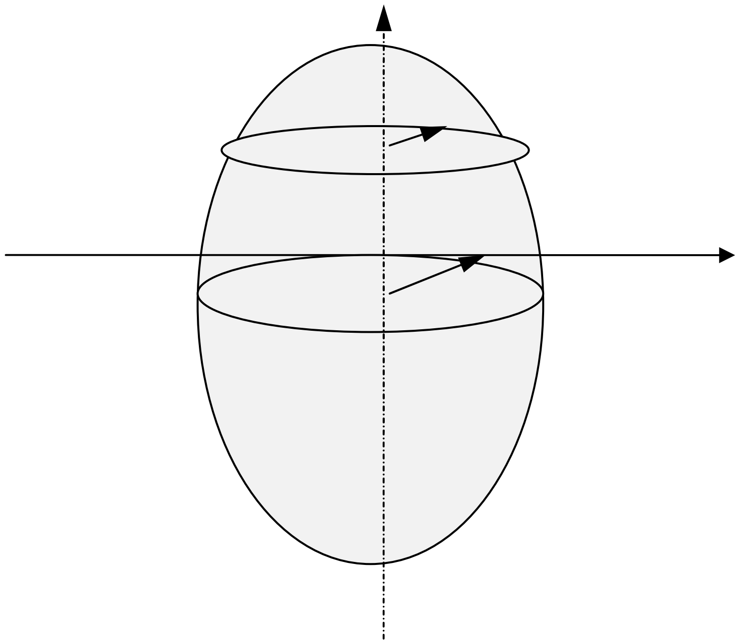
BAB 7.

GERAK ROTASI

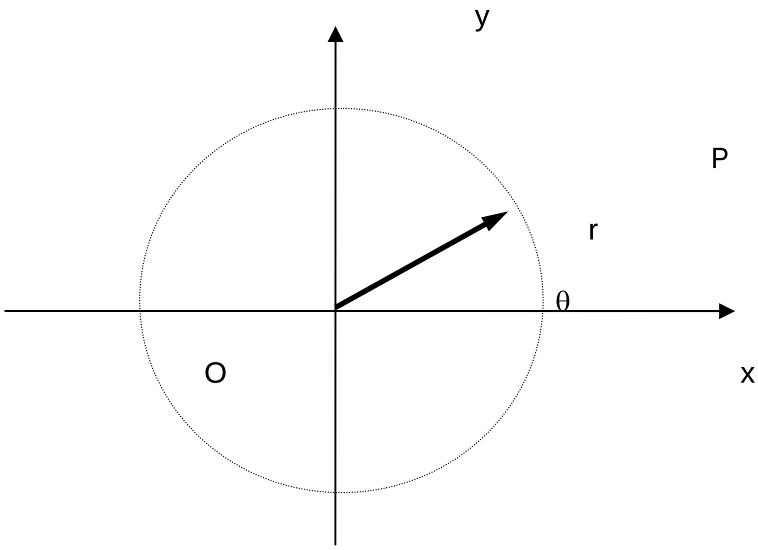
7.1. Pendahuluan



Gambar 7.1 Sebuah benda bergerak dalam lingkaran yang pusatnya terletak pada garis lurus

Sebuah benda tegar bergerak *rotasi murni* jika setiap partikel pada benda tersebut bergerak dalam lingkaran yang pusatnya terletak pada garis lurus yang disebut sumbu rotasi.

7.2. Kecepatan Sudut Dan Percepatan Sudut



Gambar 7.2 Benda pejal yang melakukan gerak rotasi murni

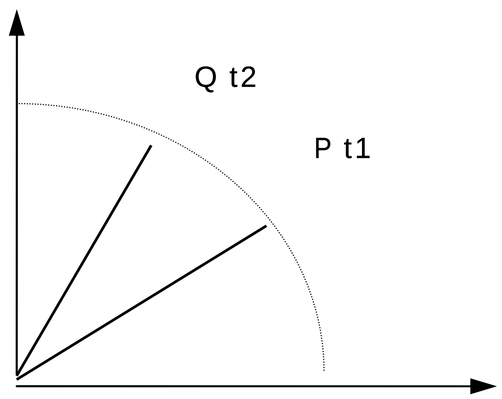
Gambar di atas memperlihatkan sebuah benda pejal yang melakukan gerak rotasi murni dengan sumbu tetap (sumbu z) yang tegak lurus bidang xy. Setiap partikel mengalami gerak rotasi terhadap titik O. Oleh karena itu untuk menyatakan posisi titik P lebih baik digunakan koordinat polar (r,θ). Dalam keadaan ini, r tetap konstan dan yang berubah adalah θ.

