BAB 2
ANALISIS VEKTOR

A. Tujuan Umum

- Mahasiswa memahami pengertian vektor, operasi vektor, penjumlahan, pengurangan, perkalian dan kaedah aljabar vektor.

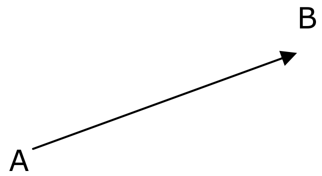
B. Tujuan Khusus

- Mahasiswa dapat memahami konsep pengertian vektor.
- Mahasiswa dapat memahami konsep dari operasi vektor
- Mahasiswa dapat memahami konsep penjumlahan, pengurangan, perkalian dan kaedah aljabar vektor.

2.1. Pengertian vektor

Vector adalah besaran yang mempunyai besar dan arah.

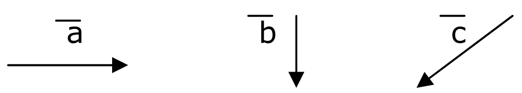
Ex: kecepatan, percepatan, gaya, momen gaya, dsb.



Suatu partikel bergerak dari titik A ke titik B, maka dapat dikatakan bahwa partikel itu mengalami perpindahan.

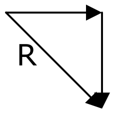
2.2. Operasi Vektor

1. Penjumlahan vector secara geometris

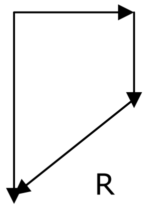


Dari ketiga vector tersebut dapat dijumlahkan dengan cara sebagai berikut:

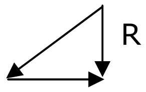
$\overline{a} + \overline{b}$



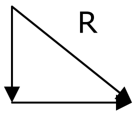
$\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$



$\overline{c} + \overline{a}$



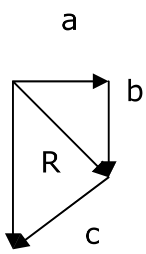
$\overline{b} + \overline{a}$



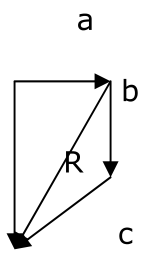
Pada penjumlahan vector berlaku hukum

a + b = b + a

(a + b) + c



a + (b + c)



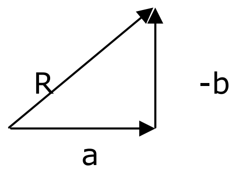
Pada vector berlaku sifat **ASOSIATIF**

(a + b) + c = a + (b + c)

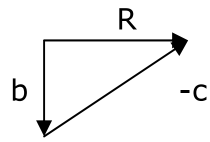
2. Pengurangan vector secara geometris

   Pengurangan vector dapat dilakuakan dengan menjumlahkan vector 1 dengan lawan vector 2.

a– b = a + (-b)



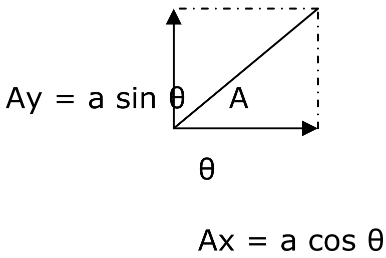
b – c = b + (-c)

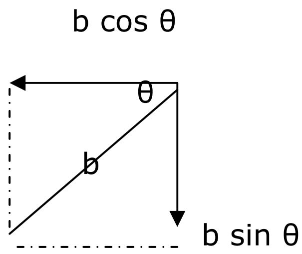


3. Penjumlahan dan pengurangan vector secara analisis

   Untuk menjumlahkan vector-vektor 3 dimensi digunakan metode analitik.

   Penguraian vector :





Vector a dapat diuraikan menjadi Ax dan Ay

$$Ax = a \cos \theta$$

$$Ay = a \sin \theta$$

Utuk menentukan besarnya vector a dan arah vector a dapat digunakan rumus sebagai berikut:

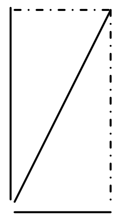
Besar $\left|\vec{a}\right|$: $\sqrt{Ax^2 + Ay^2}$

Arah $\rightarrow \theta = \text{arc.}\tan \dfrac{\text{Ax}}{\text{Ay}}$

Contoh penerapan dalam soal :

1. Sebuah pesawat terbang menempuh jarak sejauh 150 km dalam arah garis lurus membentuk sudut 30^0 ke timur dari arah utara, berapa jauh ke utara dan berapa jauh ke timur dari titik asal jarak yang ditempuh objek/pesawat itu?

