IV

ANALISIS TANGGAPAN PERALIHAN

Deskripsi : Bab ini memberikan gambaran tentang analisis tanggapan peralihan untuk sistem orde satu, orde dua dan orde tinggi
Objektif : Memahami bab ini akan mempermudah pembaca untuk memahami prinsip-prinsip analisis tanggapan peralihan pada sistem kendali.

4.1 Pendahuluan

Dalam prakteknya, sinyal masukan sistem kendali tidak dapat diketahui sebelumnya tetapi mempunyai sifat acak sehingga masukan sesaat tidak dapat dinyatakan secara analitis. Untuk analisis dan perancangan sistem kendali, harus dipunyai dasar perbandingan kinerja berbagai sistem kendali. Dasar ini disusun untuk melakukan perbandingan tanggapan berbagai sistem, yaitu dengan memberikan masukan uji. Masukan uji yang biasa digunakan adalah fungsi undak, fungsi laju, fungsi percepatan, fungsi impulsa, fungsi sinusoida dan sebagainya. Dengan sinyal uji ini dapat dilakukan analisis matematika dan eksperimen secara mudah, karena sinyal-sinyal ini merupakan fungsi waktu yang sederhana. Jenis sinyal masukan yang akan digunakan untuk menganalisis karakteristik sistem diantara sinyal-sinyal masukan khas ini dapat ditentukan dari bentuk masukan yang paling sering diberikan ke sistem pada operasi normal. Jika masukan sistem kendali merupakan fungsi waktu yang berangsur-angsur berubah maka fungsi laju satuan mungkin merupakan sinyal uji yang baik. Demikian pula, jika sistem dikenai gangguan secara tiba-tiba maka fungsi undak satuan mungkin merupakan sinyal uji yang baik dan untuk sistem yang dikenai masukan-masukan kejut, sinyal uji yang paling baik mungkin fungsi impulsa. Penggunaan sinyal uji memungkinkan untuk membandingkan performansi semua sistem dengan basis yang sama.

Tanggapan waktu sistem kendali terdiri dari dua bagian yaitu tanggapan peralihan dan tanggapan dalam keadaan mantap. Tanggapan peralihan adalah tanggapan sistem yang berlangsung dari keadaan awal sampai keadaan akhir sedangkan tanggapan keadaan mantap adalah tanggapan keluaran sistem jika t mendekati tak terhingga. Selain itu dalam keadaan mantap suatu masukan dianggap telah terjadi cukup lama sehingga pengaruh daripada setiap perubahan yang ada sebelumnya telah hilang.

4.2 Sistem Orde Satu

Fungsi alih dari suatu sistem orde satu dapat ditulis sebagai berikut

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{s + a_0} \tag{4.1}$$

Dimana

$C(s)$: fungsi masukan

$R(s)$: fungsi keluaran

Notasi yang lebih umum dari fungsi alih orde satu adalah

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \tag{4.2}$$

dengan membandingkan persamaan (4.1) dan (4.2) diperoleh

$$a_o = \frac{1}{\tau} \text{ dan } b_o = \frac{K}{\tau} \tag{4.3}$$

Selain itu dapat juga diturunkan persamaan diferensial sistem dari persamaan (4.2) sebagai berikut

$$\left(s + \frac{1}{\tau}\right)C(s) = \frac{K}{\tau}R(s) \tag{4.4}$$

Dengan menggunakan transformasi Laplace balik persamaan (4.4) menjadi

$$\dot{c}(t) + \frac{1}{\tau}c(t) = \frac{K}{\tau}r(t) \tag{4.5}$$

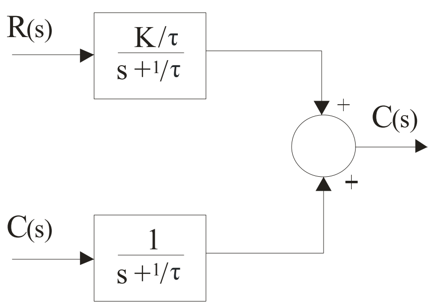
Selanjutnya dengan menggunakan transformasi Laplace dari persamaan (4.5) dan memasukkan kondisi awalnya diperoleh

$$sC(s) - c(0) + \frac{1}{\tau}C(s) = \frac{K}{\tau}R(s) \tag{4.6}$$

Penyelesaian untuk persamaan (4.6) sebagai berikut

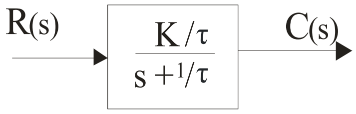
$$C(s) = \frac{c(0)}{s + (1/\tau)} + \frac{(K/\tau)R(s)}{s + (1/\tau)} \tag{4.7}$$

Persamaan (4.7) dapat ditampilkan dalam bentuk diagram blok berikut



Gambar 4.1 Sistem Orde Pertama dengan Kondisi Awal

Dimana kondisi-kondisi awal biasanya tidak ditunjukkan sebagai masukan pada diagram blok sistem. Perlu diperhatikan bahwa kondisi awal sebagai suatu masukan memiliki transformasi Laplace $c(0)$ yang merupakan suatu konstanta. Transformasi Laplace balik dari suatu konstanta merupakan suatu fungsi impulsa. Dengan demikian, kondisi awal sebagai suatu masukan muncul sebagai fungsi impulsa $c(0)\delta(t)$. Disini dapat dilihat bahwa fungsi impulsa memiliki arti praktis, meskipun fungsi impulsa bukan sinyal fisik yang dapat direalisasikan sehingga kondisi awal ini biasanya diabaikan pada diagram blok. Dengan demikian diagram blok pada Gambar 4.1 disederhanakan menjadi



Gambar 4.2 Sistem Orde Pertama Tanpa Kondisi Awal

Pada persamaan (4.7) kondisi awal berperan pada keluaran sistem. Misalkan kondisi awal pada persamaan (4.7) bernilai nol dan masukan $r(t)$ adalah undak satuan maka $R(s)$ sama dengan $\frac{1}{s}$ sehingga persamaan (4.7) menjadi

$$C(s) = \frac{(K/\tau)}{s\left[s + (1/\tau)\right]} = \frac{K}{s} + \frac{-K}{s + (1/\tau)} \tag{4.8}$$

Transformasi Laplace balik persamaan (4.8) menghasilkan

$$c(t) \; = \; K\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \tag{4.9}$$

Dari persamaan (4.9) terlihat bahwa suku pertama pada tanggapan $c(t)$ berasal dari pole masukan $R(s)$ dan disebut tanggapan paksa. Selain itu suku pertama ini tidak menuju nol dengan bertambahnya waktu sehingga disebut juga dengan tanggapan tunak. Suku kedua dari persamaan (4.9) berasal dari pole fungsi alih $G(s)$ yang disebut tanggapan alami, karena suku kedua ini menuju nol dengan bertambahnya waktu disebut juga dengan tanggapan peralihan.