Bila partikel bergerak dari $\theta = 0$ rad ke titik P partkel telah menempuh lintasan sejauh panjang busur s, dimana :

$s = r\,\theta$

atau $\theta = s/r$

dimana θ dalam radian (2π rad = 360^o atau 1 rad $\approx 57{,}3^o$)



Gambar 7.3 Partikel bergerak dari titik P ke Q

Partkel bergerak dari P ke Q dalam selang waktu Δt (= t_2 - t_1) telang menyapu sudut $\Delta\theta$ (=θ_2 - θ_1), maka kecepatan sudut rata-rata partikel adalah :

θ_2 - θ_1 $\quad \Delta\theta$

t_2 - t_1 $\quad \Delta t$

kecepatan sudut sesaat adalah

ω = lim $\Delta\theta/\Delta t$ = $d\theta/dt$

$\Delta t \to 0$

Catatan : setiap partikel pada benda tersebut akan mempunyai kecepatan sudut yang sama.

Jika kecepatan sudut sesaat dari benda tersebut berubah dari ω_1 ke ω_2 dalam selang waktu Δt, maka percepatan sudut rata-rata dari benda tersebut adalah

ω_2 - ω_1 $\quad \Delta\omega$

t_2 - t_1 $\quad \Delta t$

dan percepatan sudut sesaatnya adalah :

$\alpha = \lim \Delta\omega / \Delta t = d\omega/dt$

$\Delta t \rightarrow 0$

Untuk rotasi dengan sumbu tetap, setiap patikel pada benda pejal tersebut mempunyai kecepatan sudut yang sama dan percepatan sudut yang sama. Jadi ω dan α merupakan karakteristik keseluruhan benda pejal tersebut.

Arah dari ω dapat dicari dengan aturan arah maju sekrup putar kanan. dan arah α sama dengan arah $d\omega/dt$ yang sama dengan arah ω bila dipercepat dan berlawanan dengan arah ω bila diperlambat.

7.3. Gerak Rotasi Dengan Percepatan Sudut Konstan.

Untuk mendapatkan persamaan gerak rotasi, kita mengambil langsung persamaan gerak yang sudah diperoleh pada gerak translasi :

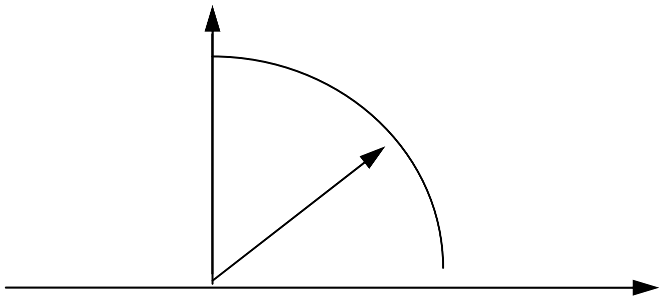
(1). $\omega = \omega_o + \alpha t$

(2). $\theta = \theta_o + 1/2\,(\omega + \omega_o)t$

(3). $\theta = \theta_o + \omega_o t + 1/2\alpha\, t^2$

(4). $\omega^2 = \omega_o^2 + 2\alpha\,(\theta - \theta_o)$

7.4 Hubungan Antara Kinematika Linear Dan Kinematika Rotasi Dari Partikel Yang Bergerak Melingkar.



Gambar 7.4 Panjang lintasan yang ditempuh partikel

Panjang lintasan yang telah ditempuh partikel adalah s dan sudut yang telah disapu θ. Jari-jari lintasan partikel adalah r yang berharga konstan.

$s = \theta\, r$

bila dideferensialkan terhadap t, diperoleh :

$ds/dt = d\theta/dt \,.\, r$

Kecepatan linear partikel :

$v = \omega\, r$

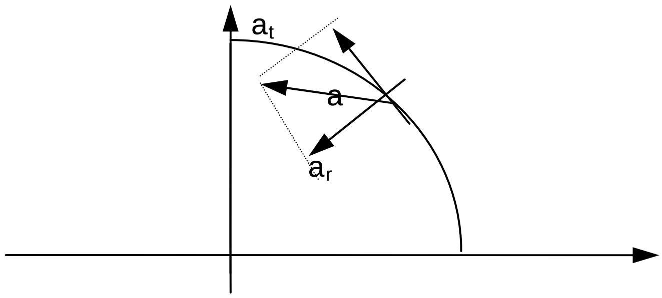
bila dideferensialkan sekali lagi terhadap t :