   Penyelesaian:



Ke utara

$Ay = a \cos 30^0$

$= a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$= 150. \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$= 75\sqrt{3}$

ke timur

$Ax = a \sin 30^0$

$= a \cdot \frac{1}{2}$

$= 150. \frac{1}{2}$

$= 75$

2. Tiga vector sebidang dalam suatu system koordinat tegak lurus dinyatakan sebagai:

$a = 4i - j$

$b = -3i + 2j$

$c = -3j$

Penyelesaian:

$r_x = a_x + b_x + c_x$

$= (4 - 3 + 0)i$

$= 1$

$r_y = a_y + b_y + c_y$

$= (-1 + 2 - 3)i$

$= -2$

$|r| = \sqrt{r_x^{\ 2} + r_y^{\ 2}}$ θ = arc.tan $\frac{r_x}{r_y}$

$= \sqrt{1^2 + (-2)^2}$ = arc.tan $-\frac{2}{1}$

$= \sqrt{5}$

3. Seorang peserta lomba perahu kano mendayung perahu kanonya dengan kecepatan tetap 2.6 m/s di sungai yang kecepatan arus 3.2 m/s berapa nilai kecepatan yang merupakan rentang nilai resultan kecepatan perahu dan kecepatan sungai?

Penyelesaian:

V_1 = 2,6 m/s

V2 = 3.2 m/s

$|V1 - V2| \leq Vr \leq |V1 + V2|$

$|2.6 - 3.2| \leq Vr \leq |2.6 + 3.2|$

0.6 m/s $\leq Vr \leq 5.8$ m/s

Jadi, rentang nilai resultan adalah 0.6 m/s $\leq Vr \leq 5.8$ m/s

2.3. Perkalian Vektor

1. Perkalian sebuah konstanta dengan sebuah vector

a $\longrightarrow$	2a $\xrightarrow{\qquad\qquad}$
k = $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$a $\rightarrow$
k = -2	-2a $\xleftarrow{\qquad\qquad}$
k = $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$a $\leftarrow$

- “Jika k positif maka arahnya sama dengan arah vector a”
- “Jika k negatif maka arahnya berlawanan dengan vector a”

2. Perkalian dua buah vector dengan hasil berupa skalar

$$\boxed{\vec{a}.\vec{b} = |a||b|\cos\theta}$$

Operasi di atas disebut juga “dot product”

Keterangan:

$\vec{a}$ = vector a

$\vec{b}$ = vector b

θ = sudut yang dibentuk antara vector a dan vector b

contoh:

1) Sebuah vector a 6 satuan ke arah selatan, vector b 5 satuan membentuk sudut 30^0 terhadap vector a

Jawab:

$\vec{a}.\vec{b} = |a||b|\cos\theta$

= 6.5 cos 30^0

= 30($\frac{1}{2}\sqrt{3}$)

= 15$\sqrt{3}$

2) Vektor x 8 satuan ke arah utara dioperasikan dengan dot product dengan vector y yang besarnya adalah $\frac{3}{4}$ satuan dari

vector x dan membentuk sudut 45^0 terhadap vector x. tentukan hasil operasi dot product.

Jawab:

$\vec{a}.\vec{b} = |a||b|\cos\theta$

$= 8.6 \cos 45^0$

$= 48 \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

$= 24\sqrt{2}$

3. Perkalian dua buah vector dengan hasil berupa vector lain

$$\boxed{\vec{a}x\vec{b} = |a||b|\sin\theta}$$

Keterangan:

$\vec{a}$ = vector a

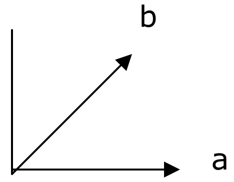
$\vec{b}$ = vector b

θ = sudut yang dibentuk antara vector a dan vector b

Operasi di atas disebut juga “cross product”

Arah hasil perkalian vector a dan b selalu tegak lurus dengan bidang yang dibentuk oleh vector a dan b.