Perhatikan bahwa suku yang menuju nol secara eksponensial memiliki kemiringan awal yaitu

$$c(t) \; = \; \frac{d}{dt}\left(-Ke^{-t/\tau}\right)_{t=0} = \frac{K}{\tau}e^{-t/\tau}\Big|_{t=0} = \frac{K}{\tau} \tag{4.10}$$

Secara matematis, suku eksponensial tidak menuju nol pada interval waktu terbatas. Namun demikian jika suku ini diteruskan pada kecepatan awalnya akan mencapai nilai nol dalam τ detik. Parameter τ disebut konstanta waktu dan memiliki satuan detik. Penurunan nilai menuju nol dari fungsi eksponensial diperlihatkan pada Tabel 4.1 berikut

Tabel 4.1 Penurunan Nilai Fungsi Eksponensial
Sebagai Fungsi dari Konstanta Waktu τ

τ	$e^{t/\tau}$
0	1.0000
τ	0.3679
2τ	0.1353
3τ	0.0498
4τ	0.0183
5τ	0.0067

Pada Tabel 4.1 terlihat bahwa fungsi eksponensial telah berkurang sebesar 2 persen dari nilai awal dalam empat konstanta waktu dan berkurang 1 persen dari nilai awal dalam lima konstanta waktu. Pada perhitungan selanjutnya diasumsikan suku eksponensial menjadi nol setelah empat konstanta waktu. Tanggapan sistem pada persamaan (4.9) adalah

$$\lim_{t\to\infty} c(t) = K \tag{4.11}$$

Limit pada persamaan (4.11) disebut nilai akhir atau nilai keadaan tunak tunak dari tanggapan. Dengan demikian bentuk umum fungsi alih orde pertama adalah

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \tag{4.12}$$

Dimana

τ	:	konstanta waktu sistem (detik)
K	:	tanggapan keadaan tunak terhadap masukan undak satuan

Contoh 4.1 :

Tentukan tanggapan sistem untuk masukan undak satuan dengan fungsi alih lingkar terbuka sebagai berikut

$$G(s) = \frac{5}{0.75s + 0.75} = \frac{(20/3)}{s+1} \tag{4.13}$$

Jawab :

$$C(s) = G(s)R(s) = \frac{(20/3)}{(s+1)}\frac{1}{s} = \frac{20/3}{s} - \frac{20/3}{s+1} \tag{4.14}$$

dan

$$c(t) = \frac{20}{3}\left(1 - e^{-t}\right) \tag{4.15}$$

Pole dari fungsi alih pada $s = -1$ memberikan konstanta waktu $\tau = 0.75$ detik . Nilai keadaan tunak tanggapan adalah $\frac{20}{3}$. Dengan konstanta waktu sistem sebesar 0.75 maka keluaran mencapai keadaan tunak kira-kira dalam 3 detik.

Listing program Matlab

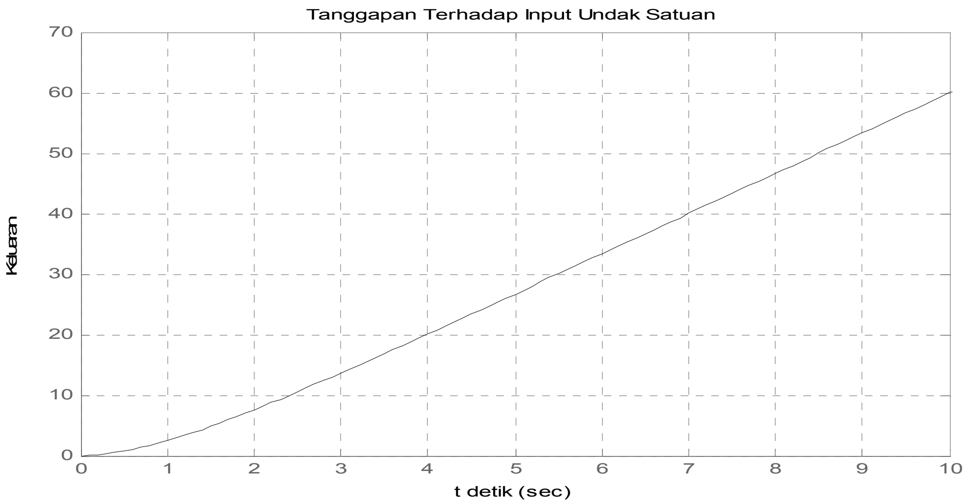
```
clc
clear all
close all
% Contoh Soal 4-1
num = [ 0    5];
den = [ 0.75 0.75];
%
[r,p,k] = residue(num,den)
%
step(num,den)
grid on
```

```
title('Tanggapan Terhadap Masukan Undak Satuan ')
ylabel('Keluaran')
xlabel('t detik')
```

Hasil program

```
r =
    6.6667
p =
    -1
k =
     []
```

Hasil plot tanggapan terhadap masukan undak satuan



Gambar 4.3 Tanggapan Sistem Terhadap Masukan Undak Satuan

Selanjutnya jika masukan $r(t)=t$ adalah laju satuan, maka $R(s)$ sama dengan $\frac{1}{s^2}$ sehingga persamaan (4.7) menjadi

$$C(s)=\frac{(K/\tau)}{s^2\left[s+(1/\tau)\right]}=\frac{K}{s^2}+\frac{-K\tau}{s}+\frac{K\tau}{s+(1/\tau)} \tag{4.16}$$

Transformasi Laplace balik persamaan (4.16) menghasilkan

$$c(t) = Kt - K\tau + K\tau e^{-t/\tau} \tag{4.17}$$

dari persamaan (4.17) terlihat bahwa tanggapan laju terbentuk atas tiga suku. Suku konstanta dan suku eksponensial. Pertama, suku eksponensial memiliki konstanta waktu yang sama dengan tanggapan undak. Amplitudo dari eksponensial berbeda pada tanggapan laju dibanding tanggapan undak. Amplitudo berbeda dengan faktor τ . Jika τ lebih besar dari satu maka eksponensial memiliki efek menonjol pada tanggapan sistem. Tanggapan keadaan tunak diberikan oleh

$$c_{ss}(t) = Kt - K\tau \tag{4.18}$$

dengan $c_{ss}(t)$ adalah nilai keadaan tunak dari $c(t)$. Disini akan didefinisikan tanggapan keadaan tunak dibentuk dari suku-suku tersebut yang tidak menuju nol bila waktu bertambah.