$dv/dt = d\omega/dt \,.\, r$

Percepatan tangensial partkel :

$a_t = \alpha\, r$

Pada saat tersebut partikel bergerak melingkar maka partikel juga mendapat percepatan sentripetal (radial)

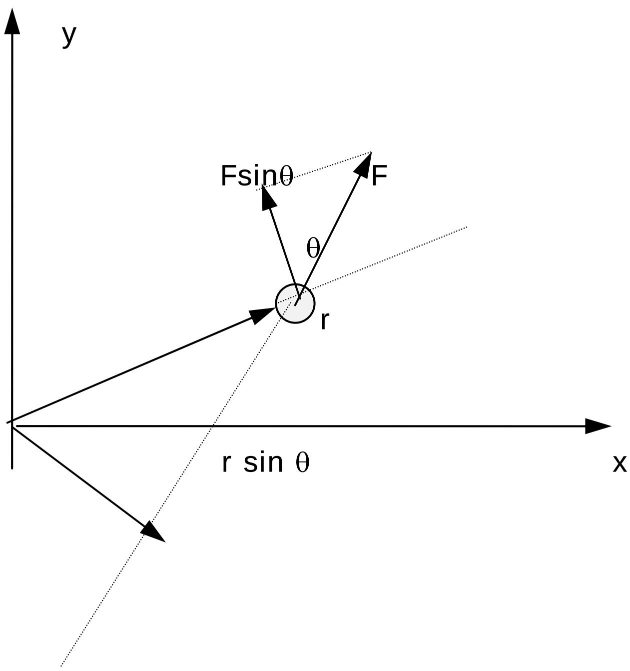


$a_r = v^2/r$

$a_r = \omega^2 r$

Percepatan total partikel : $a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}$

7.5. Torsi Pada Sebuah Partikel.



Torsi oleh gaya F pada sebuah partikel didefinisikan $\tau = r \times F$

Besarnya torsi

$\tau = r\ F \sin\theta$

rumusan ini dapat diubah menjadi

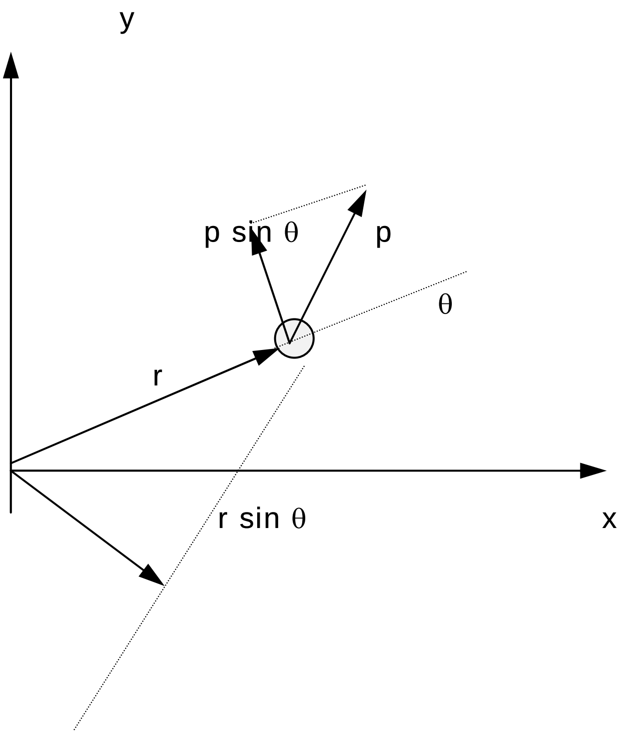
$\tau = r\ (F \sin\theta) = r\ F_{\perp}$

Atau τ = F (r sinθ) = F $r_\perp$

dimana $F_\perp$ adalah : komponen F yang tegak lurus r dan

$r_\perp$ adalah : komponen r yang tegak lurus F

7.6 Momentum Sudut Pada Sebuah Partikel



Momentum sudut pada sebuah partikel didefinisikan l = r x p,

dengan p = mv

Besarnya momentum sudut

l = r p sin θ

rumusan ini dapat diubah menjadi

l = r (p sinθ) = r $p_\perp$

atau l = p (r sinθ) = p $r_\perp$

dimana $p_{\perp}$ adalah : komponen p yang tegak lurus r dan

$r_{\perp}$ adalah : komponen r yang tegak lurus p

Dari definisi momentum sudut l = r x p, bila dideferensialkan diperoleh :

dl/dt = d (r x p)/dt

dl/dt = (r x dp/dt) + (dr/dt x p)

dl/dt = (r x F) + (v x mv)