Untuk menentukan arah perkalian vector:



"Kepalkan jari tangan melingkupi sumbu sambil mendorong vector a ke vector b oleh ujung-ujung jari melalui sudut terkecil, sementara ibu jari tetap tegak jadi hasil perkalian vector a dan b ditentukan oleh ibu jari.

Jika kita mengetahui komponen-komponen vector yang akan kita kalikan, kita bisa menggunakan sifat-sifat perkalian silang diantara sesama vector satuan untuk mencari hasil perkalian silang antara dua vector. Sifat-sifat tersebut adalah:

$i \times i = j \times j = k \times k = 0$

$i \times j = -j \times i = k$

$j \times k = -k \times j = i$

$k \times i = -i \times k = j$

dengan sifat-sifat tersebut kita peroleh

$A \times B = (A_x i + A_y j + A_z k) \times (B_x i + B_y j + B_z k)$

$$\boxed{A \times B = (A_y B_z - A_z B_y)i + (A_z B_X - A_x B_Z)j + (A_x B_y -}$$

$A_y B_x)k$

Berarti jika C = A x B, maka komponen-komponen dari C sama dengan

$C = C_x I + C_y j + C_z k$ adalah

$C_x = A_y B_z - A_z B_y$

$C_y = A_Z B_X - A_x B_Z$

$C_Z = A_x B_y - A_y B_x$

Contoh soal

Hitunglah hasil dari perkalian silang antara dua vector berikut:

$A = 2i + 3j + k$ dan $B = 4i + 2j - 2k$

Penyelesaian:

$A \times B = (A_y B_Z - A_Z B_y)i + (A_Z B_X - A_x B_Z)j + (A_x B_y - A_y B_x)k$

$= \{(3)(-2) - (1)(2)\}i + \{(1)(4) - (2)(-2)\}j + \{(2)(2) - (3)(4)\}k$

$= -8i + 8j - 8k$

2.4. Kaidah aljabar vektor

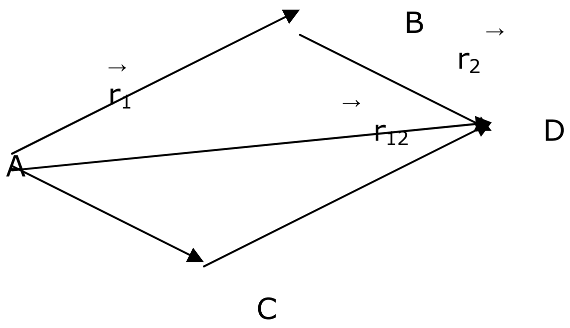
1. Penjumlahan dan pengurangan Vektor

Suatu gerakan dari A ke B sekaligus dari A ke C sama saja dari A ke D seperti pada gambar 1. Sebaliknya gerakan A ke D dapat di katakan merupakan jumlah gerakan dari A ke B dan dari A ke C atau kita tulis .

$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$ atau $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$

Maka vektor AD di tulis dengan melukis jajaran genjang yang sisinya AB dan AC dan vektor AD itu sepanjang diagonal jajaran genjang tersebut.. Di lain pihak , gerakan dari A ke D di pandang sebagai jumlah gerakan dari A ke B lalu dari B ke D dan atau dapat kita tulis :

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$$



Jika $\vec{AB} = (x_1 , y_1 , z_1)$

$\vec{CD} = (x_2 , y_2 , z_2)$

Maka $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{CD} = (x_1 + x_2)\, i + (y_1 + y_2)\, j + (z_1 + z_2)\, k$

Perkalian skalar

Besaran fisika yang tidak mempunyai arah seperti halnya suhu , muatan listrik, panas , jarak , dan lain sebagainya , di katakan berupa skalar . Perkalian pada vektor tersebut di definisikan sebagai berikut :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \, (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

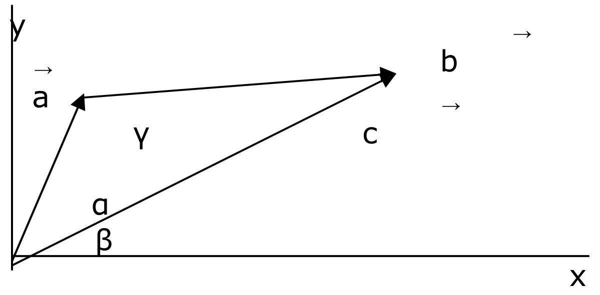
di mana $(\vec{a} \cdot \vec{b})$ di maksudkan sebagai suhu antara $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ di sebut perkalian skalar mengingat hasilnya berupa skalar . dari definisi di atas jelaslah bahwa perkalian skalar itu sifatnya komutatif , yakni :