Contoh 4.2 :
Tentukan tanggapan sistem untuk laju satuan dengan fungsi alih

$$G(s) = \frac{5}{0.75s + 0.75} = \frac{(20/3)}{s+1} \tag{4.19}$$

Jawab :

$$C(s) = G(s)R(s) = \frac{(20/3)}{(s+1)}\frac{1}{s^2} = \frac{20/3}{s^2} - \frac{20/3}{s} + \frac{20/3}{(s+1)} \tag{4.20}$$

dan

$$c(t) = \frac{20}{3}\left(t - 1 + e^{-t}\right) \tag{4.21}$$

Pole dari fungsi alih pada $s = -1$ memberikan konstanta waktu $\tau = 0.75$ detik . Nilai keadaan tunak tanggapan adalah $\frac{20}{3}t - \frac{20}{3}$. Dengan konstanta waktu sistem sebesar 0.75 maka keluaran mencapai keadaan tunak kira-kira dalam 3 detik.

Listing program Matlab
```
clc
clear all
close all
%Cobtoh Soal 4-2
num = [ 0     5];
den = [ 0.75 0.75];
%
[r,p,k] = residue(num,den)
%
t = 0:0.1:10;
r = t;
y = lsim(num,den,r,t);
plot(t,y)
grid on
title('Tanggapan Terhadap Masukan Laju Satuan ')
ylabel('Keluaran')
xlabel('t detik')
```

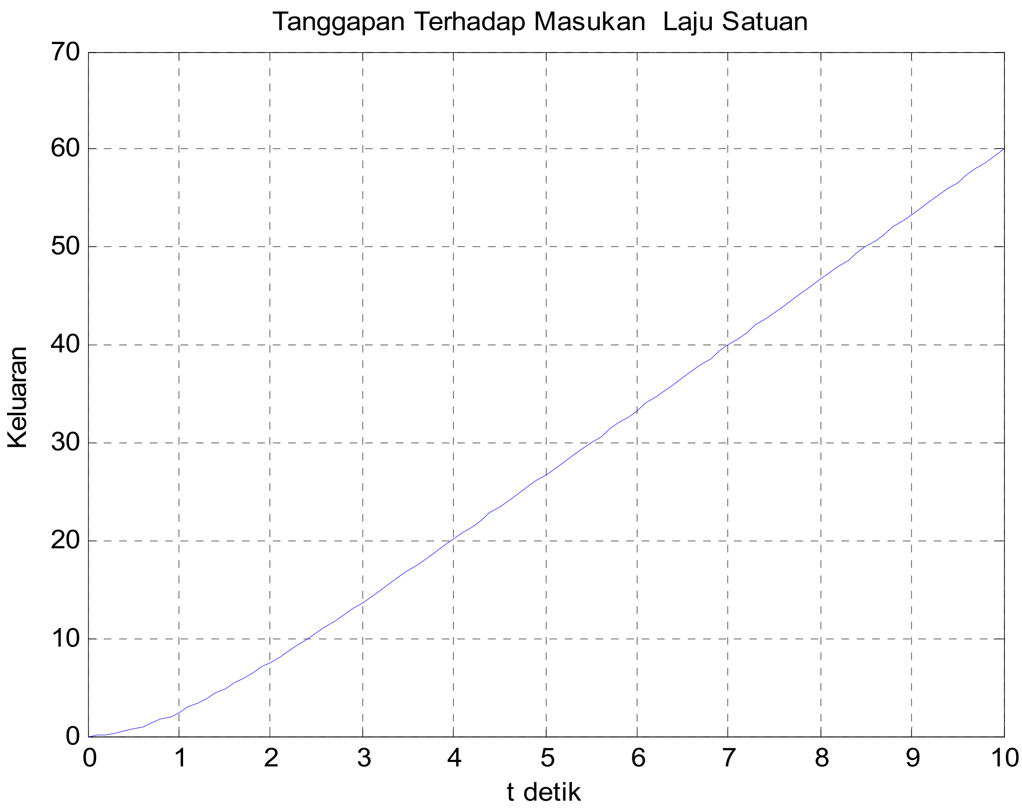
Hasil program

r =
   6.6667

p =
    -1

k =
    []

Hasil plot tanggapan terhadap masukan laju satuan



Gambar 4.4 Tanggapan Sistem Terhadap Masukan Laju Satuan

4.3 Sistem Orde Dua

Bentuk standard dari fungsi alih orde kedua adalah

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\varsigma\omega_n + \omega_n^2} \tag{4.22}$$

Dimana

ς : rasio redaman

ω_n : frekuensi tidak teredam atau frekuensi natural

Terlihat bahwa semua karakteristik sistem dari sistem orde kedua standard merupakan fungsi dari ς dan ω_n. Pertama-tama perhatikan tanggapan terhadap masukan undak satuan dari sistem orde kedua adalah

$$C(s) = G(s)R(s) = \frac{\omega_n^2}{s\left(s^2 + 2\varsigma\omega_n + \omega_n^2\right)} \tag{4.23}$$

Transformasi balik dari persamaan (4.23) tidak diturunkan pada persamaan (4.23). Namun dengan mengasumsikan saat ini bahwa pole-pole dari $G(s)$ kompleks diperoleh

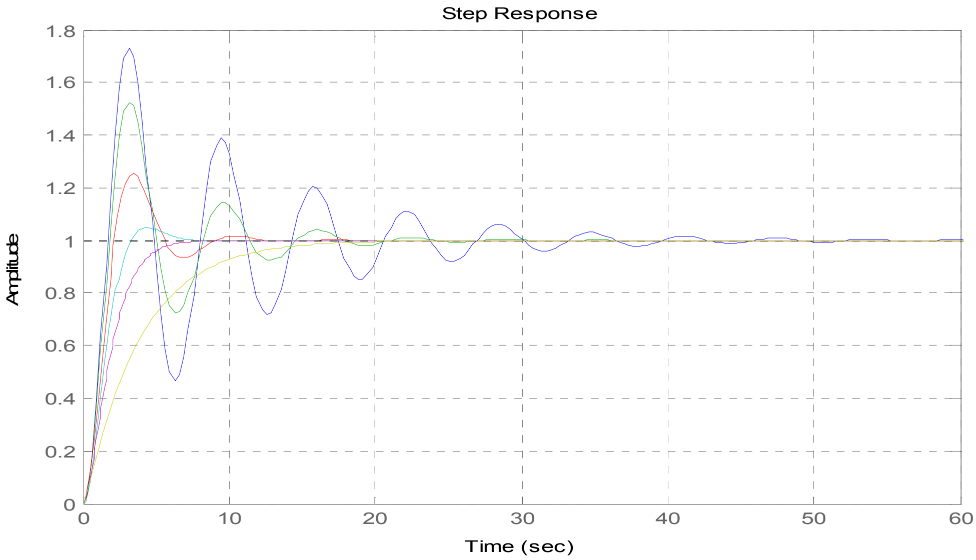
$$c(t) = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\varsigma\omega_n t} \sin\left(\beta\omega_n t + \theta\right) \tag{4.24}$$