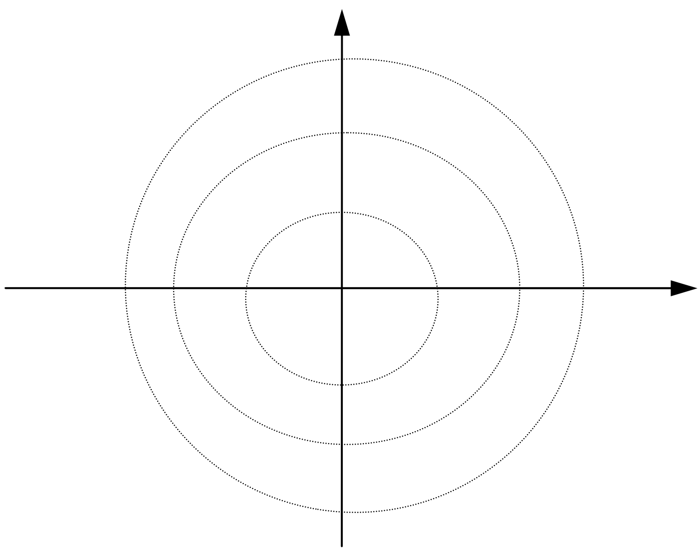
diperoleh

$$\boxed{dl/dt = \tau}$$

$$\boxed{dp/dt = F}$$

"Laju perubahan momentum sudut terhadap waktu sebesar torsi yang bekerja pada partikel tersebut"

7.7. Tenaga Kinetik Rotasi Dan Kelembaman Rotasi



Sebuah benda melakukan gerak rotasi terhadap sumbu tetap. Bila kita perhatikan n buah partikel pada benda tersebut energi kinetik dari n buah partikel tersebut adalah :

$K = 1/2\ m_1 v_1^2 + 1/2\ m_2 v_2^2 + \ldots + 1/2\ m_n v_n^2$

karena $v = \omega r$, maka

$K = 1/2\ m_1 \omega^2 r_1^2 + 1/2\ m_2 \omega^2 r_2^2 + \ldots + 1/2\ m_n \omega^2 r_n^2$

$K = 1/2\ (\sum m_1 r_1^2)\ \omega^2$

Energi kinetik rotasi benda :

$$\boxed{K = 1/2\ I\ \omega^2}$$

$K = 1/2\ mv^2$

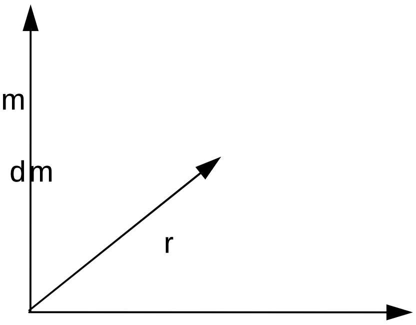
dimana $I = \sum m_i r_i^2$ adalah momen kelembaman rotasi atau momen inersia sistem partikel tersebut. Momen inersia ini tergantung pada :

a. distribusi/bentuk massa/benda tersebut.

b. sumbu rotasi.

Untuk benda-benda kontinu momen inersia dapat dicari dari :

$I = \int r^2 \, dm$



Untuk benda-benda tertentu momen inersianya dapat dilihat dalam tabel. Bila sumbu putar bergeser sejauh h dari sumbu putar yang melalui pusat massa, maka momen inersianya menjadi :

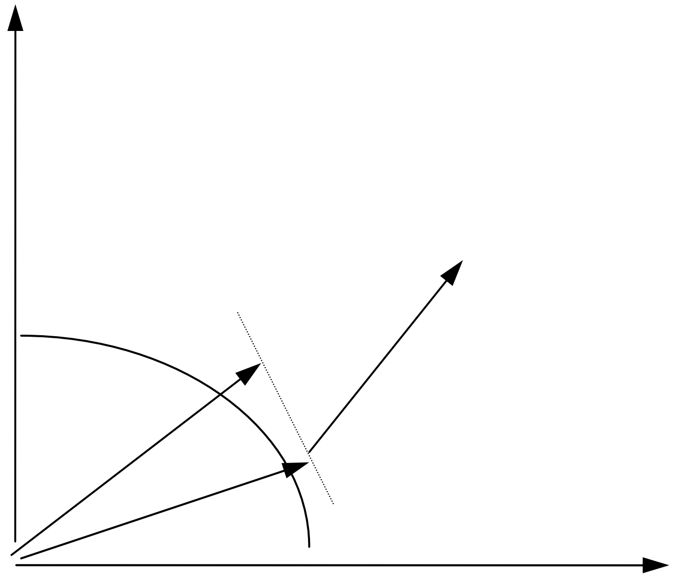
$I = I_{pm} + Mh^2$

dimana :

I_{pm} adalah momen inersia dengan sumbu yang melalui pusat massa.