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Dengan memperhatikan gambar 2 terlihatlah bahwa :

c^2 = c . c = (a + b) . (a + b) = $a^2 + b^2$ + 2ab cos (a , b) = $a^2 + b^2$ – 2 cos γ

yang tak lain adalah rumus cos sinus dalam trigonometri,



Gb. 2 rumus cosinus

Dengan mengingat bahwa :

Cos 0 = 1 dan Cos ½ π = 0 ,maka

i.i=1;   j.j=1;   k.k=1;

i.j=0;   i.k=0;   j.k=0

a .b = $(a_x\, i + a_y\, j + a_z\, k) . (b_x\, i + b_y\, j + b_z\, k)$

$= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$

r^2 = r . r = (xi + yj + zk) . (xi + yj + zk)

$= x^2 + y^2 + z^2$

a. Perkalian vektor

Di samping perkalian skalar yang hasilnya berupa skalar di definisikan pula perkalian vektor yang hasilnya berupa vektor sebagai

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

yang sedemikian hingga vektor c tegak lurus a maupun b serta pada arah

bergeraknya sekrup oleh perputaran dari a ke b , dan besarnya c yakni c di berikan

oleh

$$c = ab \sin (\vec{a} , \vec{b})$$

mengingat sin 0 = 0 maka perkalian antara vektor dengan arah yang sejajar

hasilnya adalah 0 maka

i x i = 0 ; j x j =0 ; k x k = 0;

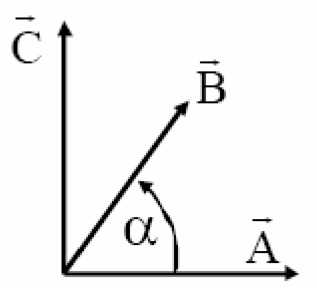
i x j = k ; I xk = - j ; j x k = i ;

$a \times b = (a_x\, i + a_y\, j + a_z\, k) \times (b_x\, i + b_y\, j + b_z\, k)$

$\quad = (a_y\, b_z - b_z\, y_y)\, i + (a_z\, b_x - a_x\, b_z)\, j + (a_x\, b_y - a_y\, b_x)\, k$

b. Perkalian Cross

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} = |\vec{A}||\vec{B}| \sin \alpha \times \vec{a}$$



Dengan a adalah vektor satuan yang mempunyai arah sama dengan vektor C dan tegak lurus terhadap vektor A dan vektor B

Jika $\vec{A} = A_u\hat{a}_u + A_v\hat{a}_v + A_w\hat{a}_w$ **dan** $\bar{B} = B_u\hat{a}_u + B_v\hat{a}_v + B_w\hat{a}_w$

Maka,

$$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \hat{a}_u & \hat{a}_v & \hat{a}_w & \hat{a}_u & \hat{a}_v \\ A_u & A_v & A_w & A_u & A_v \\ B_u & B_v & B_w & B_u & B_v \end{array}\right.$$

$$- \qquad - \qquad - \qquad\qquad\qquad + \qquad + \qquad +$$

$$\boxed{\vec{C} = (A_vB_w - A_wB_v)\hat{a}_u + (A_wB_u - A_uB_w)\hat{a}_v + (A_uB_v - A_vB_u)\hat{a}_w}$$

Daftar Pustaka

1. Giancoli, Douglas C., 2001, Fisika Jilid I (terjemahan), Jakarta : Penerbit Erlangga.
2. Halliday dan Resnick, 1991, Fisika Jilid I, Terjemahan, Jakarta : Penerbit Erlangga.
3. Tipler, P.A.,1998, Fisika untuk Sains dan Teknik-Jilid I (terjemahan), Jakarta : Penebit Erlangga.
4. Young, Hugh D. & Freedman, Roger A., 2002, Fisika Universitas (terjemahan), Jakarta : Penerbit Erlangga