Dengan $\beta = \sqrt{1 - \varsigma^2}$ dan $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\varsigma}\right)$

Pada tanggapan ini, $\tau = 1/\varsigma\omega_n$ adalah konstanta waktu dari sinusoida dalam detik serta frekuensi dari sinusoida teredam. Sekarang akan ditunjukkan tanggapan undak yang umum pada sistem orde kedua. Tanggapan undak pada persamaan (4.24) adalah fungsi dari ς dan ω_n. Jika ditentukan nilai ς saja maka untuk memplot $c(t)$ belum bisa dilakukan tanpa menentukan ω_n juga. Untuk menyederhanakan plot grafik $c(t)$ akan dipergunakan suatu nilai ς yang telah ditentukan sebagai fungsi dari $\omega_n t$. Keluarga kurva dari berbagai nilai ς sangat berguna dan diperlihatkan pada Gambar 4.5 dengan nilai ς antara $0 \le \varsigma \le 2$. Untuk $0 \le \varsigma \le 1$ tanggapan merupakan sinusoida teredam. Untuk $\varsigma = 0$ tanggapan merupakan sinusoida tidak teredam dan untuk $\varsigma \ge 1$ osilasi sudah tidak ada. Pada persamaan (4.24) terlihat bahwa untuk $\varsigma < 0$ tanggapan bertambah tanpa batas. Program Matlab untuk menghitung beberapa tanggapan terhadap masukan undak dengan beberapa nilai ς berikut

Listing program Matlab
```
clc
clear all
close all
%
zeta = [0.1 0.2 0.4 0.7 1 2]
for k = 1 : 6
    Gnum = [ 0  0  1]
    Gden = [ 1 2*zeta(k) 1]
    step(Gnum,Gden)
    hold on
    grid on
end
```

Hasil plot tanggapan terhadap masukan undak satuan terhadap berbagai nilai ς berikut



Gambar 4.5 Tanggapan Sistem Terhadap Masukan Undak Satuan
Dengan Berbagai Nilai ς

Untuk $\varsigma > 1$ sistem bersifat teredam lebih dan tanggapan terhadap masukan undak satuan adalah

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2} R(s) \tag{4.25}$$

dengan masukan $R(s) = \frac{1}{s}$ sehingga persamaan (4.25) menjadi

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s\left(s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2\right)} \tag{4.26}$$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{\left(s + \varsigma\omega_n + \omega_n\sqrt{\varsigma^2 - 1}\right)\left(s + \varsigma\omega_n - \omega_n\sqrt{\varsigma^2 - 1}\right)} \tag{4.27}$$

dengan menggunakan transformasi Laplace balik persamaan (4.27) berubah menjadi

$$c(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\varsigma^2 - 1}\left(\varsigma + \sqrt{\varsigma^2 - 1}\right)} e^{-\left(\varsigma + \sqrt{\varsigma^2 - 1}\right)\omega_n t} - \frac{1}{2\sqrt{\varsigma^2 - 1}\left(\varsigma - \sqrt{\varsigma^2 - 1}\right)} e^{-\left(\varsigma + \sqrt{\varsigma^2 - 1}\right)\omega_n t} \tag{4.28}$$

$$c(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\varsigma^2 - 1}}\left(\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_1}\right) \quad \text{untuk} \quad t \geq 0 \tag{4.29}$$

Dengan $s_1 = \left(\varsigma + \sqrt{\varsigma^2 - 1}\right)\omega_n$ dan $s_2 = \left(\varsigma - \sqrt{\varsigma^2 - 1}\right)\omega_n$

.

Untuk $\varsigma = 1$ sistem bersifat teredam kritis dan tanggapan terhadap masukan undak satuan adalah

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2} R(s) \tag{4.30}$$

dengan masukan $R(s) = \frac{1}{s}$ sehingga persamaan (4.31) menjadi

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s\left(s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2\right)} = \frac{\omega_n^2}{s\left(s + \omega_n\right)^2} \tag{4.31}$$

dengan menggunakan transformasi Laplace balik persamaan (4.31) berubah menjadi

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t}\left(1 + \omega_n t\right) \quad \text{untuk} \quad t \geq 0 \tag{4.32}$$

Untuk $\left(0 < \varsigma < 1\right)$ sistem bersifat teredam kurang dan tanggapan terhadap masukan undak satuan adalah

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2} R(s) \tag{4.33}$$

dengan masukan $R(s) = \frac{1}{s}$ sehingga persamaan (4.33) menjadi

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s\left(s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2\right)} \tag{4.34}$$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{\left(s + \varsigma\omega_n + j\omega_d\right)\left(s + \varsigma\omega_n - j\omega_d\right)} \tag{4.35}$$

dimana $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \varsigma^2}$

Dengan menggunakan transformasi Laplace balik persamaan (4.35) menjadi

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t}\left(\cos \omega_d t + \frac{\varsigma}{\sqrt{1 - \varsigma^2}} \sin \omega_d t\right) \tag{4.36}$$

atau

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\omega_n t}}{\sqrt{1 - \varsigma^2}}\left(\omega_d t + \tan^{-1}\frac{\varsigma}{\sqrt{1 - \varsigma^2}}\right) \tag{4.37}$$

Contoh 4.3 :

Tentukan ω_n , ς serta tanggapan undak satuan dari sistem lingkar tertutup berikut

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{130}{s^2 + 15s + 130} \tag{4.38}$$

Jawab :

Berdasarkan persamaan (4.22) diperoleh

$$\omega_n^2 = 130 \rightarrow \omega_n = 11.4018 \tag{4.39}$$

$$2\varsigma\omega_n = 15 \rightarrow 2\varsigma(11.4018) = 15 \rightarrow \varsigma = 0.6578 \tag{4.40}$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \varsigma^2} = (11.4018)\sqrt{1-(0.6578)^2} = 8.5878 \tag{4.41}$$

Untuk tanggapan undak dari sistem lingkar tertutup diperoleh

$$C(s) = G(s)R(s) = \frac{130}{(s^2+15s+130)}\frac{1}{s} = \frac{1}{s} + \frac{-0.500 - j0.4367}{(s + 7.5000 + j8.5879)} + \frac{-0.500 + j0.4367}{(s + 7.500 - j8.5879)} \tag{4.42}$$