M adalah massa total benda.

7.8. Dinamika Rotasi Benda Tegar



Sebuah benda berotasi dengan sumbu putar adalah sumbu z. Sebuah gaya F bekerja pada salah satu partikel di titik P pada benda tersebut. Torsi yang bekerja pada partikel tersebut adalah :

$\tau = r \times F$

Arah torsi τ searah dengan sumbu z.

Setelah selang waktu dt partikel telah berputar menempuh sudut $d\theta$ dan jarak yang ditempuh partikel ds, dimana

$ds = r\, d\theta$

Usaha yang dilakukan gaya F untuk gerak rotasi ini

$dW = F \cdot ds$

$dW = F \cos \phi \, ds$

$dW = (F \cos \phi)\,(r\, d\theta)$

$dW = \tau \, d\theta$ $dW = F \cdot ds$

Laju usaha yang dilakukan (daya) adalah :

$dW/dt = \tau \, d\theta/dt$

$\boxed{P = \tau \, \omega}$ $\boxed{P = F \, v}$

Untuk benda yang benar-benar tegar, tidak ada disipasi tenaga, sehingga laju dilakukannya usaha pada benda tegar tersebut sama dengan laju pertambahan tenaga kinetik rotasinya.

$dW/dt = dK/dt$

$dW/dt = d(1/2 \; I \; \omega^2)/dt$

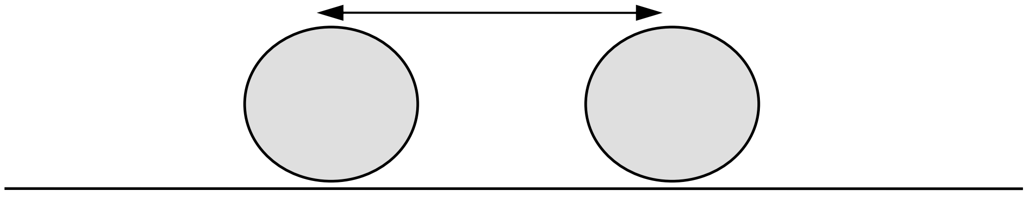
$\tau \, \omega = 1/2 \; I \; d\omega^2/dt$

$\tau \, \omega = I\omega \; d\omega/dt$

$\tau \, \omega = I\omega \; \alpha$

$\boxed{\tau = I \, \alpha}$ $\boxed{F = m \, a}$

7.9. Menggelinding



Misalkan sebuah silinder menggelinding pada bidang datar. Pusat massa silinder bergerak dalam garis lurus, sedang titik-titik yang lain lintasannya sangat komplek (cycloid).

Bila jari-jari silinder R, saat silinder telah berputar sejauh θ, pusat massa telah bergeser sejauh

$s = R\theta$. Oleh karena kecepatan dan percepatan linear dari pusat massa dapat dinyatakan :

$v_{pm} = R\omega$

$a_{pm} = R\alpha$

Relatif terhadap permukaan dimana silinder menggelinding, pusat massa mempunya kecepatan v_{pm} dan titik P' mempunyai kecepatan $2v_{pm}$ dan kecepatan titik P adalah 0, sehingga titik P dapat dipandang sebagai sumbu putar sesaat silinder yang sedang menggelinding.

Energi kinetik silinder yang menggelinding tersebut adalah :

$K = 1/2\ I_P\ \omega^2$

$= 1/2\ (\ I_{pm} + MR^2)\ \omega^2$

$= 1/2\ I_{pm}\omega^2\ +\ 1/2\ MR^2\omega^2$

$K = 1/2\ I_{pm}\omega^2\ +\ 1/2\ Mv_{pm}^2$

Tampak pada ruas kanan, suku pertama menyatakan energi kinetik rotasi murni dengan sumbu melalui pusat massa, dan suku kedua menyatakan energi kinetik gerak translasi murni dengan kecepatan pusat massanya. Jadi gerak menggelinding dapat dipandang sebagai gabungan gerak rotasi murni dan gerak translasi murni.

