =

1.0000	0	0
0	1.0000	0
0	0	-1.0000