Dengan menggunakan transformasi Laplace balik diperoleh

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\varsigma}{\sqrt{1-\varsigma^2}}\sin\omega_d t\right) \tag{4.43}$$

$$c(t) = 1 - e^{-11.4018t}\left(\cos 8.5878t + \frac{0.6578}{\sqrt{1-(0.6578)^2}}\sin 8.5878t\right) \tag{4.44}$$

$$c(t) = 1 - e^{-11.4018t}(\cos 8.5878t + 0.8733\sin 8.5878t) \tag{4.45}$$

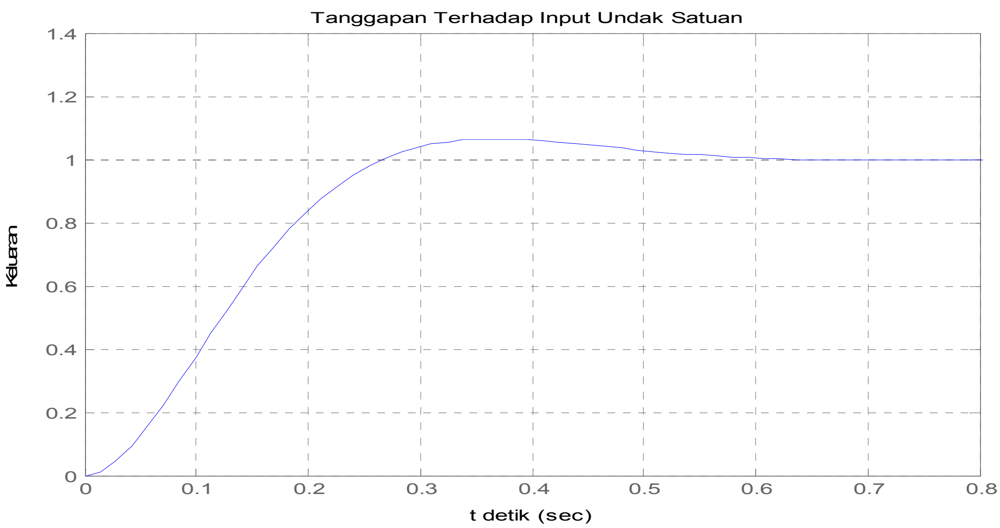
Listing program Matlab

```
clc
clear all
close all
% Contoh Soal 4-3
num = [ 0  0  130];
den = [ 1 15  130];
%
omega_n = sqrt(den(3))
zeta = den(2)/(2 * omega_n)
%
num1 = [ 0  0  0 130];
den1 = [ 1 15 130 0 ];
%
[z,p,k] = residue(num1,den1)
step(num,den)
grid on
title('Tanggapan Terhadap Masukan  Undak Satuan ')
ylabel('Keluaran')
xlabel('t detik')
```

Hasil program

```
omega_n =
  11.40175425099138
zeta =
   0.65779351448027
z =
 -0.50000000000000 + 0.43666688230469i
 -0.50000000000000 - 0.43666688230469i
  1.00000000000000
p =
 -7.50000000000000 + 8.58778201865883i
 -7.50000000000000 - 8.58778201865883i
                  0
k =
     []
```

Hasil plot tanggapan terhadap masukan undak satuan



Gambar 4.6 Tanggapan Sistem Orde Kedua Terhadap Masukan Undak Satuan

Dalam beberapa kasus praktis, karakteristik performansi sistem kendali yang diinginkan dinyatakan dalam bentuk besaran wawasan waktu. Sistem yang mempuyai elemen penyimpan energi tidak dapat merespon secara seketika dan akan menunjukkan tanggapan peralihan jika dikenai masukan atau gangguan. Seringkali karakteristik performansi sistem kendali dinyatakan dalam bentuk tanggapan peralihan terhadap masukan undak satuan karena mudah dibangkitkan dan jika tanggapan terhadap masukan undak diketahui maka secara matematis dapat dihitung tanggapan terhadap setiap masukan

Tanggapan peralihan sistem terhadap masukan undak satuan bergantung pada syarat awal. Untuk memudahkan perbandingan tanggapan peralihan berbagai macam sistem, hal yang biasa dilakukan adalah menggunakan syarat awal standard yaitu sistem mula-mula keadaan diam sehingga keluaran dan semua turunan waktunya pada awal tanggapan sama dengan nol, selanjutnya karakteristik tanggapan secara mudah dapat dibandingkan. Tanggapan peralihant sistem kendali praktis sering menunjukkan osilasi teredam sebelum mencapai keadaan tunak. Dalam menentukan karakteristik tanggapan peralihan sistem kendali terhadap masukan undak satuan biasanya ditentukan parameter sebagai berikut

- Waktu tunda (*delay time*) $\left(t_d\right)$

Waktu tunda adalah waktu yang diperlukan tanggapan untuk mencapai setengah harga akhir yang pertama kali.

- Waktu naik (*rise time*), $\left(t_r\right)$

Waktu naik adalah waktu yang diperlukan tanggapan untuk naik dari 10 % sampai 90 %, 5 % sampai 95 % atau 0 sampai 100 % dari harga akhirnya. Untuk sistem orde kedua redaman kurang biasanya digunakan waktu naik 0 sampai 100 % dan untuk sistem redaman lebih biasanya digunakan waktu naik 10 % sampai 90 %

- Waktu puncak (*time overshoot*)$\left(t_p\right)$

Waktu puncak adalah waktu yang diperlukan tanggapan untuk mencapai puncak lewatan pertama kali

- Lewatan maksimum (*maximum overshoot)* $\left(M_p\right)$

Lewatan maksimum adalah harga puncak maksimum dari kurva tanggapan yang diukur dari satu. Jika harga keadaan tunak tanggapan tidak sama dengan satu maka biasa digunakan persentase lewatan maksimum dengan rumusan berikut