7.10. Rotasi Dan Dinamika Rotasi

Dalam penyelesaian soal rotasi benda tegar perlu diperhatikan dua hal yaitu:

1. **GAYA** sebagai penyebab dari perubahan *gerak translasi* (ΣF = m.a)
2. **MOMEN GAYA** atau **MOMEN KOPEL** sebagai penyebab dari perubahan gerak rotasi (Σ = I .)

MOMEN GAYA ( ) adalah gaya kali jarak/lengan. Arah gaya dan arah jarak harus tegak lurus.

Untuk benda panjang:

= F . l

Untuk benda berjari jari:

= F . R = I .

F = gaya penyebab benda berotasi

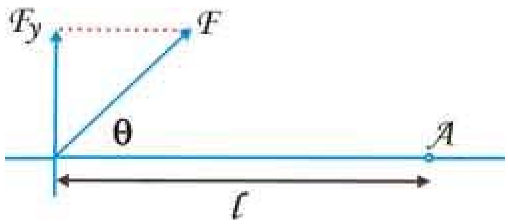
R = jari-jari

l = lengan gaya terhadap sumbu

I = **m . R**^{2} = momen inersia benda

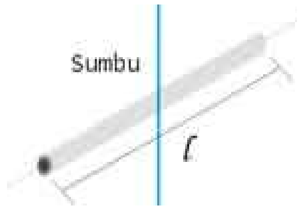
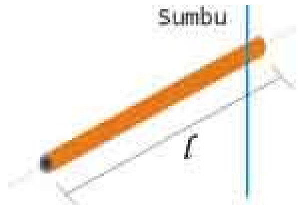
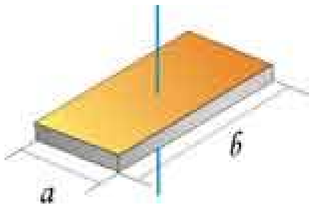
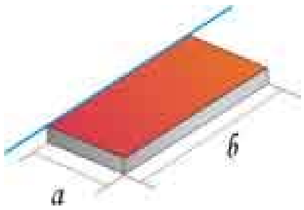
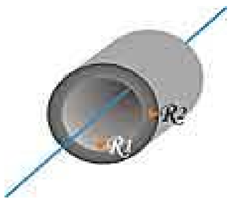
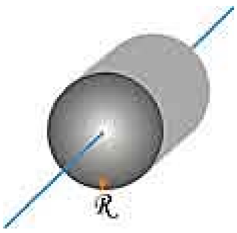
a = percepatan sudut / angular

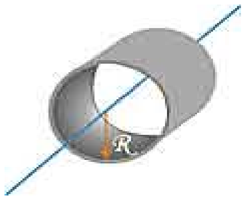
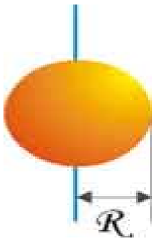
A = Fy . l = F . sin . l



Gbr. Momen Gaya

MOMEN INERSIA BEBERAPA BENDA

No.	Gambar	Nama	Momen Inertia
1.		Batang silinder, poros melalui pusat	I = M.l2/12
2.		Batang silinder, poros melalui ujung	I = M.l2/3
3.		Pelat segi empat, poros melalui pusat	I = M.(a2 + b2)/2
4.		Pelat segi empat tipis, poros sepanjang tepi	I = M.a/3
5.		Silinder berongga	I = M (R12 + R22)/2
6.		Silinder pejal	I = M.R2/2

7.		Silinder tipis berongga	I = M.R2
8.		Bola pejal	I = 2 M.R2/5
9.		Bola tipis berongga	I = 2 M.R2/3

HUBUNGAN GERAK TRANSLASI DENGAN GERAK ROTASI

Gerakan Rotasi		Gerak Rotasi		Hubungannya
Pergeseran Linier	S	Pergeseran Sudut		S = . R
Kecepatan Linier	V = ds/dt	Kecepatan Sudut	w = d /dt	v = w . R
Percepatan Linier	A = dv/dt	Percepatan Sudut	= dw/dt	a = . R
Gaya	F = m.a	Momen Gaya (Torsi)	= I	= F . R
Energi Kinetik	Ek = Â½ m	Energi	Ek = Â½ I	-

	v2	Kinetik	w2	
Daya	P = F.v	Daya	P = w	-
Momentum Linier	P = m.v	Momentum Sudut	L = P R	L = P R
Usaha	W = F.s	Usaha	W =	-