

MATEMATIKA DALAM TEKNIK KENDALI

1. Persamaan Linear Diferensial

Suatu persamaan yang mengandung satu atau beberapa turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui disebut persamaan diferensial. Khususnya, suatu persamaan yang berbentuk pada persamaan (1) berikut

$$F(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

Dimana $y^{(k)}$ menyatakan turunan y terhadap t yang ke- k . Persamaan (2) disebut persamaan diferensial biasa tingkat n . Contoh-contoh persamaan diferensial tingkat 1, 2 dan 3 pada persamaan (2) s/d (4) berikut

$$\frac{dy}{dt} + 2 \sin t = 0 \quad (2)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3t \frac{dy}{dt} - 2y = 0 \quad (3)$$

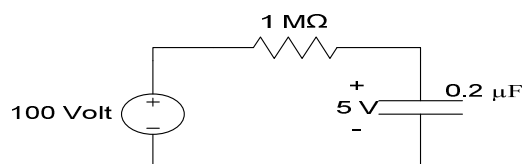
$$\frac{d^3y}{dt^3} + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 - e^t = 0 \quad (4)$$

Adapun persamaan linear diferensial yang digunakan adalah persamaan yang berbentuk pada persamaan (5) berikut

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = k(t) \quad (5)$$

2. Contoh Soal

Contoh 1. : Sebuah rangkaian RC pada Gambar 1. berikut



Gambar 1. Rangkaian RC

Dengan

$$R = 1 \text{ M}\Omega$$

$$C = 0.2 \text{ }\mu\text{f}$$

$$E = 100 \text{ volt}$$

$$V(0) = 5 \text{ volt}$$

Jawab :

Persamaan linear diferensial untuk rangkaian RC pada Gambar 1. adalah

$$Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i \, dt = E \quad (6)$$

$$RC \frac{dV}{dt} + V = E \quad (7)$$

Dengan memasukkan nilai-nilai yang diketahui ke persamaan (7) diperoleh persamaan (8) dan (9) berikut

$$0.2 \frac{dV}{dt} + V = 100 \quad (8)$$

$$\frac{dV}{dt} + 5V = 500 \quad (9)$$

Persamaan (9) dapat diselesaikan dengan menggunakan Matlab dalam representasi berikut

```
clc
clear all
close all
%
V = dsolve('Dv = -5*v + 500', 'v(0)=5')
```

Hasil program

```
V =
100-95*exp(-5*t)
```

Contoh 2. : Tentukan penyelesaian umum dari persamaan (10) berikut

$$y'' + 7y' + 12y = 0 \quad (10)$$

Persamaan (10) dapat diselesaikan dengan menggunakan Matlab dalam bentuk representasi berikut

```
clc
clear all
close all
```

```
%
y = dsolve('D2y = -7*Dy - 12*y')
```

Hasil program

```
y =
C1*exp(-4*t)+C2*exp(-3*t)
```

Contoh 1.3 : Tentukan penyelesaian umum dari persamaan (11) berikut

$$y'' - 6y' + 9y = 0 \quad (11)$$

Persamaan (11) dapat diselesaikan dengan menggunakan Matlab dalam bentuk representasi berikut

```
clc
clear all
close all
%
y = dsolve('D2y = 6*Dy - 9*y')
```

Hasil program

```
y =
C1*exp(3*t)+C2*exp(3*t)*t
```

Contoh 1.4 : Tentukan penyelesaian umum dari persamaan (12) berikut

$$y'' - 4y' + 13y = 0 \quad (12)$$

Persamaan (12) dapat diselesaikan dengan menggunakan Matlab dalam bentuk representasi berikut

```
clc
clear all
close all
%
y = dsolve('D2y = 4*Dy - 13*y')
```

Hasil program

```
y =
C1*exp(2*t)*sin(3*t)+C2*exp(2*t)*cos(3*t)
```

Contoh 1.5 : Tentukan penyelesaian umum dari persamaan (13) berikut

$$y''' - y'' - 20y' = 0 \quad (13)$$

Persamaan (13) dapat diselesaikan dengan menggunakan Matlab dalam bentuk representasi berikut

```
clc
clear all
```

```
close all
%
y = dsolve('D4y = D3y + 20*D2y')
```

Hasil program

```
y =
C1+C2*t+C3*exp(-4*t)+C4*exp(5*t)
```

Contoh 1.6 : Selesaikan persamaan (14) berikut

$$y'' + y' - 2y = 2t^2 - 10t + 3 \quad (14)$$

Persamaan (14) dapat diselesaikan dengan menggunakan Matlab dalam bentuk representasi berikut

```
clc
clear all
close all
%
y = dsolve('D2y = -Dy + 2*y + 2*t^2 -10*t + 3')
```

Hasil program

```
y =
exp(-2*t)*C2+exp(t)*C1-1/2+4*t-t^2
```

Contoh 1.7 : Selesaikan persamaan (15) berikut

$$y'' - 2y' - 3y = 8e^{3t} \quad (15)$$

Persamaan (15) dapat diselesaikan dengan menggunakan Matlab dalam bentuk representasi berikut

```
clc
clear all
close all
%
y = dsolve('D2y = 2*Dy + 3*y + 8*exp(3*t)')
```

Hasil program

```
y =
exp(-t)*C2+exp(3*t)*C1+2*t*exp(3*t)
```

Contoh 1.8 : Dengan menggunakan Matlab, selesaikan persamaan (16) berikut

$$y'' - 2y' - 3y = \cos 2t \quad (16)$$

dengan kondisi awal: $y(0) = 0$ dan $\frac{dy}{dt}(0) = 0$.

Persamaan (16) dapat diselesaikan dengan menggunakan Matlab dalam bentuk representasi berikut

```
clc
clear all
close all
%
y =
dsolve('D2y = 2*Dy+3*y cos(2*t)', 'y(0)=0', 'Dy(0)=0')
```

Hasil program

```
y =
1/20*exp(-t)+3/52*exp(3*t)-7/65*cos(2*t)-4/65*sin(2*t)
```