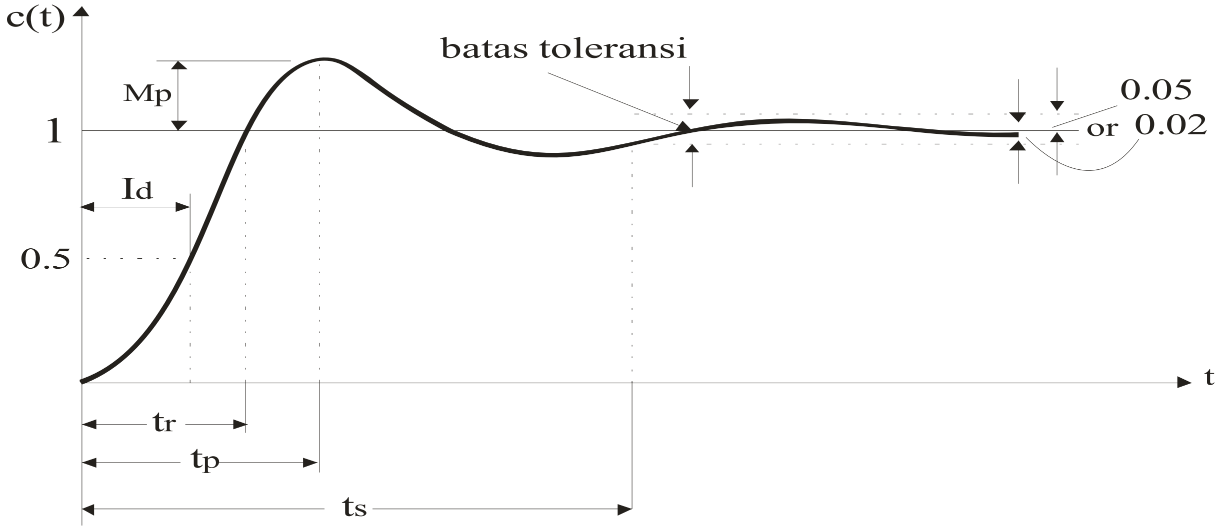
Lewatan maksimum (*maximum overshoot)*

$$\frac{c\left(t_p\right)-c(\infty)}{c(\infty)}\times 100\% \tag{4.46}$$

- Waktu penetapan *(settling time)* $\left(t_s\right)$

Waktu penetapan adalah waktu yang diperlukan kurva tanggapan untuk mencapai dan menetap dalam daerah disekitar harga akhir yang ukurannya ditentukan dengan persentase mutlak dari harga akhir biasanya 5 % atau 2%. Waktu penetapan ini dikaitkan dengan konstanta waktu terbesar dari sistem kendali.

Jika harga-harga t_d, t_r, t_p, M_p dan t_s telah ditetapkan maka bentuk kurva tanggapan peralihan dapat ditentukan berikut



Gambar 4.7 Spefisikasi Tanggapan Peralihan

Untuk tanggapan peralihan pada sistem orde kedua, jika diinginkan pada sistem tersebut adanya tanggapan yang cepat dengan redaman yang cukup maka rasio redaman harus terletak antara 0.4 sampai dengan 0.8. Jika harga rasio redaman kecil dari 0.4 $(\varsigma < 0.4)$ maka dihasilkan lewatan berlebih pada tanggapan peralihan dan jika harga rasio redaman besar dari 0.8 $(\varsigma > 0.8)$ maka dihasilkan tanggapan peralihan yang lambat. Untuk sistem orde kedua perhitungan harga-harga t_d, t_r, t_p, M_p dan t_s berdasarkan persamaan (4.31) dan sistem dianggap mengalami redaman kurang. Diperoleh

- Waktu naik (*rise time*), (t_r)

$$c(t_r) = 1 \tag{4.47}$$

$$c(t_r) = 1 - e^{-\omega_n t_r}\left(\cos\omega_d t_r + \frac{\varsigma}{\sqrt{1-\varsigma^2}}\sin\omega_d t_r\right) = 1 \tag{4.48}$$

Karena $e^{-\omega_n t} \neq 0$ persamaan (4.48) berubah menjadi

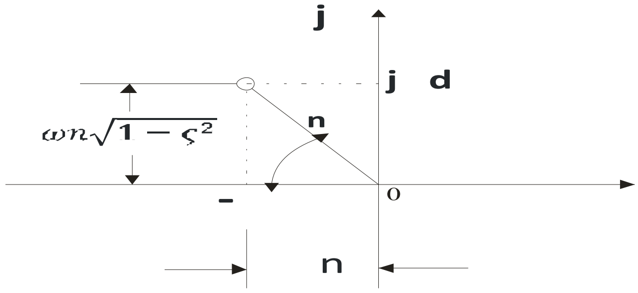
$$\cos\omega_d t_r + \frac{\varsigma}{\sqrt{1-\varsigma^2}}\sin\omega_d t_r = 0 \tag{4.49}$$

atau

$$\tan\omega_d t_r = -\frac{\sqrt{1-\varsigma^2}}{\varsigma} = -\frac{\omega_d}{\sigma} \tag{4.50}$$

$$t_r = \frac{1}{\omega_d}\tan^{-1}\left(-\frac{\omega_d}{\sigma}\right) = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \tag{4.51}$$

Untuk nilai β didefinisikan berdasarkan Gambar 4.8 berikut



Gambar 4.8 Definisi Nilai β

- Waktu puncak (*time overshoot*) $\left(t_p\right)$

Waktu puncak $\left(t_p\right)$ diperoleh dengan mendiferensiasikan $c(t)$ pada persamaan (4.31) terhadap waktu dan menyatakan turunan ini sama dengan nol serta diperoleh

$$\left.\frac{dc\left(t_p\right)}{dt}\right|_{t=t_p} = \left(\sin \omega_d t_p\right)\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\varsigma^2}}\ e^{-\omega_n t_p} = 0 \tag{4.52}$$

Akan menghasilkan persamaan

$$\sin \omega_d t_p = 0 \rightarrow \omega_d t_p = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \ldots \tag{4.53}$$

karena waktu puncak berkaitan dengan lewatan puncak pertama maka

$$\omega_d t_p = \pi \rightarrow t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \tag{4.54}$$

- Lewatan maksimum (*maximum overshoot)* $\left(M_p\right)$

Lewatan maksimum (*maximum overshoot)* $\left(M_p\right)$ terjadi pada waktu puncak atau pada $t = t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$. Dengan menggunakan persamaan (4.46) diperoleh

$$M_p = c\left(t_p\right) - 1 \tag{4.55}$$

$$M_p = -e^{-\varsigma\omega_n\left(\frac{\pi}{\omega_d}\right)}\left(\cos\pi + \frac{\varsigma}{\sqrt{1-\varsigma^2}}\sin\pi\right) \tag{4.56}$$

$$M_p = e^{-\left(\frac{\sigma}{\omega_d}\right)\pi} = e^{-\left(\frac{\varsigma}{\sqrt{1-\varsigma^2}}\right)\pi} \tag{4.57}$$

Persen lewatan maksimum adalah $e^{-\left(\frac{\sigma}{\omega_d}\right)\pi}$ x 100 % (4.58)

- Waktu penetapan *(settling time)* $\left(t_s\right)$

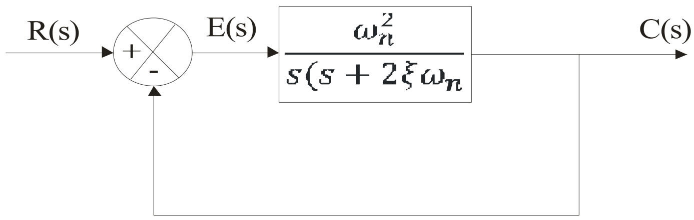
Waktu penetapan *(settling time)* $\left(t_s\right)$ untuk pita toleransi $\pm 2\ \%$ dan $\pm 5\ \%$ dapat diukur dalam bentuk $t_s = \dfrac{1}{\zeta\omega_n}$. Untuk $0 < \varsigma < 0.9$ digunakan kriteria $\pm 2\ \%$ maka waktu penetapan $\left(t_s\right)$ mendekati empat kali konstanta waktu dengan rumusan

