

MATEMATIKA DALAM TEKNIK KENDALI

1. Transformasi Laplace

Transformasi Laplace adalah suatu metoda operasional yang dapat digunakan secara mudah untuk menyelesaikan persamaan linier diferensial. Dengan menggunakan transformasi Laplace, dapat dirubah beberapa fungsi umum seperti fungsi sinusoida, fungsi sinusoida teredam dan fungsi eksponensial menjadi fungsi-fungsi aljabar kompleks. Kelebihan metoda transformasi Laplace adalah metoda ini memungkinkan penggunaan teknik grafis untuk memperkirakan performansi sistem tanpa menyelesaikan persamaan diferensial sistem. Kelebihan lain metoda transformasi Laplace adalah diperolehnya secara serentak baik komponen peralihan maupun komponen keadaan mantap solusi persamaan diferensial.

Tranformasi Laplace dari $f(t)$ didefinisikan oleh

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (1)$$

Tabel 1.2 Pasangan – Pasangan Transformasi Laplace

NO	$f(t)$	$F(s)$
1	impulsa satuan $\delta(t)$	1
2	Tangga satuan $1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
6	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
7	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

8	$t^n \ (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
9	$t^n e^{-at} \ (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	$\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
11	$\frac{1}{b-a} (be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
12	$\frac{1}{ab} \left[1 + \frac{1}{a-b} (be^{-bt} - ae^{-at}) \right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
13	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
14	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
15	$\frac{1}{a^2} [at - 1 + e^{-at}]$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$

Fungsi Matlab untuk menghitung transformasi Laplace ini adalah

```
L = laplace(F)
L = laplace(F, t)
L = laplace(F, w, z)
```

Sedangkan fungsi Matlab untuk menghitung transformasi Laplace balik adalah

```
F = ilaplace(L)
F = ilaplace(L, y)
F = ilaplace(L, y, x)
```

Contoh 1. : Dengan menggunakan Matlab, tentukan transformasi Laplace untuk fungsi $f(t)$ pada persamaan (2) s/d (6) berikut

a. $f(t) = 12$ (2)

b. $f(t) = 10t$ (3)

c. $f(t) = 6t^2$ (4)

d. $f(t) = 6e^{-5t}$ (5)

e. $f(t) = 6e^{-5t} \cos 4t$ (6)

Jawab :

Kode Matlab untuk menyelesaikan fungsi $f(t)$ pada persamaan (2) s/d (6) adalah

```
clc
clear all
close all
%
syms s t
f1 = 10*t
f2 = 6*(t^2)
f3 = 6 * exp(-5*t)
f4 = 6 * exp(-5*t) * cos (4*t)
%
L1 = Laplace(f1)
L2 = Laplace(f2)
L3 = Laplace(f3)
L4 = Laplace(f4)
pretty(L4)
```

Hasil program

```
f1 =
10*t

f2 =
6*t^2

f3 =
6*exp(-5*t)

f4 =
6*exp(-5*t)*cos(4*t)

L1 =
10/s^2

L2 =
12/s^3

L3 =
6/(s+5)

L4 =
3/8*(s+5)/(1/16*(s+5)^2+1)
```

Contoh 2. : Dengan menggunakan Matlab, tentukan transformasi Laplace balik dari persamaan (7) berikut

$$Y(s) = \frac{\frac{6}{s} + 2s + 21}{(s^2 + 8s + 12)} = \frac{2s^2 + 21s + 6}{s(s^2 + 8s + 12)} \quad (7)$$

Adapun kode Matlab untuk penyelesaian persamaan (1.65) adalah

```
clc
clear all
close all
%
syms s
f1 = (2*s^2) + (21*s) + (6);
f2 = (s^3) + (8*s^2) + (12*s);
f = f1/f2
%
L = ilaplace(f)
```

Hasil program

```
f =
(2*s^2+21*s+6) / (s^3+8*s^2+12*s)
L =
-2*exp(-6*t)+7/2*exp(-2*t)+1/2
```

Contoh 3. : Dengan menggunakan Matlab, tentukan transformasi Laplace balik dari persamaan (8) berikut

$$F(s) = \frac{s+3}{s^3 + 5s^2 + 12s + 8} \quad (8)$$

Kode Matlab untuk menghitung persamaan (8) adalah

```
clc
clear all
close all
%
syms s
f1 = (s + 3);
f2 = (s^3) + (5*s^2) + (12*s) + 8;
f = f1/f2
%
L = ilaplace(f)
```

Hasil program

```
f =
(s+3) / (s^3+5*s^2+12*s+8)
L =
```

$$2/5 \exp(-t) - 2/5 \exp(-2t) \cos(2t) + 3/10 \exp(-2t) \sin(2t)$$

Contoh 4. : Dengan menggunakan Matlab, tentukan transformasi Laplace balik dari persamaan (9) berikut

$$F(s) = \frac{10}{(s+2)(s+1)^3} \quad (9)$$

Kode Matlab untuk penyelesaian persamaan (9) adalah

```
clc
clear all
close all
%
syms s
f1 = 10;
f2 = (s^4) + (5*s^3) + (9*s^2) + (7*s) + 2;
f = f1/f2
%
L = ilaplace(f1/f2)
```

Hasil program

```
f =
10/(s^4+5*s^3+9*s^2+7*s+2)
L =
-10*exp(-2*t)+5*(2+t^2-2*t)*exp(-t)
```

Contoh 5. : Dengan menggunakan Matlab, rubah bentuk persamaan (10) ke dalam bentuk ekspansi fraksi parsial serta carilah transformasi Laplace balik dari persamaan (10) tersebut

$$F(s) = \frac{1}{s^4 + 5s^3 + 7s^2} \quad (10)$$

Kode Matlab untuk penyelesaian persamaan (10) adalah

```
clc
clear all
close all
%
a = [ 0 0 0 0 1];
b = [ 1 5 7 0 0];
[r,p,k] = residue(a,b)
```

Hasil program

```
r =
0.0510 - 0.0648i
0.0510 + 0.0648i
-0.1020
```

```

    0.1429
p =
-2.5000 + 0.8660i
-2.5000 - 0.8660i
    0
    0
k =
[]

```

Hasil program persamaan (10) diubah menjadi bentuk persamaan (11) dan (12) berikut

$$F(s) = \frac{r_1}{s - p_1} + \frac{r_2}{s - p_2} + \frac{r_3}{s - p_3} + \frac{r_4}{s - p_4} \quad (11)$$

$$F(s) = \frac{(0.0510 - j0.0648)}{s - (2.500 + j0.8660)} + \frac{(0.0510 + j0.0648)}{s - (-2.500 - j0.8660)} + \frac{-0.1020}{s - 0} + \frac{0.1429}{s - 0} \quad (12)$$

Kode Matlab untuk penyelesaian persamaan (10) adalah

```

% Invers transformasi Laplace
syms s
f = 1/(s^4 + 5*s^3 + 7*s^2)
pretty(ilaplace(f))

```

Hasil program

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \\
& - \frac{5}{49} + \frac{5}{49} \exp(-\frac{5}{2} t) \cos(\frac{1}{2} 3t) \\
& + \frac{11}{147} \frac{1}{3} \exp(-\frac{5}{2} t) \sin(\frac{1}{2} 3 t) + \frac{1}{7}
\end{aligned}$$