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} \tag{4.59}$$

Untuk $0 < \varsigma < 0.9$ dan digunakan kriteria $\pm 5\ \%$ maka waktu penetapan $\left(t_s\right)$ mendekati tiga kali konstanta waktu atau

$$t_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n} \tag{4.60}$$

Contoh 4.4 :
Untuk sistem dibawah ini



Gambar 4.9 Diagram Blok Sistem Kendali Lingkar Tertutup

Dimana $\varsigma = 0.65$ dan $\omega_n = 10$ rad/det. Tentukan t_r, t_p, M_p dan t_s jika sistem dikenai masukan undak satuan

Jawab :

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \varsigma^2} = 10\ \sqrt{1 - \left(0.65\right)^2} = 7.5993 \tag{4.61}$$

$$\sigma = \varsigma\omega_n = \left(0.65\right)\left(10\right) = 6.5 \tag{4.62}$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_d}{\sigma}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{7.5993}{6.5}\right) = 0.8632 \tag{4.63}$$

Waktu naik $\left(t_r\right)$

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{3.14 - 0.8632}{7.5993} = 0.2998 \tag{4.64}$$

Waktu puncak (*time overshoot*)$\left(t_p\right)$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{3.14}{7.5993} = 0.4134 \tag{4.65}$$

Lewatan maksimum (*maximum overshoot*) $\left(M_p\right)$

$$M_p = e^{-\left(\frac{\sigma}{\omega_d}\right)\pi} = e^{-\left(\frac{6.5}{7.5993}\right)\pi} = 0.0681 \tag{4.66}$$

Persentase lewatan maksimum : 6.8077 % (4.67)

Waktu penetapan $\left(t_s\right)$

Untuk kriteria 2 % waktu penetapannya adalah

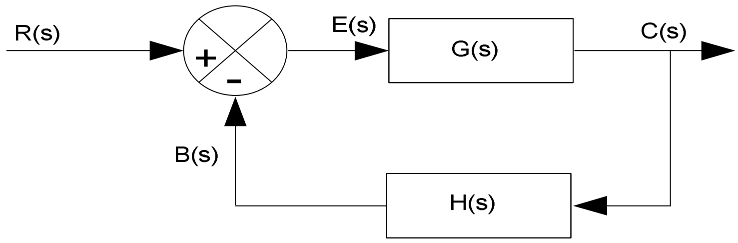
$$t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{6.5} = 0.6154 \text{ detik} \tag{4.68}$$

Untuk kriteria 5 % waktu penetapannya adalah

$$t_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n} = \frac{3}{6.5} = 0.4615 \text{ detik} \tag{4.69}$$

4.4 Sistem Orde Tinggi

Tinjau sistem yang ditunjukkan pada Gambar 4.10 dengan fungsi alih lingkar tertutupnya



Gambar 4.10 Diagram Blok Sistem Kendali

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \tag{4.70}$$

Pada umumnya $G(s)$ dan $H(s)$ diberikan sebagai rasio polinomial dalam s atau

$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} \tag{4.71}$$

$$H(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \tag{4.72}$$

Dimana $p(s)$, $q(s)$, $n(s)$ dan $d(s)$ adalah polinomial dalam s. Fungsi alih lingkar tertutup yang diberikan oleh persamaan (4.70) selanjutnya dapat ditulis

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{p(s)d(s)}{q(s)d(s) + p(s)n(s)} \tag{4.73}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{b_o s^m+b_1 s^{m-1}+\ldots+b_{m-1}s+b_m}{a_o s^n+a_1 s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}s+a_n} \tag{4.74}$$

Untuk menentukan tanggapan peralihan sistem pada persamaan (4.73) atau persamaan (4.74) terhadap setiap masukan yang diberikan perlu diuraikan persamaan polinomial tersebut atas faktor-faktornya. Setelah persamaan polinomial diuraikan atas faktor-faktornya maka persamaan $C(s)/R(s)$ dapat ditulis

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{k(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)} \tag{4.75}$$

Selanjutnya akan diuji perilaku tanggapan sistem ini terhadap masukan undak satuan. Diasumsikan bahwa pole-pole lingkar tertutup berbeda satu sama lain. Untuk masukan undak satuan persamaan (4.75) dapat ditulis menjadi

$$C(s)=\frac{a}{s}+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s+p_i} \tag{4.76}$$

Dimana a_i adalah residu dari pole di $s = -p_i$

Jika semua pole lingkar tertutup terletak disebelah kiri sumbu khayal bidang s maka besar relatif dari residu menentukan kepentingan relatif dari komponen-komponen $C(s)$ dalam bentuk uraian tersebut. Jika ada suatu zero lingkar tertutup mempuyai harga yang hampir sama dengan suatu pole lingkar tertutup maka residu pada pole ini adalah kecil dan koefesien suku tanggapan peralihan yang berkaitan dengan pole ini menjadi kecil. Sepasang pole dan zero yang letaknya berdekatan secara efektif akan saling menghilangkan. Jika suatu pole terletak sangat jauh dari titik asal maka residu pada pole ini mungkin kecil. Tanggapan peralihan yang ditimbulkan oleh pole yang jauh ini adalah kecil dan berlangsung dalam waktu yang singkat. Suku-suku $C(s)$ dalam bentuk uraian yang mempuyai residu sangat kecil memberikan kontribusi yang kecil pada tanggapan peralihan sehingga suku-suku ini dapat diabaikan. Jika ini dilakukan maka sistem orde tinggi dapat didekati dengan sistem berorde rendah

Pole-pole dari $C(s)$ terdiri dari pole-pole nyata dan pasangan-pasangan pole konjugasi kompleks. Sepasang pole konjugasi kompleks menghasilkan bentuk orde kedua dalam s. Bentuk uraian faktor dari persamaan karakteristik orde tinggi terdiri dari bentuk orde pertama dan orde kedua maka persamaan (4.76) dapat ditulis kembali

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{s\prod_{j=1}^{q}(s+p_j)\prod_{k=1}^{r}(s^2+2\varsigma_k\omega_k s+\omega_k^2)} \tag{4.77}$$

Dimana $q+2r=n$. Jika pole-pole lingkar tertutup mempuyai harga yang berbeda-beda satu sama lain maka persamaan (4.77) dapat diuraikan menjadi pecahan parsial sebagai berikut

$$C(s) = \frac{a}{s} + \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{s + p_j} + \sum_{k=1}^{r} \frac{b_k\left(s + \varsigma_k\omega_k\right) + c_k\omega_k\sqrt{1-\varsigma_k^2}}{s^2 + 2\varsigma_k\omega_k s + \omega_k^2} \tag{4.78}$$

Dari persamaan (4.78) dapat dilihat bahwa tanggapan sistem orde tinggi tersusun dari beberapa bentuk yang melibatkan fungsi-fungsi sederhana yang dijumpai pada tanggapan sistem orde pertama dan kedua. Selanjutya tanggapan sistem terhadap undak satuan $c(t)$ didapatkan dengan menggunakan transformasi Laplace balik dari $C(s)$ adalah

$$c(t) = a + \sum_{j=1}^{n} a_j e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^{r} b_k e^{-\varsigma_k\omega_k t} \cos\omega_k\sqrt{1-\varsigma_k^2}\,t + \sum_{k=1}^{r} b_k e^{-\varsigma_k\omega_k t} \sin\omega_k\sqrt{1-\varsigma_k^2}\,t \quad \text{untuk } t \ge 0 \tag{4.79}$$

Jika semua pole-pole lingkar tertutup berada disebelah kiri sumbu khayal bidang s maka suku-suku ekspoensial dan suku-suku eksponensial teredam pada persamaan (4.79) mendekati nol dengan membesarnya waktu t. Selanjutnya keluaran keadaan mantapnya adalah $c(\infty) = a$

Contoh 4.5 :

Tentukan tanggapan masukan undak dari sistem berumpan balik satu yang mempuyai fungsi alih lingkar terbuka

$$G(s)=\frac{5(s+20)}{s(s+4.59)(s^2+3.41s+16.35)} \tag{4.80}$$

Jawab :

Fungsi alih lingkar tertutup sistem adalah

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{5(s+20)}{s(s+4.59)(s^2+3.41s+16.35)+5(s+20)} \tag{4.81}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{5(s+20)}{s^4+8s^3+32s^2+80s+100} \tag{4.82}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{5(s+20)}{(s^2+2s+10)(s^2+6s+10)} \tag{4.83}$$

Tanggapan terhadap masukan undak satuan adalah

$$C(s)=\frac{5(s+20)}{(s^2+2s+10)(s^2+6s+10)s} \tag{4.84}$$

Difaktorkan menjadi

$$C(s)=\frac{1}{s}+\frac{\frac{3}{8}(s+1)-\frac{17}{8}}{(s+1)^2+3^2}+\frac{-\frac{11}{8}(s+3)-\frac{13}{8}}{(s+3)^2+1^2} \tag{4.85}$$

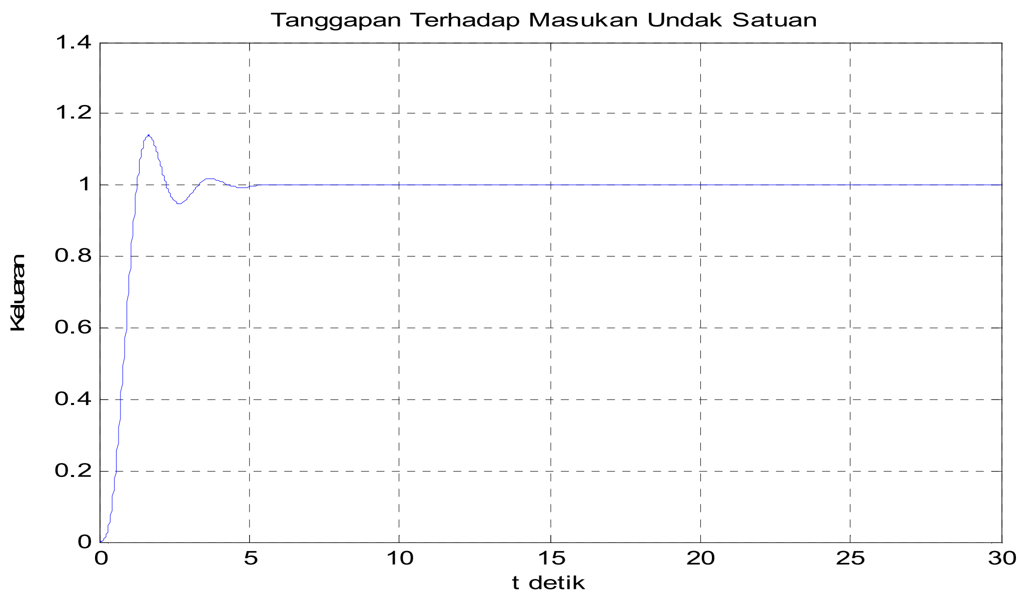
Dengan menggunakan transformasi Laplace balik diperoleh $c(t)$ dengan nilai sebagai berikut

$$c(t) = 1 + \frac{3}{8}e^{-t}\cos 3t - \frac{17}{24}e^{-t}\sin 3t - \frac{11}{8}e^{-3t}\cos t - \frac{13}{8}e^{-3t}\cos t \quad \text{untuk} \quad t \geq 0 \tag{4.86}$$

Listing program Matlab

```
clc
clear all
close all
% Contoh Soal 4-5
num = [ 0   0   0   5 100];
den = [ 1   8  32   80 100];
%
% Fungsi alih
sys1 = tf(num,den)
%
t = 0:0.02:30;
[y,x,t] = step(num,den,t);
plot(t,y);
grid on
title('Tanggapan Terhadap Masukan Undak Satuan ')
ylabel('Keluaran')
xlabel('t detik')
```

Hasil program



Gambar 4.11 Tanggapan Sistem Orde Empat (Orde Tinggi) Terhadap Masukan Undak Satuan

4.5 Rangkuman

Dalam praktek, sinyal masukan sistem kendali tidak dapat diketahui sebelumnya tetapi mempuyai sifat acak sehingga masukan sesaat tidak dapat dinyatakan secara analitis. Hanya pada beberapa kasus khusus sinyal masukan dapat diketahui terlebih dahulu sehingga dapat dinyatakan secara analitis atau dengan kurva. Dalam menganalisis dan mendisain sistem kendali harus ditentukan suatu dasar perbandingan performansi berbagai sistem kendali. Dasar ini dapat disusun dengan menetapkan sinyal-sinyal uji tertentu dan membandingkan tanggapan berbagai sistem terhadap sinyal-sinyal masukan ini. Sinyal masukan uji yang biasa digunakan adalah fungsi undak satuan, laju satuan, parabolik satuan dan sebagainya. Dengan sinyal uji ini dapat dilakukan analisis matematis dan eksperimental sistem kendali secara mudah karena sinyal-sinyal ini merupakan fungsi waktu yang sangat sederhana.